This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math 359.04

Harvard College Library

BOUGHT WITH THE INCOME

FROM THE BEQUEST OF

PROF. JOHN FARRAR, LL.D.

AND HIS WIDOW

ELIZA FARRAR

FOR

"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND NATURAL PHILOSOPHY"

SCIENCE CENTER LIBRARY

2:016

SCHLOEMILCHS

HANDBUCH DER MATHEMATIK

ZWEITE AUFLAGE

ERSTER BAND

SCHLOEMILCHS

HANDBUCH DER MATHEMATIK

ZWEITE AUFLAGE

HERAUSGEGEBEN VON

Prof. Dr. R. HENKE
Konrektor des Annen-Realgymnasiums in Dresden

UND

Dr. R. HEGER
Hon.-Professor an der K.S. Technischen Hochschule und Gymnasial-Oberlehrer in Dresden

ERSTER BAND

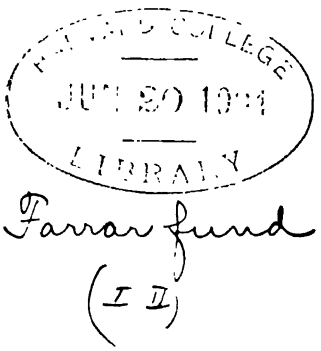
ELEMENTARMATHEMATIK

MIT 321 FIGUREN

Oskar Schloemilch.

LEIPZIG
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH
1904

Math 359.04



Farrar fund
(I II)

Das Recht der Übersetzung bleibt vorbehalten.

Spamersche Buchdruckerei in Leipzig.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Das vom Geh. Schulrat O. SCHLOEMILCH im Jahre 1879—1881 herausgegebene »Handbuch der Mathematik« bildete ursprünglich einen Teil der »Encyklopädie der Naturwissenschaften«. Bald nach dem Übergange des Verlags der »Encyklopädie« in meinen Besitz waren die mitübernommenen geringen Vorräte der ersten Auflage des Handbuches vergriffen, und es erschien mir daher bei dem nicht zu unterschätzenden didaktischen Werte des Werkes angezeigt, eine neue Auflage zu veranstalten. Leider war inzwischen sowohl O. SCHLOEMILCH, wie F. REIDT, der Verfasser der Abteilung über niedere Mathematik, gestorben; ich legte daher die Bearbeitung dieser Abteilung in die Hände des Herrn Professor Dr. R. HENKE in Dresden, während die Bearbeitung der höheren Mathematik wieder, wie bei der ersten Auflage, Herr Professor Dr. R. HEGER in Dresden zu besorgen die Güte hatte.

Die Ausdehnung, die die Mathematik in den letzten Jahren erfahren hat, machte es notwendig, das bisher in zwei Bänden erschienene Werk in drei Bände zu zerlegen und mehrere neue Abschnitte einzufügen; es enthält nunmehr Band I die Elementarmathematik (Arithmetik und Algebra, Planimetrie, Trigonometrie und Stereometrie), Band II und III die höhere Mathematik, und zwar Band II die darstellende Geometrie, die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes und die Differentialrechnung, Band III die Integralrechnung, einen Abriß der Ausgleichungsrechnung (auf HENKEs Grundlage), die mathematischen Grundlagen der Lebens- und Invalidenversicherung (mit versicherungstechnischen Tabellen) und eine kurzgefaßte Darstellung der mathematischen Kartenentwurfslehre sowie ein Sachregister zu allen drei Bänden.

Dagegen ist die Art der Bearbeitung im wesentlichen die gleiche geblieben wie bei der ersten Auflage, und so dürften auch heute noch die Worte Geltung haben, die SCHLOEMILCH der ersten Auflage voranstellte: »Was die vorliegende Darstellung der Mathematik betrifft, so kann sie, gegenüber der kolossalen Ausdehnung der Wissenschaft, selbstverständlich keine erschöpfende sein, wohl aber soll sie den Leser so weit führen, daß er eine

ganze Reihe von Hauptwerken über Astronomie, Mechanik, Physik und Ingenieurwissenschaften lesen und sich nötigenfalls weiter helfen kann. Das Ganze zerfällt in zwei Hauptteile, deren erster die niedere Mathematik und deren zweiter die höhere Mathematik umfaßt. Der erste Teil ist gewissermaßen die Formenlehre, der zweite die Syntax der mathematischen Sprache; der erste bindet allerdings den Studierenden an gewisse Formen, die nun einmal gelernt werden müssen, der zweite gewährt die freie Beweglichkeit, welche auf eigene Entdeckungen ausgehen kann. Ließe sich jener elementare Teil in demselben jugendlichen Alter absolvieren, in welchem man das Deklinieren und Konjugieren lernt, so würde das Vorurteil, daß die Mathematik eine trockene Wissenschaft sei, sehr bald in das Gegenteil umschlagen. Vielleicht dient aber die vorliegende Darstellung dazu, um in weitern Kreisen das Interesse für eine Wissenschaft zu verbreiten, die sich rühmen darf, nicht nur absolute Wahrheit zu liefern, sondern auch die Sprache zu verstehen, welche die Natur zu uns redet.

Leipzig, im Oktober 1903.

Die Verlagsbuchhandlung von Johann Ambrosius Barth.

Vorwort zum ersten Bande der zweiten Auflage.

Im Auftrage der Verlagsbuchhandlung habe ich für die zweite Auflage des SCHLOEMILCH schen Handbuchs die Bearbeitung des ersten Bandes, der die Elementarmathematik enthält, übernommen. Zu einer vollständigen Neubearbeitung, wie sie meinem Wunsche mehr entsprochen hätte, würde die zur Verfügung gestellte Zeit nicht ausgereicht haben. Die erste Auflage hatte ein anerkannter Meister der Lehrkunst, der verstorbene Dr. REIDT in Hamm, verfaßt, und sein Werk hat sich, wie der Erfolg zeigt, so gut bewährt, daß der Plan und Charakter des Buches im ganzen unbedenklich beibehalten werden konnte. Das Buch soll, hauptsächlich für den Selbstunterricht bestimmt, die Lehren in solcher Ausführlichkeit und Faßlichkeit vortragen, daß die Unterstützung eines Lehrers nicht unbedingt notwendig erscheint. Außerdem soll es dem angehenden Lehrer für die Behandlung des Stoffes im Unterricht einen Anhalt geben. Dazu mußte das praktisch pädagogische Bedürfnis in den Vordergrund gerückt werden, selbst auf Kosten der strengen und subtilen Vertiefung der Grundbegriffe der Elementarmathematik, wie sie von der Warte der höheren Mathematik aus gesehen, manchem notwendig erscheinen möchte.

Bei einer Überarbeitung war es jedoch nicht ausgeschlossen, daß außer einer durchgängigen Revision des Textes und vielfacher Umgestaltung einzelner Abschnitte, manche Kapitel neu eingefügt werden mußten, die REIDT als nicht mehr zur Elementarmathematik gehörig, nicht aufgenommen hatte, die man jetzt wohl ohne Bedenken dazu rechnen kann. Dafür mußten, um den Umfang des Buches nicht wesentlich größer zu machen, an allen Stellen, wo es irgend zulässig erschien, Kürzungen eintreten. Auch habe ich versucht, durch eine straffere, übersichtlichere Einteilung des umfangreichen Stoffes das Buch handlicher zu gestalten.

Vollständig neu bearbeitet ist die *Trigonometrie*. Ich war bestrebt, ihre Grundbegriffe und Sätze möglichst rein geometrisch abzuleiten, um den Anfänger darauf hinzuweisen, daß auch Trigonometrie in erster Linie Geometrie sein soll. Um die Trigonometrie auf räumliche Gebilde anwenden zu können, ist sie der Stereometrie vorangestellt worden. Die sphärische

Trigonometrie, die im Rahmen der Elementarmathematik nichts weiter sein kann, als die Anwendung der Trigonometrie auf die Ecke und das sphärische Dreieck, habe ich in den betreffenden Abschnitt der Stereometrie verwiesen.

In der *Arithmetik und Algebra* wurden neu eingefügt: die diophantischen Gleichungen; die Gleichungen höheren Grades, die sich auf quadratische zurückführen lassen; die Berechnung der reellen Wurzeln numerischer Gleichungen höheren Grades im Anschluß an die Betrachtung der ganzen rationalen Funktionen einer Variabeln und die Maxima und Minima dieser Funktionen; die Kettenbrüche; die einfachsten unendlichen Reihen. Wesentlich ausführlicher wurden behandelt die quadratischen Systeme und die Zinseszins- und Rentenrechnung.

In der *Planimetrie* wurde namentlich der Abschnitt über die merkwürdigen Punkte, Geraden und Kreise des Dreiecks umgearbeitet und wesentlich erweitert. Diese interessanten Beziehungen, die das Material zu der neueren *„Dreiecksgeometrie“* abgeben, bieten Gelegenheit zu eingehenden Betrachtungen und zur Lösung einer Fülle von organisch sich anschließenden Aufgaben, die für die Förderung des Verständnisses der Geometrie und zur Anregung der Selbsttätigkeit sich ganz besonders nützlich erweisen.

Die *Stereometrie* hat außer der Anwendung der Trigonometrie eine wesentliche Erweiterung erfahren, namentlich durch den Abschnitt über die Beziehungen der Kugel zu den Polyedern und zum Cylinder und Kegel, in dem auch die elementare Betrachtung der Cylinder- und Kegelschnitte aufgenommen wurde. Die Volumetrie habe ich auf den Satz von CAVALIERI gegründet.

Dresden, im Oktober 1903. R. Henke.

Inhaltsverzeichnis von Band I.

Erstes Buch.

Arithmetik und Algebra.

Seite

Einleitung 3

I. Teil. Die Operationen der allgemeinen Arithmetik.

Erster Abschnitt.

Die Operationen erster und zweiter Stufe.

§ 1. Die Operationen erster Stufe 4
§ 2. Erste Erweiterung des Zahlbegriffs. Null und negative Zahlen 7
§ 3. Die Operationen zweiter Stufe 12
§ 4. Zweite Erweiterung des Zahlbegriffs. Gebrochene Zahlen 14
§ 5. Verbindung der Operationen erster und zweiter Stufe 17
§ 6. Eigenschaften der natürlichen Zahlen 25
§ 7. Zahlensysteme 30
§ 8. Dezimalzahlen 33
§ 9. Unvollständige Dezimalzahlen 36

Zweiter Abschnitt.

Die Operationen dritter Stufe.

§ 10. Das Potenzieren 42
§ 11. Begriff der Wurzel. Dritte Erweiterung des Zahlbegriffs. Irrationale Zahlen . . 47
§ 12. Das Radizieren 50
§ 13. Vierte Erweiterung des Zahlbegriffs. Imaginäre und komplexe Zahlen 55
§ 14. Das Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel 62
§ 15. Das Logarithmieren 67
§ 16. Die Logarithmen als Rechenhilfsmittel 71

II. Teil. Die Gleichungen.

Dritter Abschnitt.

Allgemeines über Gleichungen. Gleichungen ersten und zweiten Grades.

§ 17. Einteilung und Umformung der Gleichungen 78
§ 18. Lineare Gleichungen 84
§ 19. Aufgaben, die auf lineare Gleichungen führen 88
§ 20. Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten 92
§ 21. Gleichungen höheren Grades, die sich auf quadratische zurückführen lassen . . . 96
§ 22. Quadratische Systeme 99
§ 23. Diophantische Gleichungen 106

Vierter Abschnitt.

Gleichung höheren Grades.

§ 24. Kubische Gleichungen 112
§ 25. Biquadratische Gleichungen 118
§ 26. Gleichungen höheren Grades 122
§ 27. Maxima und Minima 128

III. Teil. Niedere Analysis.

Fünfter Abschnitt.

Kombinatorik.

Seite

§ 28. Grundbegriffe. Permutationen 135
§ 29. Kombinationen und Variationen 140
§ 30. Wahrscheinlichkeitsrechnung 143
§ 31. Der binomische Lehrsatz 150

Sechster Abschnitt.

Die Reihen.

§ 32. Die arithmetische Reihe 154
§ 33. Die geometrische Reihe 157
§ 34. Zinseszins- und Rentenrechnung 162
§ 35. Arithmetische Reihen höherer Ordnung. Figurierte Zahlen 167
§ 36. Kettenbrüche 172
§ 37. Unendliche Reihen 179

Siebenter Abschnitt.

Die Determinanten.

§ 38. Begriff und Haupteigenschaften der Determinanten 188
§ 39. Unterdeterminanten 192
§ 40. Auflösung linearer Systeme 198
§ 41. Addition und Multiplikation von Determinanten 203

Zweites Buch.

Planimetrie.

Einleitung.

§ 1. Die Grundbegriffe der Geometrie 211

Erster Abschnitt.

Die Grundgebilde der Planimetrie.

§ 2. Die Gerade und die Strecke 213
§ 3. Der Winkel 214
§ 4. Zwei Gerade. Parallele Gerade 217
§ 5. Der Kreis 219
§ 6. Die Figur 220

Zweiter Abschnitt.

Die Kongruenz.

§ 7. Kongruenz und Symmetrie 222
§ 8. Die Winkel der geradlinigen Figuren 223
§ 9. Die Seiten der Dreiecke 227
§ 10. Die Kongruenzsätze 229
§ 11. Nichtkongruenz-Sätze 232
§ 12. Anwendungen der Kongruenz 234
§ 13. Das Viereck 237
§ 14. Die Kongruenz der Vielecke 242
§ 15. Kreis, Punkt und Gerade 243
§ 16. Kreis und Winkel 247
§ 17. Kreis und Figuren 249
§ 18. Zwei Kreise 253
§ 19. Symmetrische Figuren 255
§ 20. Die Fundamentalaufgaben 256

Dritter Abschnitt.

Vergleichung von Längen und von Flächeninhalten geradliniger Figuren.

Seite
§ 21. Das Messen und das Verhältnis der Längen von Strecken 263
§ 22. Verhältnisse an geschnittenen Parallelen 267
§ 23. Innere und äußere Teilung einer Strecke. Harmonische Teilung 271
§ 24. Der Flächeninhalt geradliniger Figuren 273
§ 25. Der pythagoreische Lehrsatz 283
§ 26. Verwandlung und Teilung geradliniger Figuren 287

Vierter Abschnitt.

Die Ähnlichkeit geradliniger Figuren.

§ 27. Die Ähnlichkeit der Dreiecke 294
§ 28. Proportionen beim rechtwinkligen Dreieck 296
§ 29. Proportionen beim Kreise 305
§ 30. Konstruktionsaufgaben zur Ähnlichkeit 310
§ 31. Ähnlichkeit der Vielecke 312

Fünfter Abschnitt.

Messung und Teilung des Kreises. Regelmäßige Vielecke.

§ 32. Messung und Teilung von Winkeln und Kreisbogen 317
§ 33. Regelmäßige Vielecke 320
§ 34. Berechnung des Kreises 324
§ 35. Berechnung von Bogen, Sektoren und Segmenten des Kreises 330
§ 36. Die Ähnlichkeit der Kreise 335

Sechster Abschnitt.

Die planimetrischen Konstruktionsaufgaben.

§ 37. Vorbegriffe 337
§ 38. Methode der Hilfsfiguren 338
§ 39. Methode der geometrischen Örter 349
§ 40. Methode der ähnlichen Figuren 354
§ 41. Methode der algebraischen Analysis 358
§ 42. Besondere Arten von Konstruktionsaufgaben 364

Siebenter Abschnitt.

Die merkwürdigen Punkte, Geraden und Kreise des Dreiecks.

§ 43. Beziehungen des Dreiecks zum Umkreis, zum Inkreis und zu den Ankreisen . . 371
§ 44. Der Höhenschnittpunkt und der Schwerpunkt des Dreiecks 379
§ 45. Der FEUERBACHsche Kreis 383

Achter Abschnitt.

Einführung in die Geometrie der Lage.

§ 46. Harmonische Punkte und Büschel 386
§ 47. Die Transversalen des Dreiecks. Das vollständige Viereck und Vierseit 391
§ 48. Die Potenz 398
§ 49. Pol und Polare 404
§ 50. Ähnlichkeitspunkte und Ähnlichkeitspolaren 409

Drittes Buch.

Trigonometrie.

§ 1. Begriff der Trigonometrie 417
§ 2. Die trigonometrischen Funktionen eines spitzen Winkels 417
§ 3. Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen eines spitzen Winkels . . 419
§ 4. Grenzwerte der trigonometrischen Funktionen spitzer Winkel 421
§ 5. Berechnung der trigonometrischen Funktionen einiger spitzer Winkel. Trigonometrische Tafeln 423

Seite

§ 6. Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck 427
§ 7. Das allgemeine Dreieck. Erweiterung des Begriffs der trigonometrischen Funktionen auf stumpfe Winkel 432
§ 8. Beziehung des Dreiecks zum Umkreis 435
§ 9. Goniometrische Formeln, die sich aus der Beziehung des Dreiecks zum Umkreis ergeben 443
§ 10. Der allgemeine pythagoreische Lehrsatz. Der Cosinussatz 449
§ 11. Beziehungen des Dreiecks zum Inkreise und einem Ankreise 458
§ 12. Beziehungen des Dreiecks zu den Berührungskreisen und dem FEUERBACHschen Kreise 469
§ 13. Goniometrie 476
§ 14. Weitere Anwendungen der Trigonometrie 485

Viertes Buch.

Stereometrie.

Erster Abschnitt.

Gerade und Ebenen.

§ 1. Die Grundgebilde im Raume. Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen . . 501
§ 2. Gerade und Ebene senkrecht zueinander 503
§ 3. Gerade geneigt zur Ebene 506
§ 4. Gerade und Ebene parallel 508
§ 5. Parallele Ebenen 509
§ 6. Zwei einander schneidende Ebenen 512
§ 7. Drei Ebenen 516

Zweiter Abschnitt.

Die Ecke.

§ 8. Grundbegriffe 516
§ 9. Beziehungen zwischen den Seiten und den Winkeln der Ecke 518
§ 10. Kongruenz und Symmetrie der Ecken 522
§ 11. Konstruktion der Ecken 525
§ 12. Berechnung der Ecken. Sphärische Trigonometrie 527
§ 13. Mehrseitige Ecken 539

Dritter Abschnitt.

Die Polyeder.

§ 14. Grundformen der Polyeder 541
§ 15. Das Prisma 547
§ 16. Die Pyramide und der Pyramidenstumpf 552

Vierter Abschnitt.

Krumme Flächen und runde Körper.

§ 17. Der Cylinder 556
§ 18. Der Kegel und der Kegelstumpf 560
§ 19. Die Kugel 565
§ 20. Kugel mit Polyedern, Cylinder und Kegel 573

Fünfter Abschnitt.

Die Oberfläche und das Volumen der Körper.

§ 21. Oberfläche der Polyeder, des Cylinders und Kegels 583
§ 22. Volumen der Polyeder, des Cylinders und Kegels 590
§ 23. Volumen und Oberfläche der Kugel und ihrer Teile 602

Erstes Buch.

Arithmetik und Algebra.

Nach der ersten Bearbeitung von F. REIDT in Hamm

neu bearbeitet von R. HENKE in Dresden.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 3

I. Teil. Die Operationen der allgemeinen Arithmetik.

Erster Abschnitt. Die Operationen erster und zweiter Stufe.

§ 1. Die Operationen erster Stufe 4
§ 2. Erste Erweiterung des Zahlbegriffs. Null und negative Zahlen 7
§ 3. Die Operationen zweiter Stufe 12
§ 4. Zweite Erweiterung des Zahlbegriffs. Gebrochene Zahlen 14
§ 5. Verbindung der Operationen erster und zweiter Stufe 17
§ 6. Eigenschaften der natürlichen Zahlen 25
§ 7. Zahlensysteme 30
§ 8. Dezimalzahlen 33
§ 9. Unvollständige Dezimalzahlen 36

Zweiter Abschnitt. Die Operationen dritter Stufe.

§ 10. Das Potenzieren 42
§ 11. Begriff der Wurzel. Dritte Erweiterung des Zahlbegriffs. Irrationale Zahlen . . 47
§ 12. Das Radizieren 50
§ 13. Vierte Erweiterung des Zahlbegriffs. Imaginäre und komplexe Zahlen 55
§ 14. Das Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel 62
§ 15. Das Logarithmieren 67
§ 16. Die Logarithmen als Rechenhilfsmittel 71

II. Teil. Die Gleichungen.

Dritter Abschnitt.

Allgemeines über Gleichungen. Gleichungen ersten und zweiten Grades.

§ 17. Einteilung und Umformung der Gleichungen 78
§ 18. Lineare Gleichungen 84
§ 19. Aufgaben, die auf lineare Gleichungen führen 88
§ 20. Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten 92
§ 21. Gleichungen höheren Grades, die sich auf quadratische zurückführen lassen . . . 96
§ 22. Quadratische Systeme 99
§ 23. Diophantische Gleichungen 106

Vierter Abschnitt. Gleichung höheren Grades.

§ 24. Kubische Gleichungen 112
§ 25. Biquadratische Gleichungen 118
§ 26. Gleichungen höheren Grades 122
§ 27. Maxima und Minima 128

III. Teil. Niedere Analysis.

Fünfter Abschnitt. Kombinatorik.

§ 28. Grundbegriffe. Permutationen 135
§ 29. Kombinationen und Variationen 140
§ 30. Wahrscheinlichkeitsrechnung 143
§ 31. Der binomische Lehrsatz 150

Sechster Abschnitt. Die Reihen.

§ 32. Die arithmetische Reihe 154
§ 33. Die geometrische Reihe 157
§ 34. Zinseszins- und Rentenrechnung 162
§ 35. Arithmetische Reihen höherer Ordnung. Figurierte Zahlen 167
§ 36. Kettenbrüche 172
§ 37. Unendliche Reihen 179

Siebenter Abschnitt. Die Determinanten.

§ 38. Begriff und Haupteigenschaften der Determinanten 188
§ 39. Unterdeterminanten 192
§ 40. Auflösung linearer Systeme 198
§ 41. Addition und Multiplikation von Determinanten 203

Einleitung.

Durch wiederholtes Setzen der Einheit, d. i. durch Zählen, erhält man die Reihe der natürlichen Zahlen:

$$1, 2, 3, 4, 5 \ldots ,$$

die ohne Ende fortschreitet. Der Begriff der natürlichen Zahl ist aus Erfahrung bekannt als Anzahl von Dingen oder Individuen, z. B. 3 Äpfel, 5 Bäume, 10 Personen. Jede folgende Zahl der natürlichen Zahlenreihe ist um die Einheit größer als die vorhergehende.

Zunächst soll die natürliche Zahl kurzweg als Zahl bezeichnet werden.

Durch Verbindung zweier oder mehrerer Zahlen nach bestimmten Gesetzen, d. i. durch Rechnen, lassen sich aus ihnen andre Zahlen ableiten, die zu ihnen in einer vorgeschriebenen Beziehung stehen.

Neben den als bekannt vorausgesetzten bestimmten Zahlzeichen (Ziffern) bedient man sich zur Bezeichnung von Zahlen der Buchstaben. Es geschieht dies, wenn von einem bestimmten Wert der Zahl abgesehen werden, es also gestattet sein soll, sich unter dem gebrauchten Zeichen jede beliebige bestimmte Zahl vorzustellen. Dieser Gebrauch der Buchstaben findet namentlich zu dem Zwecke statt, die allgemeinen Regeln und Gesetze des Rechnens darzustellen, die für alle Zahlen, ohne Rücksicht auf besondere Werte, Geltung haben. Innerhalb derselben Rechnung ist dabei unter demselben Buchstaben dieselbe Zahl zu denken, wenngleich, wie bemerkt, unbestimmt gelassen wird, welches ihr Wert ist.

Die mit Ziffern geschriebenen Zahlen heißen gemeine, die mit Buchstaben bezeichneten allgemeine Zahlen. So unterscheidet man die gemeine Arithmetik (Rechnen, bürgerliches Rechnen) von der allgemeinen Arithmetik (Buchstabenrechnen).

Die Zahl 17, deren Wert bestimmt ist, ist eine gemeine Zahl. Eine Zahl a bedeutet irgend eine Zahl; a und b bedeuten zwei Zahlen, deren Werte beliebig, aber im allgemeinen verschieden anzunehmen sind.

Die allgemeine Arithmetik handelt zunächst von den Gesetzen der einfachsten Verbindungsweisen von Zahlen, der Grundrechnungsarten.

Daß zwei Zahlen a, b einander gleich sind, d. h. dieselbe Anzahl von Einheiten haben, wird durch $a = b$ bezeichnet. Diese Verbindung zweier Zahlen heißt eine Gleichung; die Zahlen a, b heißen die Seiten der Gleichung und das Zeichen $=$ wird gelesen »gleich«. Dagegen bedeutet $a > b$, daß a größer als b, $a < b$, daß a kleiner als b ist.

I. Teil.

Die Operationen der allgemeinen Arithmetik.

Erster Abschnitt.

Die Operationen erster und zweiter Stufe.

§ 1. Die Operationen der ersten Stufe.

1. Um aus zwei Zahlen a, b eine dritte c abzuleiten, kann man sich die Einheiten von b zu den Einheiten von a hinzugefügt, oder mit andern Worten, die Zahl a um b Einheiten wachsend denken. Man sagt in diesem Fall, es solle b zu a addiert werden, nennt diese Rechnungsart (Operation) Addition, schreibt

$$a + b = c$$

und liest dies »a plus b gleich c«. Die Berechnung der neuen Zahl c geschieht dadurch, daß man von der Zahl a aus so lange weiter zählt, bis b Einheiten hinzugefügt sind. Beim Rechnen mit gemeinen Zahlen, das durch die Hilfe des zehnteiligen Zahlensystems alle Additionen auf solche von einziffrigen Zahlen zurückführt, wird dieses Weiterzählen durch die sehr bald erworbene gedächtnismäßige Kenntnis aller vorkommenden Summenwerte ersetzt. Entsprechendes gilt bei den spätern Rechnungsarten. Der Ausdruck $a + b$ heißt die Summe der Zahlen a und b und die neue Zahl c als Resultat der Wert dieser Summe.

Die Aufgabe, den Wert von $a + b$ zu finden, ist hiernach verschieden von der Aufgabe, $b + a$ zu berechnen. In der Aufgabe $3 + 4$ z. B. soll mit der gegebenen Zahl 3 angefangen und um vier Einheiten weiter gezählt werden; in $4 + 3$ dagegen geht man von der Zahl 4 aus und zählt um drei Einheiten weiter. Der Wert der Summe aber ist in beiden Rechnungen nur von den Anzahlen der Einheiten und nicht von der Reihenfolge abhängig, in der sie vereinigt wurden, also in beiden Fällen derselbe. Dieses Grundgesetz der Addition kann durch folgende Gleichung ausgedrückt werden:

$$1) \qquad a + b = b + a \quad .$$

Da also die beiden Zahlen, aus denen die Summe gebildet ist, miteinander vertauscht werden dürfen, ohne daß der Wert der Summe sich ändert, so erhalten die beiden Zahlen den gemeinschaftlichen Namen Summanden.

2. Dem Addieren entgegengesetzt ist die Aufgabe, aus dem Werte c einer Summe und einem ihrer Summanden den andern Summanden zu berechnen. Diese Aufgabe zerfällt in zwei verschiedene, je nachdem der gegebene Summand der erste a oder der zweite b ist.

Die Aufgabe, aus dem Werte c einer Summe und dem ersten Summanden a den zweiten zu berechnen, also aus der Gleichung

$$a + x = c$$

den Wert der unbekannten Zahl x zu suchen, oder die Anzahl der Einheiten zu bestimmen, um die a vermehrt werden muß, damit man c erhalte, wird gelöst, indem man von der Zahl a aus so lange weiter zählt, bis man c erhält, und die Anzahl der zugezählten Einheiten ermittelt.

Die Aufgabe, aus dem Werte c einer Summe und dem zweiten Summanden b den ersten zu berechnen, also aus der Gleichung

$$y + b = c$$

den Wert der unbekannten Zahl y zu suchen, oder die Zahl zu bestimmen, zu der man b Einheiten hinzuzählen muß, damit man c erhalte, wird gelöst, indem man von der Zahl c aus um b Einheiten rückwärts zählt. In diesem Fall läßt man also die Zahl c um den vorausgesetzten frühern Zuwachs wieder abnehmen.

Da aber nach Nr. 1 die Vertauschung der Summanden einer Summe ihren Wert nicht ändert, so kann man jede der beiden Rechnungsarten in die andre verwandeln, ohne daß ihr Resultat ein andres wird.

Aus diesem Grunde erhalten die beiden Umkehrungen der Addition den gemeinsamen Namen Subtraktion und man sagt in beiden Fällen, daß der gegebene Summand von dem gegebenen Wert der Summe subtrahiert werden solle. Den Wert der Summe nennt man den Minuenden, den gegebenen Summanden den Subtrahenden. Daß a von c subtrahiert werden soll und b gibt schreibt man

$$b = c - a \quad .$$

Man liest diesen Ausdruck »c minus a« und nennt ihn die Differenz der Zahlen c und a.

Minuend und Subtrahend einer Differenz, sowie die Summanden einer Summe werden auch mit dem gemeinschaftlichen Namen Glieder der Differenz oder Summe bezeichnet. Die Glieder einer Differenz können nicht, wie die der Summe, miteinander vertauscht werden, oder es ist $a - b$ nicht gleich $b - a$. Daher haben auch die Glieder einer Differenz keine gemeinsame Bezeichnung.

Daß jede der beiden, an sich verschiedenen Arten der Subtraktion auch dann ein richtiges Resultat gibt, wenn sie nach der Weise der andern behandelt wird, hat dahin geführt, daß im praktischen Rechenunterricht gewöhnlich nur eine jener Arten gelehrt und geübt wird, und zwar meist die durch Rückwärtszählen. Die in den österreichischen Schulen gebräuchliche andre Art verdient jedoch aus einem bei der Division zu erwähnenden praktischen Grunde den Vorzug, und es ist daher ihr Gebrauch zu empfehlen. Folgendes Beispiel wird dazu hinreichende Anleitung geben: Bei der Aufgabe 58379 — 19297 rechne man: 7 plus 2 gibt 9, also ist die letzte Ziffer des Resultats **2**; 9 plus 8 ist 17, also ist die nächste Resultatziffer **8**; da aber die Summe nicht 7, sondern 17 war, so wird die 1 zur nächsten Ziffer 2 des Subtrahenden addiert, und man rechnet also weiter $3 + \mathbf{0} = 3$, dann ebenso $9 + \mathbf{9} = 18$, $2 + \mathbf{8} = 5$. Bei diesem Verfahren fällt auch das sogenannte »Borgen« weg. Der praktische Rechner gewöhne sich übrigens auch daran, daß er bei dem Addieren und Subtrahieren nicht nötig habe, die beiden Zahlen unmittelbar untereinander zu schreiben.

Die Definition des Wertes einer Differenz kann nunmehr dahin ausgesprochen werden, daß er die Zahl sei, die, zum Subtrahenden addiert, den Minuenden gibt und diese Erklärung läßt sich in der Formel

$$2) \qquad (c - a) + a = c$$

darstellen. Auch die folgenden Formeln, die den Gegensatz zwischen Addition und Subtraktion in andern Formen darstellen, ergeben sich unmittelbar aus der vorstehenden Definition:

$$3) \qquad (a + b) - b = a \quad ,$$

$$4) \qquad c - (c - b) = b$$

In diesen Formeln, die sich leicht in Form von Rechenregeln in Worte übersetzen lassen, haben die Klammern ( ) die Bedeutung, daß die in ihnen eingeschlossenen Ausdrücke als zuerst ausgerechnet, an ihrer Stelle also die

Resultate der Rechnungen gesetzt gedacht werden sollen. Überhaupt werden oft statt des Wertes einer Summe $a + b$ oder einer Differenz $a - b$, wenn die Berechnung nicht wirklich ausgeführt werden kann, diese Ausdrücke selbst in Klammern eingeschlossen, oder auch ohne diese gesetzt, sofern die Bedeutung aus dem Zusammenhang hervorgeht und kein Mißverständnis möglich ist. Ebenso werden unter gleicher Voraussetzung auch die Namen Summe und Differenz statt Wert der Summe und Wert der Differenz gebraucht.

3. Sollen drei oder mehr Zahlen durch Addition oder Subtraktion verbunden werden, so kann dies nur in der Weise geschehen, daß man zunächst zwei miteinander verbindet und das Resultat an Stelle dieser beiden Zahlen setzt, darauf in dem nun vorliegenden, ein Glied weniger enthaltenden Ausdruck wieder zwei seiner Glieder vereinigt und so fortfährt, bis man zu einer einzigen Zahl, dem Gesamtresultat, gelangt.

Diese successive Berechnung kann in verschiedenen Reihenfolgen geschehen, und man erhält dabei nicht notwendig immer dasselbe Resultat. Daher muß die Reihenfolge, die im einzelnen Fall verlangt ist, angegeben werden und dies geschieht wieder durch Klammern. So ist z. B.

$$9 - [(4 + 3) - 1] = 9 - [7 - 1] = 9 - 6 = 3 \quad ,$$
$$(9 - 4) + (3 - 1) = 5 + 2 = 7 \quad ,$$
$$[9 - (4 + 3)] - 1 = [9 - 7] - 1 = 2 - 1 = 1 \quad ,$$
$$[(9 - 4) + 3] - 1 = [5 + 3] - 1 = 8 - 1 = 7 \quad .$$

Um jedoch eine Häufung der Klammern zu vermeiden, ist man übereingekommen, diese wegzulassen, wenn die verlangte Reihenfolge dieselbe ist, wie die, in der die einzelnen Glieder in dem geschriebenen Ausdruck aufeinander folgen. Wo also Klammern fehlen, ist immer die Reihenfolge zu wählen, die zugleich die der Schrift ist.

Hiernach können z. B. in dem letzten Zahlenbeispiel alle Klammern weggelassen werden. Dagegen ist in dem ersten Beispiel nur die runde Klammer, in dem zweiten Fall die erste der beiden Klammern und in dem dritten die eckige wegzulassen. Ebenso ist z. B.

$$5 + 3 - 2 + 4 - 1 \quad ,$$

wie folgt, auszurechnen:

$$5 + 3 = 8 ; \quad 8 - 2 = 6 ; \quad 6 + 4 = 10 ; \quad 10 - 1 = 9 \quad .$$

Dagegen ist in

$$8 + [5 - (3 + 1)] = 8 + (5 - 4) = 9$$

keine Klammer entbehrlich.

Es entsteht nun die Frage, ob und in welcher Weise sich die Reihenfolge bei derartigen Rechnungen verändern läßt, ohne daß eine Änderung des Resultats eintritt. Wir untersuchen zunächst, welche Änderung der Wert einer Summe oder Differenz erfährt, wenn man ein einzelnes Glied als veränderlich betrachtet und es um irgend eine Zahl zu- oder abnehmen läßt. Aus den Begriffen der Summe und der Differenz ergibt sich, daß jede Veränderung eines einzelnen Summanden durch Addition oder Subtraktion einer dritten Zahl die gleiche Veränderung im Wert der Summe hervorbringt und daß dasselbe der Fall ist bei einer Differenz und ihrem Minuenden. Wird dagegen eine solche Veränderung am Subtrahenden vorgenommen, so erfährt die Differenz die entgegengesetzte Veränderung, d. h. ihr Wert wird kleiner, wenn der Subtrahend größer wird und umgekehrt. Es folgt dies daraus, daß nach erfolgter Vergrößerung des einen Summanden der andre um ebensoviel Einheiten verkleinert werden muß, wenn

der Wert der Summe unverändert bleiben soll. — Man erhält so vier einzelne Rechenregeln, die in folgenden Formeln ausgesprochen sind:

$$5)\quad \begin{cases} a+b+c=a+c+b=a+(b+c) \\ a+b-c=a-c+b=a+(b-c) \\ a-b+c=a+c-b=a-(b-c) \\ a-b-c=a-c-b=a-(b+c) \end{cases} ..$$

Daher ist auch umgekehrt:

$$6)\quad \begin{cases} a+(b+c)=a+b+c=a+c+b \\ a-(b+c)=a-b-c=a-c-b \\ a+(b-c)=a+b-c=a-c+b \\ a-(b-c)=a-b+c=a+c-b \end{cases} .$$

Man kann diese acht Formeln auch, wie folgt, zusammenstellen und in Worten aussprechen, sowie auf mehrgliedrige Ausdrücke erweitern:

Sollen mehrere Zahlen nacheinander addiert oder subtrahiert werden, so kann dies in beliebiger Reihenfolge geschehen.

Statt mehrere Zahlen nacheinander zu addieren, kann man ihre Summe auf einmal addieren, und statt mehrere Zahlen nacheinander zu subtrahieren, kann man ihre Summe auf einmal subtrahieren.

Soll eine Zahl b addiert und eine andre c subtrahiert werden, so kann man statt dessen $b-c$ addieren oder $c-b$ subtrahieren.

Statt eine Summe oder eine Differenz zu addieren oder zu subtrahieren, kann man dieselbe Rechnung mit jedem einzelnen Summanden und mit dem Minuenden, dagegen mit dem Subtrahenden die entgegengesetzte vornehmen.

Mit Hilfe der vorstehenden Regeln läßt sich nun in jedem zusammengesetzten Ausdruck der erwähnten Art die Reihenfolge der Rechnungen so gestalten, daß nach dem getroffenen Übereinkommen alle Klammern weggelassen werden können. Man nennt dies das Auflösen der Klammern.

So erhält man z. B.:

$$8+[5-(3+1)]=8+5-(3+1)=8+5-3-1=9 \quad ;$$
$$a-[(b+c)-(d-e)]=a-(b+c)+(d-e)=a-b-c+d-e \quad .$$

§ 2. Erste Erweiterung des Zahlbegriffs. Null und negative Zahlen.

1. Die Addition einer Zahl zu einer andern ist stets möglich, welche Werte die beiden Summanden auch haben mögen, da die natürliche Zahlenreihe unendlich fortschreitet. Solange man bei der Differenz $c-a$ voraussetzt, daß sie aus einer wirklich ausgeführten Additionsaufgabe durch Umkehrung hervorgegangen sei, muß auch die Subtraktion stets zu einem Resultat aus der natürlichen Zahlenreihe zurückführen. Setzt man dagegen für c und a willkürlich bestimmte Zahlenwerte, so fragt es sich, ob die Aufgabe, $c-a$ zu berechnen, notwendig eine Auflösung haben müsse. Man findet nun, daß hier die drei Fälle zu unterscheiden sind, in denen c größer, ebenso groß oder kleiner als a ist, und daß nur in dem ersten Fall die Auflösung in dem bisherigen Sinne möglich ist. Die beiden andern Fälle führen auf eine Erweiterung des Zahlbegriffs, durch die sie ebenfalls eine Bedeutung erhalten.

Ist $c=a$, so werden, wenn man von c aus um a Einheiten rückwärts zählt, sämtliche vorhandene Einheiten weggenommen, so daß auch nicht eine übrig bleibt. Man bezeichnet dieses Resultat durch 0 (Null). Die Null ist hiernach

nicht etwa eine Bezeichnung für Nichts, sondern sie enthält noch die Bezugnahme auf die Einheit, die der Rechnung zu Grunde liegt, indem sie das Dasein einer solchen verneint. Sie schließt sich daher der natürlichen Zahlenreihe vor der 1 an.

Ist ferner $c < a$, und zählt man von c aus rückwärts, so bleiben, nachdem sämtliche vorhandene Einheiten weggenommen sind, noch so viele Einheiten zum weitern Rückwärtszählen übrig, als a mehr enthält wie c, d. h. $a - c$. Um ein solches weiteres Rückwärtszählen möglich zu machen, müßte die Reihe der natürlichen Zahlen über die Null hinaus nach rückwärts erweitert werden, es müßten sich also Zahlen angeben lassen, die kleiner als Null wären. Daß dies nun in der Tat denkbar ist, soll zunächst durch ein Beispiel erläutert werden:

Geht jemand um c Schritte in einer bestimmten Richtung vorwärts und darauf wieder um a Schritte rückwärts, so ist er im ganzen um $c - a$ Schritte in jener Richtung nach vorwärts gelangt. Hierbei ist zunächst $c > a$ gedacht. Ist $c = a$, so gelangt er auf seinen Ausgangspunkt zurück, und es ist $c - a = a - a = 0$ zu setzen. Ist aber $c < a$, so kommt er nach einem Orte, der von dem Anfangspunkte nach der entgegengesetzten Richtung liegt, und zwar ist er dann um $a - c$ Schritte nach dieser vom Anfangspunkte entfernt.

Allgemeiner kann man sich die natürliche Zahlenreihe unter dem Bilde einer Reihe von Punkten vorstellen, die von einem mit 0 bezeichneten Anfangspunkt aus nach derselben Richtung, also in gerader Linie, so liegen, daß je zwei benachbarte voneinander gleich weit entfernt sind. Die einzelnen Zahlen geben dann die Abstände der Punkte vom Anfangspunkt an. Man sieht nun ein, daß man in diesem Falle bei dem Rückwärtszählen von irgend einer Zahl aus in der Tat noch über die Null hinausgehen kann, indem man dann zu Punkten gelangt, die auf derselben Geraden, aber nach der entgegengesetzten Richtung vom Anfangspunkte aus liegen. Man sieht zugleich, daß sich in dieser Weise die natürliche Zahlenreihe nach rückwärts unendlich erweitern und daß sich diese Erweiterung unter dem Bilde einer der ursprünglichen gleichen, aber nach der entgegengesetzten Richtung fortschreitenden Punktreihe versinnlichen läßt.

Weitere Beispiele einer Fortsetzung der Zahlenreihe unterhalb der Null liefern die Grade der Thermometerskalen über und unter der Temperatur Null, nördliche und südliche geographische Breite, Drehung des Schenkels eines Winkels in oder entgegengesetzt dem Sinne der Uhrzeiger, zukünftige und vergangene Zeit, Gewinn und Verlust u. dgl. m. In allen diesen Fällen ist die Null nicht der absolute Anfangspunkt der Zählung, sondern erscheint als die Mitte zweier einander entgegengesetzter Zahlenreihen.

Die hiernach denkbaren Zahlen, die kleiner als Null sind, nennt man negative Zahlen, und im Gegensatz dazu die natürlichen Zahlen, die größer als Null sind, positive Zahlen. Bei dem Schreiben unterscheidet man beide Arten durch das Vorzeichen + (plus) vor die positiven, des Vorzeichens — (minus) vor die negativen. Diese Zeichen sind als Vorzeichen von den ihnen entsprechenden Rechnungszeichen der Addition und Subtraktion zu unterscheiden. Wo eine Verwechslung möglich ist, schließt man sie mit dem zugehörigen Zahlzeichen in eine Klammer ein, z. B. $(+7)$ und (-4).

Die Zahlenreihe ist nunmehr:

$$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \ldots ,$$

und die Differenz $c - a$, in der der Minuend kleiner als der Subtrahend ist, erhält hiernach die Bedeutung einer negativen Zahl, und zwar ist diese gleich $-(a - c)$.

In praktischen Aufgaben haben negative Zahlen als Resultate nur dann Geltung, wenn ein solcher Gegensatz in der Richtung des Zählens, wie in den obigen Beispielen, wirklich existiert, die Null also nicht der absolute Anfangspunkt des Zählens ist. In der Forderung z. B., die Anzahl der Personen zu bestimmen,

die in einem Hause zurückbleiben, wenn von c überhaupt Anwesenden a hinausgehen, gibt ein negativer Wert des Resultats $c - a$ die Unmöglichkeit der Auflösung an. Aber er hat auch in diesem Fall noch einen weitern Sinn: er zeigt nicht bloß einen Widerspruch in der Aufgabe, sondern gibt auch die Anzahl der Personen an, die zu den vorher Anwesenden mindestens hinzutreten müßten, damit die Auflösung der Aufgabe möglich werde, also die Anzahl der zur Hebung des Widerspruchs fehlenden Personen.

Die positiven Zahlen sind diejenigen, die als ursprünglich gegeben angesehen werden, die negativen diejenigen, die als Gegensatz zu diesen auftreten. An sich kann also jede der beiden Hälften der Zahlenreihe als die positive gelten; die andre wird dann durch den Gegensatz zu ihr die negative.

So sind z. B. in der Frage, welche Temperatur ein Thermometer gezeigt habe, nachdem es von $+8^0$ um 10^0 gefallen sei, die Grade über Null als die positiven aufgefaßt, und das Resultat ist -2^0, d. h. 2^0 unter Null. Fragt man dagegen, wieviel Grad unter Null ein Thermometer zeige, das auf -8^0 gestanden habe und darauf um 10^0 gestiegen sei, so wird die Antwort darauf lauten dürfen: -2^0 unter Null, d. i. dann 2^0 über Null.

Existiert unter den Zahlen einer Rechnung der angegebene Gegensatz der Richtungen nicht, oder kommt er nicht in Betracht, ist also auch seine Angabe durch Vorzeichen unterlassen, so heißen die Zahlen absolute. Dagegen werden Zahlen, die mit Vorzeichen versehen sind, relative oder algebraische genannt. Eine algebraische Zahl hat einen absoluten Wert und ein Vorzeichen.

Treten in einer mit absoluten Zahlen operierenden Rechnung zu diesen ihnen entgegengesetzte Zahlen hinzu, wird also der Gegensatz der Richtungen in die Rechnung eingeführt, so erhalten die ersten zufolge des vorstehend Gesagten das Vorzeichen $+$. In diesem Sinne kann man sagen, daß jeder absoluten Zahl das Vorzeichen $+$ gegeben werden könne.

2. Die Erweiterung des ursprünglichen Zahlbegriffs durch die Null und die negativen Zahlen macht auch eine Erweiterung der früheren Erklärungen der Addition und Subtraktion für diese notwendig. Es ergibt sich leicht durch eine entsprechende Wiederholung des Gedankengangs in § 1, daß jene früheren Erklärungen und damit auch die aus ihnen abgeleiteten Gesetze und Formeln im wesentlichen unverändert auf die neuen Zahlformen übertragen werden können. Im einzelnen ist hierüber folgendes zu erwähnen:

In Betreff der Null ergibt sich unmittelbar aus ihrem Begriff, daß durch Addition von Null zu einer Zahl der Wert der Zahl nicht geändert wird. Die Gleichung

$$a + 0 = a$$

könnte in gleicher Weise, wie oben $a - a = 0$, als Definition der Null in Worte gefaßt werden. Ebenso folgt aus dem Begriff der Null leicht, daß auch

$$0 + a = a,\ a + 0 = 0 + a,\ a - 0 = a$$

ist. Dagegen führt die Subtraktion einer Zahl von Null in die jener Zahl entgegengesetzte Hälfte der Zahlenreihe, oder es ist

ist. Dagegen führt die Subtraktion einer Zahl von Null in die jener Zahl entgegengesetzte Hälfte der Zahlenreihe, oder es ist

$$0 - a = -a\ .$$

Insbesondere ist auch $0 + 0 = 0 - 0 = 0$.

Die Bezeichnungen $+a$ und $-a$ sind aus $0 + a$ und $0 - a$ entstanden.

In Betreff der negativen Zahlen ergibt sich aus dem Gegensatz, in dem sie zu den positiven stehen, daß eine Zahl der einen Art durch Hinzufügung einer solchen der andern Art um die entsprechende Anzahl ihrer Einheiten verkleinert, durch Hinwegnahme einer solchen entsprechend vergrößert wird, und daß Zahlen

beider Arten mit gleich großen Gliedern bei ihrer Addition einander aufheben. Man kann, mit andern Worten, zu einer gegebenen Einheit sich eine entgegengesetzte Einheit denken, die zu der ersten hinzugefügt, diese aufhebt, so daß also $(+1)+(-1)=0$ ist. Bezeichnen wir nun die eine dieser Einheiten als die positive, die andere als die negative, so kann man sich die negativen Zahlen in gleicher Weise durch Zusammenfassen bestimmter Anzahlen aus der negativen Einheit, wie die positiven aus der positiven Einheit entstanden denken. Zwei Zahlen von beiden Arten, die gleiche Anzahlen der betreffenden Einheiten enthalten, sollen entgegengesetzt gleich genannt werden; ihre Summe ist gleich Null.

Haben zwei zu addierende Zahlen dasselbe Vorzeichen, so ist die Addition ein Weiterzählen in derselben Richtung der Zahlenreihe, daher ist

$$(+a)+(+b)=+(a+b)$$
$$(-a)+(-b)=-(a+b)\ .$$

Haben dagegen die Summanden verschiedene Vorzeichen, so bewirkt die Addition dasselbe Resultat, wie ein Weiterzählen in der entgegengesetzten Richtung; die Addition einer Anzahl von Einheiten entgegengesetzter Art mit denen des andern Summanden kann also durch Subtraktion der gleichen Anzahl von Einheiten derselben Art ausgeführt werden. Diese Betrachtung führt zu den Regeln:

$$(+a)+(-b)=+(a-b)=-(b-a)$$
$$(-a)+(+b)=-(a-b)=+(b-a)\ .$$

Für die Addition algebraischer Zahlen besteht also die Regel: Haben die Summanden gleiche Vorzeichen, so addiert man ihre absoluten Werte und gibt der Summe das gemeinschaftliche Vorzeichen. Haben die Summanden verschiedene Vorzeichen, so subtrahiert man ihre absoluten Werte und gibt der Differenz das Vorzeichen, das der Minuend hatte.

Bei bestimmten Zahlwerten der Summanden wird man im zweiten Fall das Glied desjenigen zum Minuenden nehmen, der die größere Anzahl von Einheiten hat; man subtrahiert also in diesem Fall das kleinere Glied vom größeren und gibt der Differenz das Vorzeichen des größeren.

So ist z. B.

$$(+7)+(+3)=+10;\quad (-7)+(-3)=-10\ ;$$

dagegen

$$(+7)+(-3)=+4;\quad (-7)+(+3)=-4\ .$$

Für die Subtraktion algebraischer Zahlen ergeben sich aus dem früher aufgestellten Begriff der Subtraktion oder durch Umkehrung der vorstehenden für die Addition die einzelnen Regeln. Man faßt diese jedoch am kürzesten dahin zusammen, daß sich jede Subtraktion einer algebraischen Zahl ohne Änderung des Resultats in die Addition der ihr entgegengesetzt gleichen Zahl verwandeln läßt.

Um also eine algebraische Zahl zu subtrahieren, ändre man das Vorzeichen des Subtrahenden und addiere darauf.

So ist z. B.

$$(+7)-(+3)=(+7)+(-3)=+4\ ,$$
$$(+7)-(-3)=(+7)+(+3)=+10\ ,$$
$$(-7)-(+3)=(-7)+(-3)=-10\ ,$$
$$(-7)-(-3)=(-7)+(+3)=-4\ .$$

3. Sollen drei oder mehr Zahlen durch Addition und Subtraktion miteinander verbunden werden, so müssen sie entweder sämtlich algebraische oder sämtlich absolute Zahlen sein. Da im ersten Fall dieselben Rechnungsregeln gültig bleiben, die in § 1 Nr. 3 für den zweiten abgeleitet wurden, so können auch bei einer Verbindung beliebig vieler algebraischer Zahlen durch Addition und Subtraktion die Klammern, welche die Reihenfolge der Operationen angeben, aufgelöst werden. Man kann aber in diesem Fall jede vorkommende Subtraktion in eine Addition der entgegengesetzt gleichen Größe, und somit jeden solchen zusammengesetzten Ausdruck in eine Summe algebraischer Größen verwandeln. Eine solche heißt eine algebraische Summe, im Gegensatz zu einer arithmetischen, deren Summanden absolute Zahlen sind. Dagegen heißt jede Verbindung absoluter Zahlen durch Addition und Subtraktion ein Polynom (Binom, Trinom u. s. w., je nach der Anzahl der Glieder) oder ein Aggregat.

Da man nun jeder absoluten Zahl bei Einführung des Gegensatzes der Richtungen das Vorzeichen + geben kann, so läßt sich auch jedes Polynom nach dem vorigen in eine algebraische Summe verwandeln.

So verwandelt man z. B. das Polynom

$$a - b - c + d + e - f$$

zunächst in

$$(+a) - (+b) - (+c) + (+d) + (+e) - (+f) \quad ,$$

und darauf diesen Ausdruck in die algebraische Summe

$$(+a) + (-b) + (-c) + (+d) + (+e) + (-f) \quad .$$

Man ist nun übereingekommen, bei einer solchen algebraischen Summe die Additionszeichen +, sofern kein Mißverständnis stattfinden kann, und mit ihnen dann auch die entbehrlich gewordenen Klammern um die einzelnen Summanden, sowie das Vorzeichen des ersten Summanden, falls es + ist, wegzulassen. Man schreibt also die obige algebraische Summe kürzer

$$a - b - c + d + e - f \quad .$$

In dieser Form ist sie äußerlich von dem Polynom, aus dem sie entstanden ist, nicht verschieden; der innere Unterschied liegt in dem Vorbehalt, daß die einzelnen Zeichen nicht, wie oben der Fall war, Rechnungszeichen der Addition und Subtraktion, sondern Vorzeichen der betreffenden Glieder sein und daß die so entstandenen algebraischen Zahlen sämtlich addiert werden sollen.

Es folgt aber hieraus, da dieses Verfahren allgemein anwendbar ist, der Satz, daß jedes Polynom als eine algebraische Summe angesehen werden darf, indem man die Rechnungszeichen zu Vorzeichen macht, dem ersten Gliede noch das Vorzeichen + gibt und dann alle Glieder addiert.

Da nun die Summanden einer Summe in beliebiger Reihenfolge addiert werden dürfen, so kann nunmehr, unter Berücksichtigung der vorstehend entwickelten Gesetze, auch jedes beliebige Polynom in jeder zweckdienlichen Reihenfolge der einzelnen Größen berechnet werden.

Aus dem vorstehenden folgt ferner unter Hinzuziehung der Regeln 6) in § 1 Nr. 3:

Eine algebraische Summe kann addiert werden, indem man ihre einzelnen Summanden in beliebiger Reihenfolge und mit unveränderten Vorzeichen hinschreibt, und

eine algebraische Summe kann subtrahiert werden, indem man ihre einzelnen Summanden in beliebiger Reihenfolge und mit entgegengesetzten Vorzeichen hinschreibt.

Hiernach ergibt sich die praktische Rechnungsregel: Steht vor einer Klammer +, so kann man sie ohne Veränderung der Vorzeichen weglassen; steht vor

einer Klammer —, so müssen vor dem Weglassen der Klammer alle Vorzeichen der einzelnen Glieder in ihr in die entgegengesetzten verwandelt werden. Nachdem so alle Klammern entfernt sind, addiert und subtrahiert man die einzelnen Glieder in beliebiger zweckdienlicher Reihenfolge, indem man die Vorzeichen als Operationszeichen behandelt.

§ 3. Die Operationen zweiter Stufe.

1. Sind die Summanden einer Summe einander gleich, so heißt die Summe ein Produkt. Die Anzahl der Summanden heißt der Multiplikator, ein einzelner Summand der Multiplikand. Man schreibt ein Produkt, indem man den Multiplikand und den Multiplikator durch das Zeichen $\times$ oder $\cdot$, gelesen »mal«, miteinander verbindet, z. B.

$$a + a + a = a \cdot 3; \quad a + a + a + a + \ldots = a \cdot b \quad .$$

Die Berechnung des Wertes eines Produkts nennt man Multiplizieren.

Bei Buchstabenausdrücken kann man auch, sofern ein Mißverständnis nicht möglich ist, das Multiplikationszeichen $\times$ oder $\cdot$ weglassen und statt $a \cdot b$ kürzer ab, sowie statt $3 \cdot a$, $3a$ schreiben.

Zerlegt man den Multiplikanden des Produkts ab in seine Einheiten, so kann man die ab Einheiten nach folgendem Schema ordnen:

$$\begin{array}{r} \overset{a}{1 + 1 + 1 + 1 + \ldots} \\ +1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \\ +1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \\ + \ldots \\ b) \ldots \end{array}$$

Da nun der Wert des Produkts bloß von der Gesamtzahl der Einheiten abhängig ist, so kann man auch die je b Einheiten einer Vertikalkolonne zu einer Zahl zusammenfassen, und hat sodann diese Zahl b im ganzen a mal als Summand. Somit ist

$$1) \qquad a \cdot b = b \cdot a$$

Da nach diesem Grundgesetz der Multiplikation Multiplikator und Multiplikand eines Produkts vertauscht werden dürfen, so erhalten beide den gemeinschaftlichen Namen Faktoren.

Ist ein Faktor eine gemeine Zahl, so heißt er auch Koeffizient und wird vor die allgemeine Zahl gesetzt; z. B. in $7x$ ist 7 der Koeffizient von x und das Produkt bedeutet eine Summe von 7 gleichen Summanden x.

2. Wie aus der Addition die Subtraktion, so entsteht auch aus der Multiplikation durch Umkehrung eine neue Rechnungsart. Auch hier stehen der Bildung des Produkts $a \cdot b = c$ zunächst zwei Umkehrungen gegenüber, da zu dem Werte c des Produkts entweder der Multiplikator oder der Multiplikand als gegebener Faktor hinzutreten kann. Zufolge des Gesetzes $ab = ba$ können aber auch hier die beiden Umkehrungen in der Ausführung in derselben Weise behandelt werden und deshalb erhalten sie den gemeinsamen Namen Division. Dividieren heißt also zu dem gegebenen Werte eines Produkts und dem einen Faktor den andern Faktor suchen. Den gegebenen Wert c des Produkts nennt man den Dividend, den gegebenen Faktor a den Divisor. Daß »c durch a dividiert« werden soll, bezeichnet man durch $c : a$ oder $\frac{c}{a}$ und nennt das Resultat den Quotienten. Der Wert des Quotienten ist also der gesuchte Faktor.

Da man bei Buchstabenausdrücken häufig eine Ausrechnung des Wertes des Quotienten nicht ausführen kann, so setzt man in solchen Fällen statt dieses Wertes den Quotienten selbst, sofern eine Verwechslung nicht möglich ist. Auch gebraucht man die Namen Produkt und Quotient der Kürze wegen statt Wert des Produkts oder des Quotienten, sofern die Bedeutung aus dem Zusammenhang klar hervorgeht.

Die beiden Arten der Division dürfen nach dem obigen wohl in der Ausführung, keineswegs aber dem Begriffe nach verwechselt werden. Infolge des Unterschieds zwischen Multiplikator und Multiplikand tritt auch der Unterschied der beiden Divisionen schärfer hervor als derjenige der beiden Subtraktionen. Ist z. B. zu dem Produkte $5 \cdot 3 = 15$ der Multiplikand gegeben, so wird gefragt, wie oft ist 5 in 15 enthalten? Ist dagegen der Multiplikator gegeben, so wird gefragt, wieviel beträgt der dritte Teil von 15? Die erste Art der Division kann man als Messen bezeichnen; der Quotient heißt das Verhältnis des Dividenden zum Divisor. Diese Division läßt sich ausführen durch wiederholtes Subtrahieren des Divisors vom Dividenden und Abzählen der Anzahl der möglichen Subtraktionen. Die zweite Art der Division dagegen kann Teilen, der Quotient derselben ein Teil genannt werden. Hier ist nicht eine gegebene Zahl so oft als möglich zu subtrahieren, sondern es ist umgekehrt zu der gegebenen Anzahl der Subtraktionen die Zahl zu suchen, die so oft subtrahiert werden kann.

Die Definition des Wertes eines Quotienten kann für beide Fälle dahin ausgesprochen werden, daß er die Zahl bedeutet, deren Produkt mit dem Divisor gleich dem Dividenden ist. Diese Erklärung läßt sich in der Formel

$$2) \qquad \frac{a}{b} \cdot b = a$$

darstellen. Auch die folgenden Formeln, die den Gegensatz zwischen Division und Multiplikation in andern Formen ausdrücken, ergeben sich unmittelbar aus dieser Erklärung:

$$3) \qquad \frac{a \cdot b}{b} = a$$

$$4) \qquad a : \frac{a}{b} = b \quad .$$

In der gemeinen Arithmetik bedient man sich zur Ausführung der Division in der Regel des Verfahrens bei der oben zuerst genannten Art, d. h. einer mehrfachen Subtraktion, während der Name Division eher von der zweiten Art, dem Teilen, gebildet ist. Bei jener praktischen Ausführung erweist sich das früher (§ 1 Nr. 2) erwähnte Verfahren der Subtraktion als besonders zweckmäßig, da man auch bei mehrziffrigen Zahlen nicht nötig hat, die Teilprodukte, sondern nur die jedesmaligen Reste hinzuschreiben. Folgendes Beispiel möge dies näher erläutern: Es sei 59858 : 173 zu berechnen. Der erste Teilquotient 3 wird mit 173 multipliziert und sogleich von 598 subtrahiert, indem man rechnet: $3 \cdot 3 = 9$; $9 + 9 = 18$; $3 \cdot 7 - 21$, dazu die 1 von der vorigen 18 addiert, gibt 22; $2 + 7 = 9$; endlich $3 \cdot 1 = 3$, dazu die 2 von den 22 addiert, gibt 5, $5 + 0 = 5$; also ist der erste Rest 79. In dieser Weise wird fortgefahren, so daß die ganze Ausrechnung nur folgende geschriebene Ziffern enthält:

$$\begin{array}{l} 59858 : 173 = 346 \\ \quad 795 \\ \quad 1038 \end{array}$$

Bei dieser Gelegenheit mag noch darauf hingewiesen werden, daß auch bei dem Multiplizieren mehrziffriger ganzer Zahlen die im gewöhnlichen Unterricht

gelehrte Form nicht immer die praktisch bequemste ist. Man gewöhne sich, die Faktoren nicht unter, sondern nebeneinander zu schreiben und mit der höchsten Ziffer des Multiplikators zu beginnen, so daß die Teilprodukte nach rechts statt nach links eingerückt werden, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$\begin{array}{r} 3295 \cdot 742 \\ \hline 23065 \\ 13180 \\ 6590 \\ \hline 2444890 \end{array}$$

Der Vorteil dieser Schreibweise ergibt sich später bei der sogenannten abgekürzten Multiplikation.

§ 4. Zweite Erweiterung des Zahlbegriffs. Gebrochene Zahlen.

1. Wie bei der Subtraktion, so entsteht auch bei der Division die Frage, ob sie auch dann immer ausführbar ist, wenn die Werte des Dividenden und des Divisors nicht durch Umkehrung einer wirklich ausgeführten Multiplikation entstanden sind, sondern wenn für diese willkürlich bestimmte Zahlen gesetzt wurden. Auch hier lassen sich drei Fälle unterscheiden:

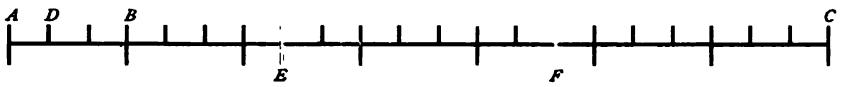
In dem ersten ist der Dividend a des Quotienten $a : b$ ein Vielfaches des Divisors b, d. h. er kann aus b durch wiederholtes Setzen des Divisors als Summand abgeleitet werden. In diesem Falle ist die Division im bisherigen Sinne ausführbar und führt auf einen bestimmten Wert des Quotienten.

Im zweiten Fall ist $a = b$. Nach der Erklärung der Multiplikation ist $1 \cdot a = 1 + 1 + 1 + \ldots = a$ zu setzen, dagegen hat $a \cdot 1$ als eine Summe mit nur einem Summanden keinen Sinn. Es kann jedoch auch dem Ausdruck $a \cdot 1$ eine Bedeutung beigelegt werden, und diese kann konsequenterweise nur die sein, daß die Zahl a einmal gesetzt werden soll, ohne daß ihr ein Summand zugefügt wird, so daß also $a \cdot 1 = a$ ist und somit auch hier der Satz $a \cdot 1 = 1 \cdot a$ besteht. Da nämlich der Wert von $a \cdot b$ sich jedesmal um die Zahl a vermindert, wenn der Multiplikator um 1 abnimmt, so daß $a \cdot 3 = a \cdot 4 - a$, $a \cdot 2 = a \cdot 3 - a$ ist, so muß dem Produkte $a \cdot 1$ ebenfalls ein um a kleinerer Wert als dem Produkte $a \cdot 2$ beigelegt werden. Die Aufgabe, den Wert des Quotienten $a : a$ zu bestimmen, also die Zahl zu suchen, deren Produkt mit a gleich a ist, muß hiernach umgekehrt zu dem Resultate 1 führen. Es läßt sich hiernach dieser Fall dem vorher erwähnten ersten anschließen.

Anders verhält es sich im dritten Fall. Es ist nämlich auch möglich, daß der Dividend nicht aus dem Divisor durch Multiplikation mit einer den bisher bekannten Arten angehörigen Zahl abgeleitet werden kann, daß also a kein Vielfaches von b ist. In diesem Fall muß, nachdem man b so oft als möglich von a subtrahiert hat, ein Rest übrig bleiben, der kleiner als b ist. So ist z. B. die Divisionsaufgabe $7 : 3$ in dem bisherigen Sinne nicht ausführbar, denn es gibt kein Produkt von 3 mit einer der bisher bekannten Zahlen, dessen Wert gleich 7 wäre, und bei dem Versuche, die Division durch wiederholte Subtraktion des Divisors auszuführen, bleibt hier nach zweimaliger Subtraktion der Rest 1.

Es führt aber dieser Fall auf eine neue Erweiterung des Zahlenbegriffs, d. h. auf eine bisher noch nicht behandelte Zahlform, durch die auch solche Quotienten einen Sinn erhalten. Dies geschieht durch die Annahme einer teilbaren Einheit.

Es sei beispielsweise die Einheit eine Strecke AB, so läßt sich diese in drei gleiche Teile teilen, und jeder solche Teil, z. B. AD, hat die Eigenschaft, daß er, dreimal als Summand gesetzt, zur Summe die Einheit gibt. Ebenso läßt



sich dann die sieben solche Einheiten enthaltende Strecke AC in drei gleiche Teile AE, EF, FC teilen, und jeder solche Teil entspricht dem Begriff des Quotienten $\frac{7}{3}$, d. h. er gibt dreimal genommen die Strecke 7. Zugleich sieht man, daß diese Strecke durch Teilung ihrer sämtlichen Einheiten in je drei gleiche Teile in $3 \cdot 7 = 21$ solche »Drittel« der Einheit geteilt wird, und daß somit der Wert des Quotienten $\frac{7}{3}$ aus sieben solchen Dritteln besteht. Allgemein, läßt sich die Einheit in b gleiche Teile teilen, so erhält der Quotient $\frac{1}{b}$ gemäß der früheren Definition des Quotienten die Bedeutung eines solchen Teiles. Die aus a Einheiten bestehende Zahl läßt sich dann ebenfalls in b gleiche Teile teilen, und jeder solche Teil ist gleich $\frac{a}{b}$ zu setzen. Da ferner die Zahl a durch Teilung einer jeden ihrer Einheiten in b gleiche Teile im ganzen $a \cdot b$ dieser Teileinheiten erhält, so ist der Quotient $\frac{a}{b}$ stets gleich der durch Zusammenfassen von a solchen »$b$teln« der Einheit entstehenden Zahl, oder es ist

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} \quad .$$

Die so entstehenden Zahlen, die also gleich einem von mehreren gleichen Teilen der Einheit oder gleich einer Anzahl solcher Teile sind, nennt man gebrochene Zahlen oder Brüche. Der Dividend wird in diesem Fall der Zähler, der Divisor der Nenner des Bruchs genannt. Im Gegensatz zu den Brüchen heißen die bisher behandelten Zahlen ganze Zahlen.

Wie man bei der Berechnung eines Produktes $a\,b$ sich durch Zusammenfassen von b Einheiten eine neue Einheit entstanden denken und das Produkt als die a solche Einheiten enthaltende Zahl auffassen konnte, so kann man auch den Bruch $\frac{a}{b}$ als eine Zahl betrachten, die durch Veränderung der Einheit entsteht. Im Gegensatz zur Multiplikation ist hier die neue Einheit, statt eines Vielfachen der ursprünglichen, ein (aliquoter) Teil derselben. Die Zahl $\frac{a}{b}$ bedeutet hiernach eine Anzahl von a Einheiten, von denen jede der $b$te Teil der ursprünglichen Einheit ist. Diese Auffassung des Quotienten gilt nicht bloß für die gebrochenen Zahlen; sie bleibt auch gültig, wenn a gleich b und wenn a ein Vielfaches von b ist. Mit andern Worten, es kann jede Division, auch wenn eine Teilung der Einheit zu ihrer Ausführung nicht nötig ist, doch mittels einer solchen ausgeführt gedacht werden. Deshalb schließt man in den Begriff des Bruches auch die Quotienten ein, bei den sich der Dividend durch den Divisor ohne Rest teilen läßt, wie z. B. $\frac{6}{3}$, $\frac{8}{2}$ u. s. w. (Uneigentliche Brüche im Gegensatz zu den eigentlichen.)

Jede ganze Zahl kann nach dem eben Gesagten in die Form einer gebrochenen gebracht werden, und zwar ist

$$a = \frac{a\,b}{b} \quad .$$

Durch die gebrochenen Zahlen wird die früher unter dem Bilde einer Reihe von Punkten dargestellte Zahlenreihe in der Art weiter ausgefüllt, daß zwischen je zweien der bisherigen Punkte beliebig viele andre in gleichen Abständen

voneinander eingeschaltet, die Zwischenräume also entsprechend verengert werden können. Je größer der Nenner des Bruches ist, desto kleiner werden diese Zwischenräume, und die einzelnen Punkte können daher einander über jede gegebene Grenze hinaus genähert werden. Man darf jedoch nicht folgern, daß auf diese Weise die Reihe diskreter Punkte in eine kontinuierliche, eine Zahlenlinie, verwandelt werden könne. Die Entscheidung dieser Frage kann erst an einer späteren Stelle gegeben werden.

2. Es ist nun zu untersuchen, ob die Gesetze der Addition und Subtraktion, die unter der Voraussetzung ganzer Zahlen abgeleitet waren, auch für die neue Zahlform des Bruches Geltung behalten.

Nimmt man in einem Bruche $\frac{a}{b}$ den Zähler und den Nenner als veränderlich an, so sieht man ein, daß durch Vergrößerung des Zählers bei unverändertem Nenner die Anzahl der Teile der Einheit vermehrt wird, während diese Teile selbst ihre Größe nicht ändern, daß also der Bruch größer wird. Genauer ergibt sich, daß durch Multiplikation des Zählers der Bruch mit derselben Zahl multipliziert wird. Vergrößert man dagegen den Nenner bei unverändertem Zähler, so wird die Einheit in eine größere Anzahl von Teilen geteilt, diese Teile selbst werden also entsprechend kleiner, und da ihre Anzahl a unverändert geblieben ist, so muß auch der Bruch entsprechend verkleinert sein. Durch Multiplikation des Nenners wird hiernach der Bruch durch dieselbe Zahl dividiert. — Entsprechend findet man, daß ein Bruch durch Division des Zählers dividiert, durch Division des Nenners multipliziert wird.

Hieraus folgt, daß der Wert eines Bruches unverändert bleiben muß, wenn man den Zähler und den Nenner zugleich mit derselben Zahl multipliziert oder wenn man beide durch dieselbe Zahl dividiert, oder es ist

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a : n}{b : n} .$$

Die erste Umformung nennt man Erweitern, die zweite Kürzen oder Heben des Bruches in dem Falle, daß $a : n$ und $b : n$ ganze Zahlen werden.

Mit Hilfe des Erweiterns läßt sich stets bewirken, daß zwei oder mehrere Brüche denselben Nenner erhalten. Erweitert man nämlich jeden der beiden Brüche $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ mit dem Nenner des andern, so erhält man für diese $\frac{ad}{bd}, \frac{bc}{bd}$. Ist noch ein dritter Bruch $\frac{e}{f}$ gegeben, so kann man nun diesen mit bd und jeden der beiden ersten mit f erweitern; bei einer noch größeren Anzahl von Brüchen fährt man in derselben Weise fort.

Brüche, die gleiche Nenner haben, heißen gleichnamige, solche mit ungleichen Nennern ungleichnamige Brüche.

Gleichnamige Brüche können als Zahlen angesehen werden, die sich auf dieselbe Einheit beziehen, nämlich auf den durch den Nenner bestimmten Teil der ursprünglichen Einheit.

Da nun beliebige ungleichnamige Brüche stets gleichnamig gemacht werden können und auch jede ganze Zahl auf die Form eines Bruches mit demselben Nenner gebracht werden kann, so lassen sich die früheren Erklärungen und die aus diesen abgeleiteten Gesetze des Addierens und des Subtrahierens auch auf die neue Zahlform der Brüche anwenden. Man hat zu diesem Zwecke nicht einmal immer nötig, die Umformung der einzelnen Zahlen der Rechnung, um allen denselben Nenner zu geben, wirklich auszuführen sondern es genügt, dies als geschehen zu denken, während man statt der durch die Umformung entstehenden Brüche die ursprünglichen, ihnen gleichwertigen Zahlen bei dem Schreiben und Aussprechen beibehalten kann. So kann man z. B. nach § 1 Nr. 3

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)-\frac{e}{f}=\left(\frac{a}{b}-\frac{e}{f}\right)+\frac{c}{d}$$

setzen, da man nur nötig hat, sich behufs der Addition und Subtraktion alle drei Brüche auf den gemeinsamen Nenner bdf gebracht zu denken; nur zur wirklichen Ausführung der Rechnung ist es nötig, auch das Gleichnamigmachen auszuführen.

Nachdem so die Anwendbarkeit der früheren Entwicklungen auf die neue Zahlform nachgewiesen ist, sollen im folgenden die Gesetze des Rechnens mit Produkten und Quotienten im allgemeinen Sinne abgeleitet werden.

§ 5. Verbindung der Operationen erster und zweiter Stufe.

1. Sollen drei oder mehr Zahlen durch Multiplikation und Division unter sich, oder daneben durch Addition und Subtraktion verbunden werden, so wird wieder die Angabe der Reihenfolge der Verknüpfungen nötig. Dies geschieht auch hier durch Klammern. Um jedoch einer Häufung von Klammern möglichst vorzubeugen, ist man übereingekommen, die Multiplikation und Division als enger verbindend wie die Addition und Subtraktion zu betrachten, so daß alle diejenigen Klammern weggelassen werden können, die nur den Zweck haben, eine Operation zweiter Stufe als der Operation erster Stufe vorangehend zu bezeichnen. Abgesehen hiervon werden auch hier diejenigen Klammern weggelassen, die dieselbe Reihenfolge angeben, wie die, in der die Zahlen selbst in dem betreffenden Ausdruck aufeinander folgen. Man schreibt also z. B. statt $(a \cdot c) + b$ kürzer $a \cdot c + b$, statt $a - (b \cdot c)$, $a - b \cdot c$, statt $(ab)c$, abc, dagegen $a \cdot (c + b)$ u. dgl. m. mit Klammer. Der horizontale Divisionsstrich kann eine Klammer ersetzen; so schreibt man z. B. $a : (b : c)$ oder $a : \frac{b}{c}$; für $(a + b) : c$ ebenso $\frac{a+b}{c}$.

Wir stellen nun im folgenden zunächst die einfachsten Rechenregeln zusammen, die bei Verbindung der beiden Operationen zweiter Stufe mit den beiden erster Stufe vorkommen. Da

$$\begin{aligned}(a \pm b) \cdot c &= (a \pm b) + (a \pm b) + (a \pm b) + \ldots \\ &= (a + a + a + \ldots) \pm (b + b + b + \ldots)\end{aligned}$$

gesetzt werden kann, so ist

$$1) \qquad (a + b) \cdot c = ac \pm bc \quad ,$$

d. h. eine Summe oder Differenz kann mit einer Zahl multipliziert werden, indem man jedes Glied mit dieser Zahl multipliziert und die Partialprodukte entsprechend addiert oder subtrahiert. Analoges gilt umgekehrt für die Multiplikation einer Zahl mit einer Summe oder Differenz, d. h. es ist

$$2) \qquad a \cdot (b \pm c) = ab \pm ac \quad .$$

Diese Umformung nennt man das Ausmultiplizieren einer Klammer.

Die vorstehende Regel kann ferner leicht auf die Multiplikation von Summen mit beliebig vielen Summanden oder von Polynomen ausgedehnt werden. So ist z. B.

$$(a + b - c - d) \cdot k = ak + bk - ck - dk \quad .$$

Durch Umkehrung dieser Regel ergibt sich sodann, daß jedes Polynom aus Produkten, die einen gemeinsamen Faktor haben, gleich dem Produkt aus diesem Faktor und dem entsprechend gebildeten Polynom der nicht gemeinschaftlichen Faktoren gesetzt werden kann. So ist z. B.

$$am + bm - cm = (a + b - c)m; \quad na - nb + nc = n(a - b + c) \quad .$$

Man nennt diese Umformung das Ausheben (Absondern) eines gemeinschaftlichen Faktors. Die Stellung dieses Faktors vor oder hinter der Klammer ist beliebig, so daß man auch schreiben kann:

$$a\,m + b\,m - c\,m = m\,(a + b - c) \quad .$$

Als weitere Beispiele des Gebrauchs der vorstehenden Regeln mögen die folgenden dienen:

$$3\,x - 5\,(y + z) = 3\,x - (5\,y + 5\,z) = 3\,x - 5\,y - 5\,z \quad ;$$

$$a - b \cdot (c - d) = a - (b\,c - b\,d) = a - b\,c + b\,d \quad .$$

Entsprechend ist

$$2\,a - 3\,b + 3\,c = 2\,a - 3\,(b - c) = 2\,a + 3\,(c - b) \quad ;$$

$$7\,x + 2\,(y + z - u) = 7\,x + 2\,y + 2\,z - 2\,u \quad ;$$

$$5\,a + 3\,b - 4\,(a - b - c) = 5\,a + 3\,b - 4\,a + 4\,b + 4\,c = a + 7\,b + 4\,c \quad ;$$

$$a\,m + b\,m + c\,m - a\,n - b\,n - c\,n = (a + b + c)\,m - (a + b + c)\,n$$
$$= (a + b + c)\,(m - n) \quad .$$

2. Eine zweite Erweiterung der Regeln 1) und 2) ergibt sich durch ihre wiederholte Anwendung in:

$$(a + b) \cdot (c + d) = (a + b) \cdot c + (a + b) \cdot d = a\,c + b\,c + a\,d + b\,d$$

oder

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d) = a\,c + a\,d + b\,c + b\,d \quad .$$

Überhaupt erhält man auf diese Weise für die Multiplikation zweier Binome die vier Regeln:

$$3) \quad \begin{cases} (a + b) \cdot (c + d) = a\,c + a\,d + b\,c + b\,d \\ (a + b) \cdot (c - d) = a\,c - a\,d + b\,c - b\,d \\ (a - b) \cdot (c + d) = a\,c + a\,d - b\,c - b\,d \\ (a - b) \cdot (c - d) = a\,c - a\,d - b\,c + b\,d \end{cases} \quad .$$

Diese lassen sich auf die Multiplikation beliebiger Polynome erweitern. Man erhält auch für diese die Regel:

Man multipliziere jedes Glied des einen Faktors mit jedem Gliede des andern und verbinde jedes Partialprodukt mit den übrigen durch Addition oder Subtraktion, je nachdem seine Faktoren in den ursprünglichen Polynomen durch gleiche oder durch verschiedene Vorzeichen verbunden waren.

Diese Vorzeichenregel kann man kurz ausdrücken: Glieder mit gleichen Vorzeichen geben bei der Multiplikation $+$, Glieder mit entgegengesetzten Vorzeichen $-$.

Durch wiederholte Anwendung dieser Regel kann nun auch die Multiplikation von drei und von beliebig vielen Polynomen nacheinander ausgeführt werden.

Als besondere Fälle der obigen Regeln sind folgende Formeln bemerkenswert:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2 \quad ,$$

wobei $(a + b)^2$, a^2, b^2, gelesen »$(a + b)$ Quadrat« u. s. f., als Abkürzungen für $(a + b)\,(a + b)$, $a\,a$ und $b\,b$ dienen.

Die dritte dieser Regeln wird häufig in umgekehrter Gestalt angewendet, um Differenzen von der Form $a^2 - b^2$ in Produkte zu verwandeln.

Aus der Formel 3) folgt endlich durch Umkehrung, daß eine Summe oder Differenz dividiert werden kann, indem man jedes Glied durch den Divisor dividiert und dann die Partialquotienten entsprechend addiert oder subtrahiert, oder daß

$$4) \qquad \frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} \quad .$$

ist. Denn dieser Satz behauptet zufolge der Erklärung des Quotienten nach 2) in § 3, daß die rechte Seite der Gleichung derjenigen Zahl gleich sei, deren Produkt mit c den Wert $a \pm b$ habe. Es ist also zum Beweis der Richtigkeit der Formel nur zu zeigen, daß in der Tat

$$\left(\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}\right) \cdot c = a \pm b$$

ist, was leicht mit 4) und 3) in § 3 Nr. 2 geschehen kann.

Die Ausdehnung des Satzes 4) auf die Division eines beliebigen Polynoms durch eine Zahl bedarf keiner besonderen Erläuterung.

Man nennt diese Umformung: ein Polynom ausdividieren.

Umgekehrt folgt, daß beliebig viele Quotienten, die denselben Divisor haben, addiert oder subtrahiert werden, indem man die Dividenden in entsprechender Weise addiert oder subtrahiert, und das Resultat durch den gemeinsamen Divisor dividiert. Es ist dies die Vereinigung gleichnamiger Brüche. So ist also z. B.

$$\frac{3a - 2b}{a - b} + \frac{4a - b}{a - b} - \frac{3m + 2n}{a - b} = \frac{3a - 2b + 4a - b - 3m - 2n}{a - b} \quad .$$

3. Für die Multiplikation und Division von Produkten und Quotienten ergeben sich die folgenden Regeln:

$$5) \qquad abc = acb = a(bc) \quad ,$$

denn $(ab)c = ab + ab + ab \ldots^c$ kann sowohl gleich $(a + a + a + \ldots^c)\, b$, d. i. gleich $(ac)b$, als auch $a(b + b + b + \ldots^c) = a(bc)$ gesetzt werden.

Die vorstehende Regel zeigt nicht bloß, wie ein Produkt mit einer Zahl, sondern durch Umkehrung auch, wie eine Zahl mit einem Produkt multipliziert werden kann. Sie läßt sich ferner auf die Multiplikation von mehr als drei Faktoren erweitern und dann dahin aussprechen, daß bei der Multiplikation beliebig vieler Zahlen die Reihenfolge der Faktoren ohne Einfluß auf das Resultat ist. Daher dürfen in diesem Fall auch stets die Klammern weggelassen werden.

Ein Produkt aus gleichen Faktoren wird abgekürzt geschrieben, indem man den gleichen Faktor nur einmal und daran rechts oben die Anzahl der Faktoren schreibt; z. B.

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5 \quad ,$$

gelesen »a zur fünften«; $a \cdot a = a^2$ oder a zur zweiten heißt auch »a Quadrat«. Daraus folgt, daß z. B.

$$a^3 \cdot a^4 = a^7$$

sein muß.

Soll ein Produkt durch eine Zahl dividiert werden, so kann dies nach der Formel:

$$6) \qquad \frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \cdot b = a \cdot \frac{b}{c}$$

geschehen, denn da die Ausdrücke $\frac{a}{c} \cdot b$ und $a \cdot \frac{b}{c}$ zufolge der Regel 4) in Verbindung mit 2) in § 3 Nr. 2 bei der Multiplikation mit c zum Resultate $a \cdot b$ geben müssen, so sind sie dem Quotienten $\frac{ab}{c}$ gleich.

Allgemein läßt sich hieraus folgern, daß ein Produkt von beliebig vielen Faktoren durch eine Zahl dividiert werden kann, indem man einen Faktor durch diese Zahl dividiert. Daraus folgt im besondern, daß z. B.

$$a^5 : a = a^4$$

ist.

Aus den Formeln 5) und 6) geht hervor, daß der Wert eines Produkts durch Multiplikation eines der Faktoren mit derselben Zahl multipliziert und durch Division eines der Faktoren dividiert wird. Da nun der Dividend a des Quotienten $a : b$ der gegebene Wert eines Produkts, der Divisor b der eine Faktor ist, so folgt, daß durch Multiplikation des Dividenden mit c ohne Veränderung des Divisors der Wert des andern Faktors, d. i. des Quotienten, mit c multipliziert wird. Durch Division des Dividenden ohne Veränderung des Divisors würde dagegen der Quotient entsprechend dividiert werden. Läßt man dagegen den Dividenden, also den Wert des Produkts, unverändert und multipliziert oder dividiert den einen Faktor, so muß der andre Faktor entsprechend dividiert oder multipliziert sein. Es wird also durch Multiplikation seines Divisors mit einer Zahl c der Quotient selbst durch c dividiert, und durch Division des Divisors durch c der Quotient mit c multipliziert.

Man kann hiernach, wie schon in § 4 insbesondere für gebrochene Zahlen nachgewiesen worden ist, allgemein einen Quotienten sowohl durch Multiplikation seines Dividenden als durch Division seines Divisors multiplizieren, sowie sowohl durch Division seines Dividenden als durch Multiplikation seines Divisors dividieren, oder es ist

$$7) \qquad \frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b} = \frac{a}{b : c} \quad ,$$

$$8) \qquad \frac{a}{b} : c = \frac{a : c}{b} = \frac{a}{b \cdot c} \quad .$$

Außerdem folgt auch hier wie in § 4, daß die gleichzeitige Multiplikation der beiden Bestandteile eines Quotienten mit derselben Zahl, oder ihre gleichzeitige Division durch dieselbe Zahl den Wert des Quotienten unverändert läßt, daß also

$$9) \qquad \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a : c}{b : c} = \frac{a}{b}$$

ist. — Die noch übrigen einfachen Aufgaben, eine Zahl durch ein Produkt zu dividieren, eine Zahl mit einem Quotienten zu multiplizieren und eine Zahl durch einen Quotienten zu dividieren, werden durch die Regeln:

$$10) \quad \begin{cases} \dfrac{a}{b \cdot c} = \dfrac{a}{b} : c = \dfrac{a}{c} : b \quad , \\ a \cdot \dfrac{b}{c} = \dfrac{ab}{c} = \dfrac{a}{c} \cdot b \quad , \\ a : \dfrac{b}{c} = \dfrac{a \cdot c}{b} = \dfrac{a}{b} \cdot c \end{cases}$$

gelöst, die man durch Umkehrung vorhergehender ableiten und dahin aussprechen kann, daß die Division einer Zahl durch ein Produkt mittels successiver Division durch die einzelnen Faktoren in beliebiger Reihenfolge, die Multiplikation mit einem Quotienten durch Multiplikation mit dem Dividenden und Division mit dem Divisor in beliebiger Reihenfolge und endlich die Division durch einen Quotienten mittels Division durch den Dividenden und Multiplikation mit dem Divisor in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden könne.

Insbesondere hat man nach der ersten dieser Regeln z. B.

$$a^5 : a^2 = a^3, \quad a^7 : a^3 = a^4 \quad .$$

Der häufigen Anwendung wegen schließen wir den vorstehenden noch die folgenden Regeln über die Multiplikation und Division zweier Quotienten an:

$$11) \quad \begin{cases} \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d} = \dfrac{a}{b} : \dfrac{d}{c} \\ \dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{a : c}{b : d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c} \end{cases} .$$

Man kann diese durch successive Anwendung der vorstehenden erhalten. So ist z. B.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \left(a \cdot \frac{c}{d}\right) : b = \frac{ac}{d} : b = \frac{ac}{bd} \quad ,$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b} : d\right) \cdot c = \frac{a}{b} : \frac{d}{c} \quad .$$

Vertauscht man in einem Quotienten (Bruche) Dividend und Divisor (Zähler und Nenner), so erhält man seinen reziproken Wert. Daher kann man die Regel aufstellen: Statt durch einen Quotienten (Bruch) zu dividieren oder mit ihm zu multiplizieren, kann man mit dem reziproken Wert multiplizieren oder durch ihn dividieren.

4. Entsprechende Regeln für die Addition und Subtraktion zweier Quotienten sind in 4) angegeben worden; diese setzten jedoch voraus, daß beide denselben Divisor haben. Mit Hilfe der Regel 9) lassen sich jetzt auch andre Quotienten addieren und subtrahieren. Schon in § 4 ist gezeigt worden, daß wenn z. B. $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gegeben sind, man diese Quotienten so umformen kann, daß sie gleiche Divisoren erhalten; man hat zu diesem Zweck nur nötig, in jedem der Quotienten beide Bestandteile mit dem Divisor des andern zu multiplizieren. Hierdurch erhält man:

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}, \quad \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd} \quad ,$$

also ist

$$12) \qquad \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

als Regel für die Vereinigung ungleichnamiger Brüche. Damit kann man auch eine Zahl mit einem Quotienten vereinigen, z. B.

$$a + \frac{b}{n} = \frac{an}{n} + \frac{b}{n} = \frac{an + b}{n} \quad .$$

Die Ausdehnung dieser Regel auf Polynome von beliebig vielen Quotienten ist selbstverständlich.

Haben die Divisoren b, d einen gemeinschaftlichen Faktor, so führt die Multiplikation mit dem Divisor des andern Quotienten zu einer unnützen Weitläufigkeit; man hat nur nötig, bei jedem Quotienten den nicht gemeinschaftlichen Faktor aus dem Divisor des andern anzuwenden. So ist z. B.

$$\frac{a}{xy} + \frac{b}{xz} = \frac{az}{xyz} + \frac{by}{xyz} = \frac{az + by}{xyz} \quad ,$$

$$\frac{a}{xy} - \frac{b}{xz} + \frac{c}{yz} = \frac{az - by + cz}{xyz} \quad ,$$

$$\frac{m}{x^3} - \frac{n}{x^2} + \frac{p}{x} - q = \frac{m - nx + px^2 - qx^3}{x^3} \quad .$$

5. Die in § 3 gegebenen Definitionen lassen sich auch auf Null und die negativen Zahlen übertragen, und das Gleiche gilt von den aus diesen Erklärungen abgeleiteten Gesetzen. Doch ist dabei zunächst zu bemerken, daß nach der Erklärung des Produkts nur der Multiplikand eines solchen, nicht aber der Multiplikator Null oder eine algebraische Zahl sein kann, da dieser nur eine Anzahl bedeutet, also eine natürliche Zahl sein muß. Es ist also

$$0 \cdot b = 0 + 0 + 0 + \ldots^{b} = 0 \quad ,$$

$$(+a) \cdot b = (+a) + (+a) + (+a) + \ldots = +(ab) \quad ,$$

$$(-a) \cdot b = (-a) + (-a) + (-a) + \ldots = -(ab) \quad .$$

Dagegen hat $a \cdot 0$ als eine Summe mit keinem Summanden, oder $a \cdot (-b)$, als eine Summe mit einer negativen Anzahl von Summanden nach der bisherigen Auffassung keinen Sinn, und es ist daher auch das die Vertauschung der Faktoren betreffende Grundgesetz der Multiplikation hier nicht ohne weiteres anwendbar.

Man wird jedoch durch das Auftreten von Ausdrücken, wie die zuletzt erwähnten, auf eine Erweiterung der frühern Erklärungen der Multiplikation und Division hingeführt, durch die diese Ausdrücke ebenfalls einen den frühern Untersuchungen entsprechenden Sinn erhalten. Wir setzen demnach fest, daß unter $a \cdot 0$ verstanden werden soll, daß der Summand a keinmal gesetzt sei, so daß also $a \cdot 0 = 0$ und demnach auch hier $a \cdot 0 = 0 \cdot a$, und insbesondere $0 \cdot 0 = 0$ ist. Ferner soll unter der Multiplikation einer Zahl mit einem positiven oder negativen Multiplikator $+b$ verstanden werden, daß jene Zahl nicht nur so viel mal als Summand gesetzt werden soll, als die Anzahl der Einheiten von b beträgt, sondern daß die Summe auch in derselben oder in entgegengesetzter Richtung der Zahlenreihe mit derjenigen genommen werden soll, der die Summanden angehören, je nachdem der Multiplikator positiv oder negativ ist.

So bedeutet also z. B. $(+4) \cdot (-3)$ nicht bloß, daß der Summand $+4$ dreimal gesetzt werden, sondern auch, daß das Vorzeichen des Produkts in das entgegengesetzte verwandelt werden soll, so daß also dieses Produkt $(+4) \cdot (-3)$ die Bedeutung $-[(+4) + (+4) + (+4)] = -(+12) = -12$ erhält.

Die Anwendung dieser Erklärung auf die vier hierbei möglichen einfachsten Fälle führt auf die Formeln:

$$13) \quad \begin{cases} (+a) \cdot (+b) = +ab \quad , \\ (+a) \cdot (-b) = -ab \quad , \\ (-a) \cdot (+b) = -ab \quad , \\ (-a) \cdot (-b) = +ab \quad . \end{cases}$$

Man multipliziert also stets die absoluten Werte der beiden algebraischen Faktoren und bestimmt das Vorzeichen des Produkts nach der praktischen Regel: Gleiche Vorzeichen geben +, ungleiche — (vgl. § 5 Nr. 2).

Infolge der erweiterten Fassung des Begriffs der Multiplikation ergeben sich die entsprechenden Sätze für die Division als die Umkehrungen der ersteren:

Aus $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ folgt zunächst für die Division mit Null, daß

$$\frac{0}{a} = 0$$

zu setzen ist, mit Ausnahme des Falls, in dem auch a den Wert Null erhält. Denn die in $\frac{0}{a}$ enthaltene Frage nach dem Faktor, dessen Produkt mit a gleich Null sei, wird durch die vorstehenden Regeln dahin beantwortet, daß dieser Faktor selbst gleich Null sei. Für die in $\frac{0}{0}$ enthaltene Frage aber, welche Zahl mit 0 multipliziert, zum Resultat Null gebe, ergibt sich die Antwort, daß jede Zahl diese Eigenschaft habe. Der Ausdruck

$$\frac{0}{0}$$

ist daher unbestimmt, oder ein unendlich vieldeutiges Symbol, das jede beliebige Zahl bedeuten kann, so daß aus ihm allein nicht zu ersehen ist, welche bestimmte Zahl er in einem besonderen Fall bedeutet. — Der Ausdruck

$$\frac{a}{0}$$

endlich fordert die Auffindung einer Zahl, deren Produkt mit Null gleich a sei. Eine solche Zahl können wir überhaupt nicht angeben, den Fall $a = 0$ selbstverständlich wieder ausgenommen, da jede angebbare Zahl mit 0 multipliziert ein Produkt gleich Null gibt.

Läßt man in dem Quotienten $\frac{a}{b}$ bei unverändertem Dividenden den Divisor b kleiner werden, indem man ihn durch c dividiert, so wird der Quotient $c$mal so groß. Ist $b = \frac{1}{n}$, so ist $\frac{a}{b} = a \cdot n$. Läßt man nun n ohne Ende wachsen, so nähert sich b ohne Ende der Null, und der Wert des Quotienten kann auf diese Weise größer als jede angebbare Zahl gemacht werden. Man drückt dies dadurch aus, daß man

$$\frac{a}{0} = \infty$$

setzt, indem man durch das Zeichen ∞ eine unendlich große Zahl bezeichnet.

Aus dem vorstehenden folgt die praktische Regel, daß man niemals durch Null dividieren darf.

Für die Division algebraischer Zahlen hat man nur die Sätze 13) umzukehren. So folgt z. B. aus $(-a) \cdot (+b) = -ab$, daß $\frac{-ab}{-a} = +b$, also auch $\frac{-c}{-a} = +\frac{c}{a}$ zu setzen ist u. s. w. So ergeben sich die Formeln:

$$14)\quad \begin{cases} \dfrac{+a}{+b} = +\dfrac{a}{b} \\[2ex] \dfrac{+a}{-b} = -\dfrac{a}{b} \\[2ex] \dfrac{-a}{+b} = -\dfrac{a}{b} \\[2ex] \dfrac{-a}{-b} = +\dfrac{a}{b} \end{cases},$$

so daß auch hier die praktische Regel gilt, daß gleiche Vorzeichen +, ungleiche — geben.

Die im vorstehenden entwickelten Gesetze der Multiplikation und Division mit Null und mit algebraischen Zahlen lassen sich auf zusammengesetztere Rechnungen anwenden; auch überzeugt man sich leicht, daß alle früher für absolute Zahlen abgeleiteten Gesetze der Multiplikation und Division für die eben genannten Zahlformen ebenfalls gültig bleiben. So ergibt sich beispielsweise, daß man aus den Formeln 3) die Formeln 13) erhält, wenn man in ihnen $a = c = 0$, in 13) $0 + a$, $0 - a$ statt $+a$, $-a$ u. s. w. schreibt, u. dgl. m.

6. Die allgemeinste Aufgabe der Multiplikation, nämlich die Aufgabe, beliebig viele algebraische Summen miteinander zu multiplizieren, bedarf nun keiner weitern Erörterung, da ihre Auflösung aus dem bisherigen folgt. Dagegen führt die allgemeine Division algebraischer Summen auf ein bemerkenswertes Verfahren. Dasselbe stützt sich auf den Satz, daß man jeden Quotienten gleich der Summe aus einer beliebigen Zahl und einem dem ersten gleichnamigen Quotienten setzen kann. Der Dividend des zweiten Quotienten wird erhalten, wenn man von dem des ersten das Produkt aus der beliebigen Zahl und dem Divisor subtrahiert. Es ist also

$$\frac{a}{b} = x + \frac{a - bx}{b} .$$

Hieraus ergibt sich folgende allgemeine Divisionsregel:

Um a durch b zu dividieren, kann man zunächst für den Quotienten eine beliebige Zahl x setzen, dann das Produkt dieser Zahl und des Divisors b von dem Dividenden a subtrahieren und den Rest durch b dividieren. Indem man sich hierzu wieder desselben Verfahrens bedient und in dieser Weise fortfährt, erhält man, falls der letzte Rest gleich Null wird, zum Quotienten die Summe der Teilquotienten $x + x_1 + x_2 + \ldots$ Ist der letzte Rest nicht gleich Null, so ist dieser Summe noch der Quotient dieses Restes durch q hinzuzufügen.

Man wählt praktisch für x eine dem Werte von $\frac{a}{b}$ möglichst nahe kommende, kleinere Zahl, wie bei dem Verfahren der Division mehrziffriger gemeiner Zahlen.

Die Anwendung dieses Verfahrens auf algebraische Summen mögen folgende Beispiele zeigen:

Aufgabe 1: $(12x^2 + 54y^2 + 48yz - 51xy - 24xz) : (4x - 8z - 9y)$ zu berechnen.

Für Anfänger empfiehlt es sich, zunächst den Dividenden und den Divisor nach den Buchstaben x, y, z zu ordnen, worauf man folgende Rechnung erhält:

$(12x^2 - 51xy - 24xz + 54y^2 + 48yz) : (4x - 9y - 8z)$; $12x^2 : 4x = 3x$,

$12x^2 - 27xy - 24xz$

$(-24xy + 54y^2 + 48yz) : (4x - 9y - 8z)$; $-24xy : 4x = -6y$,

$-24xy + 54y^2 + 48yz$.

Der Quotient ist also gleich $3x - 6y$.

Man sieht leicht ein, daß man sich bei dem Schreiben die Wiederholung des Divisors ersparen kann, wie dies in den folgenden Beispielen geschehen ist:

Aufgabe 2: $(20x^4 + 18x - 51x^3 - 16 - 4x^2) : (4x^2 - 7x - 8)$.

Nach dem Ordnen des Dividenden hat man:

$$\begin{array}{l} (20x^4 - 51x^3 - 4x^2 + 18x - 16) : (4x^2 - 7x - 8) = 5x^2 - 4x + 2 \\ \underline{20x^4 - 35x^3 - 40x^2} \\ \quad -16x^3 + 36x^2 + 18x \\ \quad \underline{-16x^3 + 28x^2 + 32x} \\ \quad\quad + 8x^2 - 14x - 16 \\ \quad\quad + 8x^2 - 14x - 16 \quad . \end{array}$$

Aufgabe 3: $(x^5 - y^5) : (x - y) = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$

$$\begin{array}{l} x^5 - x^4y \\ \quad + x^4y - y^5 \\ \quad + x^4y - x^3y^2 \\ \quad\quad + x^3y^2 - y^5 \\ \quad\quad + x^3y^2 - x^2y^3 \\ \quad\quad\quad + x^2y^3 - y^5 \\ \quad\quad\quad + x^2y^3 - xy^4 \\ \quad\quad\quad\quad + xy^4 - y^5 \\ \quad\quad\quad\quad + xy^4 - y^5 \end{array}$$

Analoge Aufgaben, wie die vorstehende dritte, führen auf den bemerkenswerten Satz, daß jeder Ausdruck von der Form $x^n - y^n$, wo n eine natürliche Zahl ist, durch $x - y$ ohne Rest teilbar ist. Es ist nämlich

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1} .$$

Der Beweis der Richtigkeit kann dadurch geführt werden, daß man die rechte Seite mit $x - y$ multipliziert.

Entsprechend ergibt sich, daß $x^n + y^n$ für ungerades n dnrch $x + y$ ohne Rest teilbar ist und man erhält z. B.

$$\frac{x^7 + y^7}{x + y} = x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6 \quad .$$

Dieses Verfahren der Division zweier Polynome heißt Partialdivision.

Im allgemeinen wird der Divisor in dem Dividenden nicht ohne Rest enthalten sein. Z. B. ist

$$\begin{array}{l} (x^2 + xy - 2y^2 - x + 7y - 2) : (x - y + 2) = x + 2y - 3 + \dfrac{4}{x - y + 2} \\ \underline{x^2 - xy \qquad + 2x} \\ \quad + 2xy - 2y^2 - 3x + 7y \\ \quad \underline{+ 2xy - 2y^2 \qquad + 4y} \\ \quad\quad - 3x + 3y - 2 \\ \quad\quad \underline{- 3x + 3y - 6} \\ \quad\quad\quad + 4 \end{array}$$

§ 6. Eigenschaften der natürlichen Zahlen.

1. Ehe wir von den bisher behandelten Operationen zu höheren Stufen von Zahlenverbindungen übergehen, sollen im folgenden einige für die praktischen Anwendungen oder die späteren Untersuchungen wichtige Theorien erörtert werden, die, soweit sie hier Behandlung finden, durch die Gesetze der vier bis-

herigen Grundoperationen erledigt werden können. Die zunächst zu behandelnden Lehren gehören einem Zweige der Mathematik an, der unter dem Namen der Theorie der Zahlen oder der Zahlenlehre von den besondern Eigenschaften der natürlichen Zahlen handelt und aus dem hier einige der elementaren Sätze, wie sie im folgenden gebraucht werden, Erwähnung finden sollen.

Unter einer Zahl schlechthin soll hiernach im folgenden stets eine natürliche Zahl verstanden werden.

Ist eine Zahl a ein Produkt einer Zahl b mit einer zweiten Zahl m, also $a = m \cdot b$, so heißt a ein Vielfaches von b, und b ein Teiler oder ein Maß von a. Man sagt auch, b gehe in a auf oder a sei teilbar durch b.

Ist a kein Vielfaches von b, so kann a stets gleich der Summe eines Vielfachen mb von b und einer Zahl r gesetzt werden, so daß $r < b$ ist. In diesem Fall heißt r der Rest.

Jede Zahl ist durch 1 und durch sich selbst teilbar. Zahlen, die außerdem durch keine andre Zahl teilbar sind, wie z. B. 2, 3, 5, 7, 11, 13 heißen Primzahlen; alle andern Zahlen sind zusammengesetzte Zahlen.

Ist eine Zahl δ ein Teiler von mehreren Zahlen $a, b, c, d \ldots$ zugleich, so heißt sie ein gemeinschaftlicher Teiler (gemeinschaftliches Maß) dieser Zahlen. Solche Zahlen, die (außer der 1) keinen gemeinschaftlichen Teiler haben, heißen relativ prim zueinander. So sind z. B. 9 und 16, obgleich beide keine Primzahlen sind, doch relativ prim, während 9 und 12 den gemeinschaftlichen Teiler 3 haben.

2. Aus diesen Erklärungen ergeben sich folgende Lehrsätze:

Ist δ ein Teiler von a und von b, so ist δ auch ein Teiler von $a + b$ und von $a - b$, $(a > b)$. Denn ist $a = m\delta$, $b = n\delta$, so ist $a \pm b = (m \pm n)\delta$.

Allgemein ist jeder gemeinschaftliche Teiler δ mehrerer Zahlen $a, b, c \ldots$ auch ein Teiler jedes aus diesen Zahlen gebildeten Polynoms $a \pm b \pm c \ldots$

Ist δ ein Teiler von a, so ist δ auch ein Teiler eines jeden Vielfachen von a, denn ist $a = n\delta$, so ist $ma = m(n\delta) = (mn)\delta$.

In einer Reihe von Zahlen, in der jede folgende ein Vielfaches der vorhergehenden ist, muß daher jede frühere Zahl ein Teiler jeder spätern sein.

Ist ferner δ ein Teiler von a, so ist auch jeder Teiler von δ ein Teiler von a, denn ist $a = m\delta$ und $\delta = n\varepsilon$, so ist $a = (mn)\varepsilon$.

Dagegen ist in solchem Falle ein Vielfaches von δ nicht notwendig ein Teiler von a, und ebenso δ nicht notwendig ein Teiler eines Teilers von a.

Allgemein, ist δ ein Teiler von $a, b, c \ldots$, so ist δ und jeder Teiler von δ auch ein Teiler eines jeden aus Vielfachen von $a, b, c \ldots$ gebildeten Polynoms $ma \pm nb \pm pc \pm \ldots$

Beispielsweise ist 8 ein Teiler von 16, 24, 32 und 40, also auch von $2 \cdot 16 + 4 \cdot 24 - 3 \cdot 32 + 40 = 72$, und ebenso sind 4 und 2 Teiler von 72.

Die Summe mehrerer Zahlen $a, b, c \ldots$ kann auch dann durch δ teilbar sein, wenn δ nicht ein Teiler jeder einzelnen dieser Zahlen ist; vielmehr genügt dazu, daß die Summe der bei der Division der einzelnen Summanden durch δ bleibenden Reste durch δ teilbar sei.

So ist $7 + 11 + 9 + 13$ durch 5 teilbar, denn die Summe der Reste $2 + 1 + 4 + 3 = 10$ ist durch 5 teilbar. Ist $a = m\delta + \alpha$, $b = n\delta + \beta$, $c = p\delta + \gamma$ u. s. w., so ist

$$a + b + c + \ldots = (m + n + p + \ldots)\delta + \alpha + \beta + \gamma + \ldots \quad ,$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung folgt.

Die Differenz zweier Zahlen ist entsprechend durch δ teilbar, wenn die Differenz der zugehörigen Reste gleich Null ist. Denn da jeder der Reste kleiner als δ ist, so kann andernfalls ihre Differenz und folglich auch nicht $(m\delta + \alpha) - (n\delta + \beta) = (m - n)\delta + (\alpha - \beta)$ durch δ teilbar sein.

Ein Produkt ist durch jeden seiner Faktoren teilbar. Enthält das Produkt mehrere Faktoren nebeneinander, so ist es auch durch jedes aus diesen Faktoren gebildete Produkt teilbar.

So ist beispielsweise das Produkt $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ durch 2, 3, 4 und 5 einzeln, aber auch durch $2 \cdot 3 = 6$, $2 \cdot 4 = 8$, $3 \cdot 4 = 12$, $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ u. s. w. teilbar. Dagegen ist 120, obgleich durch 2 und durch 24 teilbar, keineswegs durch $2 \cdot 24$ teilbar, denn es enthält die Faktoren 2 und 24 nicht nebeneinander.

Umgekehrt, ist eine Zahl durch ein Produkt teilbar, so ist sie auch durch jeden Faktor des Produkts teilbar. Diese Behauptung ist schon früher bewiesen, da jeder solcher Faktor ein Teiler des ersten Teilers ist.

Ein Produkt kann aber auch durch eine Zahl δ teilbar sein, ohne daß δ einer der Faktoren oder auch nur ein Teiler eines dieser Faktoren ist. So ist $5 \cdot 7 \cdot 9$ durch 35, oder durch 21 teilbar, ebenso $40 \cdot 24$ durch 15 u. dgl. m. In dieser Beziehung gilt der allgemeinere Satz, daß das Produkt $a\,b\,c\,d \ldots$ durch δ teilbar ist, wenn das Produkt der bei der Division der einzelnen Faktoren durch δ bleibenden Reste durch δ teilbar ist. — So erhält man beispielsweise für das obige Produkt $40 \cdot 24$ und den Teiler 15 die Reste 10 und 9, deren Produkt 90 durch 15 teilbar ist. Allgemein ist, wenn $a = m\,\delta + \alpha$, $b = n\,\delta + \beta$, $c = p\,\delta + \gamma \ldots$ ist,

$$a\,b = m\,n\,\delta^2 + \alpha\,n\,\delta + \beta\,m\,\delta + \alpha\,\beta = (m\,n\,\delta + \alpha\,n + \beta\,m)\,\delta + \alpha\,\beta \quad ,$$

womit der Satz für zwei Faktoren bewiesen ist. Für drei Faktoren setze man $a\,b\,c = (a\,b) \cdot c$, so ergibt derselbe Beweis denselben Satz für das Produkt der Reste von $a\,b$ und c, also für $\alpha\,\beta\,\gamma$. Ebenso kann man für jeden weitern Faktor im Beweise fortfahren.

Ist dagegen δ weder ein Teiler eines der Faktoren des Produkts (d. h. ist keiner der Reste gleich Null), noch ein solcher des Produkts der Reste, so kann δ auch kein Teiler des ursprünglichen Produkts sein.

3. Um zu bestimmen, ob zwei Zahlen einen gemeinschaftlichen Teiler haben, dividiere man mit der kleinern in die größere, dann mit dem etwa bleibenden Rest in den vorhergehenden Divisor, darauf mit dem etwa hierbei bleibenden Rest wieder in den jetzt vorhergehenden Divisor und fahre so fort, bis kein Rest bleibt. Der letzte Divisor ist dann die größte Zahl, die in den beiden gegebenen aufgeht. Ist dieser gleich 1, so sind die Zahlen relativ prim, im andern Fall ist jener Divisor ihr größter gemeinschaftlicher Teiler.

Das Verfahren wird Kettendivision genannt.

Beispiel: Den größten gemeinschaftlichen Teiler von 1245 und 2676 zu bestimmen.

$$\begin{aligned} 2676 &: 1245 = 2 \\ 1245 &: 186 = 6 \\ 186 &: 129 = 1 \\ 129 &: 57 = 2 \\ 57 &: 15 = 3 \\ 15 &: 12 = 1 \\ 12 &: 3 = 4 \end{aligned}$$

Der größte gemeinschaftliche Teiler ist also 3.

Um die Richtigkeit dieses Verfahrens zu beweisen, sei zunächst bemerkt, daß, da jeder Rest kleiner als der vorhergehende Divisor ist, jeder folgende Rest kleiner als der vorhergehende ist und daß man daher, wenn b die kleinere der beiden gegebenen Zahlen ist, im ungünstigsten Fall nach $b - 1$ Divisionen auf den Rest 1 kommen muß, der dann in den vorigen Rest aufgeht. Es seien nun $q_1, q_2, q_3 \ldots$ der Reihe nach die einzelnen Quotienten, $r_1, r_2, r_3 \ldots$ die Reste, so ist

$$
\begin{aligned}
a &= b \cdot q_1 + r_1 \quad , \\
b &= r_1 \cdot q_2 + r_2 \quad , \\
r_1 &= r_2 \; q_3 + r_3 \quad , \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= r_{n-1}\, q_n + r_n \quad , \\
r_{n-1} &= r_n \cdot q_{n+1} \quad .
\end{aligned}
$$

Daher ist der letzte Divisor r_n ein Teiler von r_{n-1}, folglich ist er auch ein Teiler des vorhergehenden Vielfachen $r_{n-1} \cdot q_n$ von r_{n-1} und mithin auch ein Teiler der Summe $r_{n-1}\, q_n + r_n$, d. h. ein Teiler von r_{n-2}. Indem man diese Schlußweise wiederholt, findet man nacheinander, daß r_n ein Teiler von r_{n-3}, von r_{n-4} u. s. f., und schließlich, daß r_n auch ein Teiler von b und von a, also ein gemeinschaftlicher Teiler der beiden gegebenen Zahlen sei.

Um nun auch zu beweisen, daß r_n der größte gemeinschaftliche Teiler von a und b ist, sei δ irgend ein andrer Teiler von a und b. Dann muß δ auch ein Teiler des Vielfachen $b \cdot q_1$ von b, und mithin auch ein solches von $a - b \cdot q_1$ oder von r_1 sein. Hieraus folgt wieder, daß δ auch in $r_1 \cdot q_2$ und mithin in $b - r_1\, q_2 = r_2$ aufgehen muß. Durch Wiederholung dieser Schlußfolgerung gelangt man zuletzt dahin, daß δ ein Maß von r_n sein muß. Daher kann δ nicht größer als r_n sein.

Aus diesem Beweise folgt noch, daß jeder gemeinschaftliche Teiler δ zweier Zahlen a, b auch in dem größten gemeinschaftlichen Teiler dieser Zahl aufgehen muß.

Soll das größte gemeinschaftliche Maß von drei oder mehr Zahlen gesucht werden, so bestimme man zunächst das größte gemeinschaftliche Maß δ zu irgend zweien der Zahlen, z. B. zu a und b. Da nun jeder gemeinschaftliche Teiler von a, b und c auch ein solcher von a und b allein, und somit ein Teiler von δ sein muß, so kann man δ an die Stelle der beiden Zahlen a und b setzen, wodurch die Anzahl der betreffenden Zahlen um 1 vermindert ist. Sucht man nun wieder zu irgend zweien dieser jetzt vorhandenen Zahlen den größten gemeinschaftlichen Teiler ε und setzt diesen für die beiden Zahlen, so kann man durch Wiederholung dieses Verfahrens zuletzt auf eine einzige Zahl kommen und diese muß die gesuchte sein.

Das im obigen entwickelte Verfahren dient auch zum Beweise des folgenden fundamentalen Lehrsatzes:

Ist δ ein gemeinschaftlicher Teiler von $a \cdot k$ und von b, und sind a und b relativ prim, so muß δ ein Teiler von k sein. Multipliziert man nämlich die Seiten einer jeden der oben für zwei Zahlen a, b aufgestellten Gleichungen mit k, so erhält man

$$
\begin{aligned}
ak &= bq_1k + r_1k \quad , \\
bk &= r_1q_2k + r_2k \quad , \\
r_1k &= r_2q_3k + r_3k \quad , \\
&\vdots \\
r_nk &= k \quad .
\end{aligned}
$$

Die letzte dieser Gleichungen folgt nämlich aus der hier gemachten Voraussetzung, daß a und b relativ prim seien, in welchem Fall ihr größter gemeinschaftlicher Teiler $r_n = 1$ ist. Ist nun δ ein gemeinschaftlicher Teiler von ak und b, so ist δ auch ein Teiler von $ak - bq_1k = r_1k$, also auch ein solcher von $bk - r_1q_2k = r_2k$ u. s. w. Durch Wiederholung dieser Schlußfolgerung erhält man zuletzt, daß δ ein Teiler von k sei.

Aus diesem Satze folgen unmittelbar die nachstehenden: 1) Sind a und b relativ prim und ist k ebenfalls relativ prim zu b, so ist auch das Produkt ak

relativ prim zu b. 2) Sind a und b relativ prim und geht b in ak auf, so ist b ein Teiler von k. 3) Allgemein: ist jede der Zahlen $a, b, c, d \ldots$ relativ prim zu jeder der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$, so ist auch das Produkt $abcd \ldots$ relativ prim zu $\alpha\beta\gamma\delta \ldots$ 4) Insbesondere ist a^n relativ prim zu b^m, wenn a und b relativ prim sind.

4. Ist a eine zusammengesetzte Zahl, hat sie also einen Teiler b, so kann sie als Produkt $b \cdot c$ dargestellt werden. Ist b wieder keine Primzahl, so kann sie aufs neue als Produkt zweier Zahlen $d \cdot e$ dargestellt werden. Da nun die Faktoren immer kleinere Zahlen werden müssen, so muß man durch hinreichend wiederholte Anwendung dieses Verfahrens schließlich einmal auf einen Teiler p kommen, der eine Primzahl ist. Es ist dann p auch ein Teiler von a und es kann daher a in der Form $a_1 \cdot p$ dargestellt werden. Da man nun mit a_1, falls sie nicht selbst schon eine Primzahl ist, dasselbe Verfahren wiederholen und so auch a_1 als Produkt einer Primzahl p_1 mit einer Zahl a_2 darstellen, dann wieder a_2 in derselben Weise behandeln und so weiter fortfahren kann, und da jede folgende der Zahlen $a_1, a_2 \ldots$ kleiner als die vorhergehende ist, so muß man schließlich auf eine Primzahl kommen. Somit kann jede zusammengesetzte Zahl als Produkt einer endlichen Anzahl von Faktoren dargestellt werden, die sämtlich Primzahlen sind. Man nennt dies die Zerlegung der Zahl in ihre Primfaktoren.

Diese Zerlegung kann bei mehr als zwei Faktoren in verschiedener Reihenfolge geschehen. Ist a als ein Produkt $b \cdot c$ dargestellt, so kann man jeden der Faktoren, sofern er nicht schon eine Primzahl ist, für sich weiter zerlegen, dann ebenso mit den neuen Faktoren verfahren u. s. w. So kann man z. B. für 144 zunächst $12 \cdot 12$, dann für jeden Faktor 12 entweder $2 \cdot 6$ oder $3 \cdot 4$ setzen, und so weiter berechnen, bis man $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ erhält.

Es fragt sich nun noch, ob man bei verschiedener Anordnung in jener Zerlegung auf verschiedene Schlußresultate gelangen kann, oder ob alle diese Resultate identisch sein müssen. Man überzeugt sich leicht davon, daß das letztere der Fall ist, und zwar durch folgenden Beweis:

Es seien durch zwei Zerlegungen die Resultate $a = p \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots p_n$ und $a = q \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots q_m$ erhalten worden. Da nun a durch q teilbar ist, so muß auch $p \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots p_n$ durch q teilbar sein, und da hier die einzelnen Faktoren Primzahlen sind, so folgt aus Nr. 3, daß q gleich einem dieser Faktoren, z. B. gleich p sein muß. Durch Division mit den gleichen Faktoren p und q findet man dann, daß $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots p_n = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots q_m$ sein muß. Auf diese beiden Produkte läßt sich wieder dieselbe Schlußfolgerung anwenden und indem man sie hinreichend oft wiederholt, überzeugt man sich, daß jeder Faktor, der in dem einen Produkte ein oder mehrere Male vorkommt, ebenso oft in dem andern vorkommen muß. Hieraus folgt aber, daß die Produkte, abgesehen von der Reihenfolge der Faktoren, genau dieselben sein müssen.

Man kann hiernach jede zusammengesetzte Zahl auf die Form $p^\alpha \cdot q^\beta \cdot t^\gamma \ldots$ bringen, in welcher p, q, t Primzahlen sind und $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ die Zahlen, die angeben, wie oft der betreffende Primfaktor in dem Produkte vorkommt. Diese Zerlegung kann nur zu einem Resultate führen.

Der vorstehende Satz führt zu einer meist bequemeren Methode, den größten gemeinschaftlichen Teiler mehrerer gegebenen Zahlen $a, b, c \ldots$ zu finden. Man zerlege zu diesem Zweck jede dieser Zahlen in ihre Primfaktoren und bilde das Produkt sämtlicher dieser Faktoren, die in jeder der gegebenen Zahlen enthalten sind. Kommt in derselben Zahl derselbe Primfaktor mehrfach vor, so ist er in dem gesuchten Teiler so oft zu setzen, als er in derjenigen gegebenen Zahl vorkommt, die ihn in der geringsten Anzahl enthält.

So ist beispielsweise $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$; $2000 = 2^4 \cdot 5^3$, also der größte gemeinschaftliche Teiler von 360, 300 und 2000 gleich $2^2 \cdot 5 = 20$.

Aus dem größten gemeinschaftlichen Teiler lassen sich alle andern gemeinschaftlichen Teiler der gegebenen Zahlen finden. Diese sind die einzelnen Primfaktoren des ersten und alle möglichen aus ihnen in unvollständiger Anzahl gebildeten Produkte.

So sind in dem vorigen Beispiel die übrigen gemeinschaftlichen Teiler 2, 5, 4 und 10.

5. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache gegebener Zahlen nennt man die kleinste Zahl, in der alle gegebenen als Teiler enthalten sind. Man erhält diese, indem man aus sämtlichen Primfaktoren der gegebenen Zahlen ein Produkt bildet, das jeden dieser Faktoren so oft enthält, als die Zahl, in der er am häufigsten vorkommt.

Dieses kleinste gemeinschaftliche Vielfache ist bekanntlich bei der Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche der Hauptnenner. Die für seine Bestimmung im Rechnen gewöhnlich gegebenen Regeln erhalten durch die vorstehenden Entwicklungen ihre wissenschaftliche Begründung. Im folgenden soll sie noch auf die zur leichten Ausführung der Zerlegung einer Zahl in ihre Primfaktoren nützlichen Regeln über die Kennzeichen der Teilbarkeit dekadischer Zahlen ausgedehnt werden.

§ 7. Zahlensysteme.

1. Unter einem Zahlensystem versteht man eine zur bessern Übersicht der unendlichen Reihe der Zahlen dienliche Anordnung der Zahlen nach einer bestimmten Grundzahl oder Basis und zwar in folgender Weise:

In dem gewöhnlichen dekadischen Zahlensystem, das die Grundzahl zehn hat, werden nur die neun ersten Zahlen durch besondere Zahlzeichen (Ziffern) bezeichnet. Eine Anzahl von zehn Einheiten wird als eine neue Einheit von einer höhern Ordnung angesehen und wieder durch 1 bezeichnet. Zum Unterschied von der ursprünglichen Einheit wird diese neue um eine Stelle weiter nach links geschrieben, wobei die leere Stelle rechts durch eine Null ausgefüllt wird. Eine Zahl, die mehrere solche »Zehner« enthält, wird dadurch geschrieben, daß man die Anzahl dieser Zehner in die weiter nach links stehende erste Stelle und sodann in die ursprüngliche Stelle entweder eine Null oder, wenn außerdem noch »Einer« vorhanden sind, die Anzahl dieser setzt. Zehn solche Zehner bilden wieder eine Einheit der nächst höhern Ordnung unter dem Namen Hundert, und die »Hunderter« werden in die zweite Stelle links von den Einern geschrieben. In derselben Weise wird weiter zu den Einheiten der folgenden Ordnungen aufgestiegen. Die nähere Kenntnis und der Gebrauch des dekadischen Zahlensystems ist hier als bekannt vorauszusetzen. Auf dieser Anordnung der Zahlen in ein System mit Hilfe der Bezeichnung der Ordnungen durch die Stellung und mit Hilfe der Null zum Ausfüllen leerer Stellen beruht die Leichtigkeit in der heutigen Ausführung unsrer Rechnungen im Gegensatz zu denen der alten Griechen und Römer und damit zu einem großen Teile auch die höhere Entwicklung der mathematischen Wissenschaften.

Man kann jedoch nicht bloß die Zahl zehn, sondern jede beliebige Zahl a als Grundzahl eines Zahlensystems annehmen. Diese aus a ursprünglichen Einheiten bestehende Zahl wird dann als die Einheit der ersten höhern Ordnung angesehen; a Einheiten dieser ersten Ordnung, also $a \cdot a$ oder abgekürzt a^2 Einheiten der ursprünglichen Art liefern eine Einheit zweiter Ordnung; $a\,a\,a = a^3$, ferner a^4 u. s. w. sind die Einheiten der folgenden höhern Ordnungen. Die ursprüngliche Einheit wird dementsprechend als Einheit nullter Ordnung (a^0) bezeichnet. Hiernach gibt es also, je nachdem $a = 2$, 3 u. s. w. ist, ein dyadisches, ein triadisches System u. s. w.

Hiernach bedeutet beispielsweise die Zahl 54321

im System mit der Grundzahl 6 $5 \cdot (6^4) + 4 \cdot (6^3) + 3 \cdot (6^2) + 2 \cdot (6) + 1$,
im System mit der Grundzahl 8 $5 \cdot (8^4) + 4 \cdot (8^3) + 3 \cdot (8^2) + 2 \cdot (8) + 1$,
im dodekadischen System $5 \cdot (12^4) + 4 \cdot (12^3) + 3 \cdot (12^2) + 2 \cdot (12) + 1$,
während sie im dekadischen System $= 5 \cdot (10^4) + 4 \cdot (10^3) + 3 \cdot (10^2) + 2 \cdot (10) + 1$

ist. Demnach ist diese Zahl im System mit der Grundzahl 6 gleichbedeutend mit der Zahl $5 \cdot 1296 + 4 \cdot 216 + 3 \cdot 36 + 2 \cdot 6 + 1 = 7465$ im dekadischen und dieselbe Zahl im System mit der Grundzahl 8 mit 22737 und im dodekadischen System mit 111049 im dekadischen. Umgekehrt ist die der dekadischen Zahl 4319 gleichwertige im dyadischen System 1000011011111, im triadischen 12220222, im dodekadischen 25 (XI) (XI), wobei XI für die hier fehlende Ziffer für elf Einheiten gesetzt ist.

Das Einmaleins lautet beispielsweise im System mit der Grundzahl 6:

$1 \cdot 1 = 1$	$2 \cdot 1 = 2$	$3 \cdot 1 = 3$	$4 \cdot 1 = 4$	$5 \cdot 1 = 5$	$10 \cdot 1 = 10$
$1 \cdot 2 = 2$	$2 \cdot 2 = 4$	$3 \cdot 2 = 10$	$4 \cdot 2 = 12$	$5 \cdot 2 = 14$	$10 \cdot 2 = 20$
$1 \cdot 3 = 3$	$2 \cdot 3 = 10$	$3 \cdot 3 = 13$	$4 \cdot 3 = 20$	$5 \cdot 3 = 23$	$10 \cdot 3 = 30$
$1 \cdot 4 = 4$	$2 \cdot 4 = 12$	$3 \cdot 4 = 20$	$4 \cdot 4 = 24$	$5 \cdot 4 = 32$	$10 \cdot 4 = 40$
$1 \cdot 5 = 5$	$2 \cdot 5 = 14$	$3 \cdot 5 = 23$	$4 \cdot 5 = 32$	$5 \cdot 5 = 41$	$10 \cdot 5 = 50$
$1 \cdot 10 = 10$	$2 \cdot 10 = 20$	$3 \cdot 10 = 30$	$4 \cdot 10 = 40$	$5 \cdot 10 = 50$	$10 \cdot 10 = 100$

Das dekadische Zahlensystem ist keineswegs das für die praktischen Rechnungen bequemste, da seine Grundzahl nur die beiden Teiler 2 und 5 hat; das dodekadische würde insofern vorteilhafter sein, als in ihm die Zahlen 2, 3, 4, 6, 8 und 9 als einfache Bruchteile der höhern Einheit erscheinen würden. In der Tat hat man im Verkehr vielfach neben dem dekadischen noch andre Systeme, zwar nicht für das eigentliche Zifferrechnen, aber doch für die übersichtliche Einteilung häufig gebrauchter Größen benutzt, wie z. B. bei dem frühern Duodezimalsystem der Längenmaße, wo 12 Linien als Einheit höherer Ordnung ein Zoll, zwölf Zolle ein Fuß genannt wurden u. s. w. Noch gegenwärtig werden in dieser Weise vereinzelt andre Systeme, ja zuweilen werden bei einer und derselben Art von Größen verschiedene Grundzahlen gebraucht; so setzt man z. B. bei Winkelgrößen 60 Sekunden gleich einer Minute, 60 Minuten gleich einem Grad, dagegen 90 Grad gleich dem rechten Winkel. Ähnliches gilt für die Zeitmaße.

2. Nur vereinzelt sind Bestrebungen aufgetreten, das dekadische Zahlensystem auch im bürgerlichen Rechnen durch ein zweckmäßigeres zu verdrängen. Da für die Grundzahl eines praktisch bequemen Zahlensystems weder sehr kleine Zahlen, wie 2 oder 3, noch größere, wie 15, 16 ... geeignet sind, weil bei erstern große Zahlen in übermäßiger Ausdehnung erscheinen, und bei letztern die Anzahl der notwendigen Ziffern zu groß wird, da ferner, wie schon bemerkt, auf eine möglichst große Teilbarkeit der Grundzahl Bedacht zu nehmen ist, so sind in der erwähnten Beziehung nur die Zahlen 12 und 6 als beachtenswert hervorgehoben worden. Derartige Bestrebungen müssen jedoch als aussichtslos bezeichnet werden. Dagegen hat man umgekehrt mehr und mehr das dekadische System auch auf alle im Handel und sonstigen Verkehr gebräuchliche Einteilungen, also auf Maße, Münzen, Gewichte u. s. w. auszudehnen gesucht und hierdurch nicht nur eine früher vermißte Gleichmäßigkeit solcher Maße u. s. w. in verschiedenen Provinzen und Ländern, sondern auch durch die Gleichartigkeit des Einteilungsprinzips manche Vorteile für das praktische Rechnen gewonnen. Diesen stehen allerdings auch Nachteile infolge der schon erwähnten geringen Teilbarkeit der Grundzahl gegenüber, und eine vollständige Durchführung des dekadischen Systems und des entsprechenden Rechnens dürfte überdies an der in das praktische Leben

tief eingreifenden gewohnten Zeiteinteilung ein schwer zu beseitigendes Hindernis finden. Das dekadische System ist kein natürliches, sondern ein willkürliches und künstliches; für die Wahl der Grundzahl 10 gibt es nur einen historischen, keinen mathematisch-wissenschaftlichen Grund. Der Wert des einmal gewählten Systems wird allerdings erhöht durch eine möglichst konsequente Durchführung und allgemeine Anwendung; aber überall, wo das Einteilungsprinzip durch die Natur gegeben und somit der Willkür entzogen ist, muß man auf die Forderung seiner Durchführung verzichten. Man kann das Jahr nicht in eine dezimale Anzahl von Tagen teilen, da diese Anzahl von der Natur unveränderlich gegeben ist.

3. Die Frage nach äußern Kennzeichen der Teilbarkeit einer dekadischen Zahl durch eine andre, die insbesondere auch für die Anwendung der Sätze in § 6 von Wert ist, hat von der im vorstehenden erläuterten Darstellung einer dekadischen Zahl z durch die Form

$$z = a \cdot 10^n + b \cdot 10^{n-1} + c \cdot 10^{n-2} + \ldots + p \cdot 10^2 + q \cdot 10 + r$$

auszugehen, wobei $a, b, c \ldots r$ die einzelnen Ziffern dieser Zahl sind. Da diese Zahl durch irgend eine andre Zahl k dividiert werden kann, indem man jeden Summanden einzeln durch k dividiert, so folgt, daß z durch k teilbar ist, wenn die Summe der Produkte aus ihren Ziffern $a, b \ldots$ und den Resten, die durch Division ihrer Einheiten $10^n, 10^{n-1} \ldots$ mit k entstehen, durch k teilbar ist. Bleibt dagegen bei der Division dieser Summe durch k ein Rest, so bleibt derselbe Rest bei der Division von z durch k.

Da nun $10, 10^2 \ldots 10^n$ sämtlich durch 2, 5 und $10, 10^2, 10^3 \ldots$ durch $4, 10^3, 10^4 \ldots$ durch 8 u. s. w. teilbar sind, ferner $10, 10^2 \ldots 10^n$ sowohl durch 3 als durch 9 dividiert, sämtlich zum Rest 1 geben, so folgt:

Eine dekadische Zahl z ist teilbar durch

$k = 2$, wenn ihre letzte Ziffer r durch 2 teilbar oder Null ist,

$k = 3$, wenn die Quersumme $a + b + c + \ldots + p + q + r$ ihrer Ziffern durch 3 teilbar ist,

$k = 4$, wenn die aus den beiden letzten Ziffern gebildete Zahl $10q + r$ durch 4 teilbar ist,

$k = 5$, wenn die letzte Ziffer 5 oder 0 ist,

$k = 8$, wenn die aus den drei letzten Ziffern gebildete Zahl $100p + 10q + r$ durch 8 teilbar ist,

$k = 9$, wenn die Quersumme durch 9 teilbar ist,

$k = 10$, wenn die letzte Ziffer Null ist.

Schreibt man ferner die Zahl z in der Form

$$\begin{aligned} & r + 11q + 99p + 1001o + 9999m + \ldots \\ & - \quad q + \quad .p - \qquad o + \qquad m - \ldots, \end{aligned}$$

so ergibt sich noch die folgende Regel: Eine dekadische Zahl ist durch 11 teilbar, wenn die Summe der an der ersten, dritten, fünften u. s. w., also überhaupt der an ungeraden Stellen stehenden Ziffern vermindert um die Summe der an geraden Stellen stehenden eine durch 11 teilbare Zahl oder Null gibt.

Kennzeichen für die Teilbarkeit durch zusammengesetzte Zahlen lassen sich aus denen für die Teilbarkeit durch Primzahlen ableiten; so ist eine Zahl durch 6 teilbar, wenn sie gleichzeitig durch 2 und durch 3 teilbar ist.

Die Kennzeichen, die man für die Teilbarkeit durch noch andre als die bisher erwähnten Zahlen abgeleitet hat, z. B. für 7, sind so wenig einfach, daß die wirkliche Ausführung der Division den Vorzug vor ihrer Anwendung verdient.

§ 8. Dezimalzahlen.

1. In derselben Weise, in der man in den Zahlensystemen von der ursprünglichen Einheit zu Einheiten höherer Ordnungen aufsteigt, kann man auch von den Einheiten höherer Ordnung zu Einheiten niederer Ordnungen herabsteigen und so auch die zwischen die ganzen Zahlen sich einschiebenden Bruchzahlen in das System einschließen. Diese Fortsetzung des Zahlensystems unterhalb der ursprünglichen Einheit verlangt zunächst die Auffindung einer Einheit, die zur ursprünglichen in derselben Beziehung steht, wie diese zur Einheit erster Ordnung. Wie also im dekadischen System jede folgende der Zahlen $10^n \ldots 1000$, 100, 10, 1 der zehnte Teil der vorigen ist, so muß die nächst niedere Einheit wieder der zehnte Teil der ursprünglichen, also $\frac{1}{10}$ sein, in gleicher Weise ist jede der weiter folgenden niederen Einheiten $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000} \ldots$ der zehnte Teil der vorhergehenden. Ist allgemein a die Grundzahl des Systems, so bezeichnet man den Bruch $\frac{1}{a}$ als die Einheit der -1ten Ordnung (a^{-1}), ebenso $\frac{1}{a^2}$ als Einheit der -2ten Ordnung (a^{-2}), u. s. f. allgemein $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ als Einheit der $-n$-ten Ordnung. Auch hier wird die Ordnung durch die Stellung bezeichnet, indem jede Anzahl von Einheiten eines niedern Ranges um eine Stelle weiter nach rechts geschrieben wird, als die Einheiten des vorhergehenden Ranges. Hierdurch entsteht die Notwendigkeit, die Stelle zu bezeichnen, welche die Einheiten der ursprünglichen (0ten) Ordnung einnehmen. Dies geschieht durch ein nach diesen gesetztes Komma. So bedeutet also beispielsweise die Zahl 314,897 für die Grundzahl 10 dasselbe wie $3 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 4 \cdot 8 \cdot \frac{1}{10} + 9 \cdot \frac{1}{100} + 7 \cdot \frac{1}{1000}$.

Für das dekadische System führen derartige Zahlen den Namen Dezimalzahlen. Eine Dezimalzahl zerfällt durch das Komma in zwei Teile. Die links vom Komma stehenden Ziffern geben eine ganze Zahl, die rechts stehenden eine Summe echter Brüche, die als ein echter Dezimalbruch betrachtet werden kann. Seine einzelnen Ziffern heißen Dezimalstellen. Eine Dezimalzahl besteht also im allgemeinen aus Ganzen und nach dem Komma folgenden Dezimalstellen. Der Dezimalbruch kann für sich geschrieben werden, indem man vor das Komma eine Null als ganze Zahl setzt. Es kann also die obige Dezimalzahl

$$314{,}897 = 314 + 0{,}897$$

geschrieben werden. Da

$$0{,}897 = \frac{800}{1000} + \frac{90}{1000} + \frac{7}{1000} = \frac{897}{1000}$$

ist, so könnte ein Dezimalbruch in Form eines gemeinen Bruches geschrieben werden. Hiernach ist nun auch

$$314{,}897 = 314\frac{897}{1000} = \frac{314897}{1000} \quad ,$$

so daß jede Dezimalzahl im allgemeinen als ein unechter Dezimalbruch betrachtet werden kann. So werden häufig die Begriffe Dezimalzahl und Dezimalbruch als identisch angesehen.

2. Eine Dezimalzahl wird mit 10 multipliziert, indem man jede Stelle mit 10 multipliziert, also ihren Rang um 1 erhöht. Daraus folgt, daß man diese Multiplikation ausführt, indem man das Komma eine Stelle nach rechts rückt, bei der Multiplikation mit 100, 1000 u. s. w. indem man das Komma zwei, drei u. s. w. Stellen nach rechts verschiebt. Kommt dann das Komma hinter die letzte Stelle rechts, so ist es überflüssig und die weitere Multiplikation mit 10 geschieht durch Anhängen von Nullen an die ganze Zahl. So ist

$43{,}973 \cdot 10 = 439{,}73$; $439{,}73 \cdot 100 = 43973$; $439{,}73 \cdot 1000 = 439730$;
$0{,}723 \cdot 10 = 7{,}23$; $0{,}723 \cdot 1000 = 723$; $0{,}00056 \cdot 1000 = 0{,}56$.

Umgekehrt wird eine Dezimalzahl durch 10, 100, 1000 u. s. w. dividiert, indem man das Komma eine, zwei, drei u. s. w. Stellen nach links rückt. Kommt dann das Komma hinter die letzte Stelle links, so hat man vor das Komma eine Null zu setzen. Z. B.:

$$568{,}35 : 100 = 5{,}6835\ ;\quad 5{,}6835 : 10 = 0{,}56835\ ;\quad 0{,}56835 : 100 = 0{,}0056835\ .$$

Damit ergeben sich die Rechenregeln für Dezimalzahlen aus denen für gemeine ganze Zahlen, ohne daß man nötig hätte, die Regeln der Bruchrechnung anzuwenden.

Daß zwei Dezimalzahlen addiert oder subtrahiert werden wie gemeine Zahlen ist ohne weiteres klar: man hat nur die Stellen gleichen Ranges zu addieren oder zu subtrahieren. Man setzt daher bequemerweise die Dezimalzahlen so untereinander, daß die Kommas untereinander stehen.

Eine Dezimalzahl wird mit einer ganzen Zahl multipliziert oder dividiert, indem man bei der Multiplikation oder Division das Komma unbeachtet läßt und in dem Produkt oder Quotienten wieder so viele Stellen durch das Komma abschneidet als die Dezimalzahl Dezimalstellen hatte. Zwei Dezimalzahlen werden multipliziert wie ganze Zahlen und von dem Produkt so viel Stellen durch das Komma abgeschnitten als die Summe der Zahlen der Dezimalstellen in beiden Dezimalzahlen beträgt. Man kann nämlich eine der Zahlen in eine ganze verwandeln, indem man das Komma wegläßt, dadurch hat man die Dezimalzahl mit 10 oder 100 oder 1000 u. s. w. multipliziert; dann muß man das Produkt wieder durch 10, 100, 1000 dividieren. Z. B.

$$5{,}426 \cdot 17{,}41 = 94{,}46\,666\ ;$$

denn es würde

$$5426 \cdot 1741 = 9\,446\,666\ ,\quad 5{,}426 \cdot 1741 = 9446{,}666$$

sein. Ebenso ist

$$0{,}134 \cdot 0{,}0598 = 0{,}008\,0132\ .$$

Eine Dezimalzahl wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man ohne Rücksicht auf das Komma dividiert und im Quotienten durch das Komma ebensoviele Dezimalstellen abschneidet als die Dezimalzahl hatte.

Eine Dezimalzahl wird durch eine andre dividiert, indem man das Komma in beiden um so viel Stellen nach rechts verschiebt, daß der Divisor eine ganze Zahl wird. Z. B.

$$16{,}30\,936 : 4{,}78 = 16\,30{,}936 : 478 = 3{,}412\ .$$

3. Bleibt bei der Division einer Dezimalzahl durch eine Dezimalzahl oder durch eine ganze Zahl ein Rest, so kann man dem Dividenden beliebig viele Nullen anhängen und hiernach mit der Ausführung der Division beliebig weit fortfahren. Doch ist vor dem Anhängen der Nullen das Komma im Resultat nach der in Nr. 2 angegebenen Regel zu bestimmen.

Ist der Dividend eine ganze Zahl, so kann man dieser ebenfalls nach Bestimmung des Kommas im Resultat beliebig viele Nullen als Dezimalstellen anhängen. Z. B.

$$\begin{array}{l} 17 : 5{,}12 = 1700 : 512 = 3{,}3203125 \\ \qquad\quad 1640 \\ \qquad\quad\ 1040 \\ \qquad\quad\ \ 1600 \\ \qquad\quad\ \ \ 640 \\ \qquad\quad\ \ \ 1280 \\ \qquad\quad\ \ \ \ 2560 \end{array}\ .$$

Hierbei ist es möglich, daß die Division erst spät oder gar nicht aufgeht. Daß der letzte Fall eintreten kann, ergibt sich aus folgendem: Die Division von Dezimalzahlen ist, abgesehen von der Bestimmung des Kommas, mit einer Division ganzer Zahlen identisch und man kann fragen, unter welcher Bedingung eine ganze Zahl b, mit der sich eine andre gegebene Zahl a nicht ohne Rest dividieren läßt, in einem Produkt von a mit einer der Zahlen 10, 100, 1000 u. s w. ohne Rest aufgeht. Unter der stets erfüllbaren Voraussetzung, daß a und b relativ prim sind, kann der Quotient $\frac{a \cdot 1000 \ldots}{b}$ nur dann eine ganze Zahl sein, wenn b ein Faktor von $1000 \ldots$ ist. Hieraus folgt, daß nach dem Anhängen von Nullen die Division nur dann ohne Rest aufgehen kann, wenn der Divisor b keine andern Faktoren als 2 und 5 enthält.

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so ist der Quotient eine Dezimalzahl mit unendlich vielen Dezimalstellen, besteht also aus einer ganzen Zahl und einem unendlichen Dezimalbruch. Da nun bei jeder Teildivision ein Rest bleiben muß, der kleiner als der, als ganze Zahl dargestellte, Divisor ist, so ist die Anzahl der möglichen verschiedenen Reste um 1 kleiner als dieser Divisor. Es muß also nach höchstens $b - 1$ Teildivisionen mit dem Divisor b ein Rest erscheinen, der schon einmal dagewesen ist und sofern an beide Reste auch dieselbe Ziffer (Null) angehängt wird, muß sich von da an das Divisionsverfahren in derselben Weise, wie von jenem ersten Reste ab, wiederholen. Es muß sich also auch im Quotienten von einer bestimmten Stelle an, dieselbe Zifferngruppe in derselben Weise wiederholen.

Beispiel: $15{,}3182 : 0{,}27 = 1531{,}82 : 27 = 56{,}73407407 \ldots$

181
198
92
110
200
110
200

Es kehrt hierbei die Zifferngruppe 407 fortwährend wieder.

Kehrt bei einem unendlichen Dezimalbruch dieselbe Zifferngruppe in derselben Ordnung immer wieder, so heißt der unendliche Dezimalbruch ein periodischer, und jene Zifferngruppe seine Periode. Beginnt die erste Periode mit der ersten Dezimalstelle; wie z. B. in $0{,}757575 \ldots$, so heißt der Dezimalbruch ein rein periodischer, gehen aber der ersten Periode Dezimalstellen vorher, die nicht dem Gesetze der Periode folgen, so heißt er ein gemischt periodischer.

Jede Division mit Dezimalzahlen, die nicht ohne Rest aufgeht, führt also auf einen periodischen Dezimalbruch als Resultat.

4. Auch die Division zweier ganzen Zahlen kann, wenn sie nicht aufgeht, indem man dem Dividenden ein Komma und beliebig viele Nullen anhängt, in der obigen Weise behandelt werden. Daher läßt sich auch jeder gemeine Bruch in einen Dezimalbruch verwandeln, indem man mit dem Nenner in den Zähler dividiert. So ist:

$\frac{1}{2} = 0{,}5$; $\frac{1}{3} = 0{,}33 \ldots$; $\frac{1}{4} = 0{,}25$; $\frac{1}{5} = 0{,}2$; $\frac{1}{6} = 0{,}1666 \ldots$; $\frac{3}{8} = 0{,}375$.

Umgekehrt läßt sich jeder Dezimalbruch in einen gemeinen Bruch verwandeln. Für endliche Dezimalbrüche versteht sich dies von selbst; es ist hier nur eine Formverwandlung vorzunehmen, indem man den durch das Komma bestimmten Nenner als solchen hinschreibt und, wenn möglich, den Bruch noch durch den größten gemeinsamen Faktor des Zählers und Nenners kürzt. So ist:

$$0{,}47 = \tfrac{47}{100} \; ; \quad 3{,}125 = \tfrac{3125}{1000} = \tfrac{25}{8} \; .$$

Ist dagegen der Dezimalbruch ein unendlicher periodischer, so kann man nach Anleitung folgender Beispiele verfahren:

1) $x = 0{,}801801\ldots$; $1000\,x = 801{,}801\ldots$, also $1000\,x - x = 801$, mithin $x = \frac{801}{999} = \frac{89}{111}$.

2) $3{,}151515\ldots$ Man setze $x = 0{,}1515\ldots$, also $100\,x = 15{,}15\ldots$, $100\,x - x = 15$, $x = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}$; mithin ist der gegebene Bruch gleich $3\frac{5}{33} = \frac{104}{33}$.

3) $0{,}14\,2186\,2186\ldots$ Man setze $x = 0{,}2186\,2186\ldots$ und bestimme wie vorher $x = \frac{2186}{9999}$, so ist der gegebene Bruch gleich $\frac{14{,}2186\,2186\ldots}{100} = 14\frac{2186}{9999} : 100 = \frac{142172}{9999} : 100 = \frac{71081}{499950}$.

Durch Verallgemeinerung dieser Beispiele lassen sich allgemeine Regeln ableiten, welche die Wiederholung des ganzen Verfahrens in jedem einzelnen Fall überflüssig machen.

§ 9. Unvollständige Dezimalzahlen.

1. Die Anzahl der Ziffern der Periode eines durch Division zweier Zahlen entstehenden unendlichen Dezimalbruchs muß, wie bemerkt, mindestens um 1 kleiner als der als ganze Zahl genommene Divisor sein. Sie ist möglicherweise geringer als dieser Grenzwert, kann ihn aber auch erreichen. Beispielsweise erhält man aus einem gemeinen Bruche, dessen Nenner 99 ist, nicht eine 98-stellige, sondern nur eine zweistellige Periode: dagegen hat die Periode für den Nenner 7 stets die volle Anzahl von 6 Stellen. Hieraus geht hervor, daß man, wenn der Divisor nicht eine kleine Zahl ist, bis zur Feststellung der Periode eine große Anzahl von Dezimalstellen zu bestimmen haben kann. Hierin liegt für das praktische Rechnen eine Unbequemlichkeit.

In der Praxis ist es nie möglich, die den Rechnungen zu Grunde liegenden Messungen mit vollkommener Genauigkeit auszuführen, da weder die dazu gebrauchten Meßinstrumente noch auch die menschlichen Sinne vollkommen sind. Auch gestatten die Bedürfnisse der Praxis stets, daß Größen vernachlässigt werden, die eine gewisse durch den jedesmal beabsichtigten Zweck bestimmte Grenze der Genauigkeit nicht übersteigen. Es ist daher in solchen Fällen gestattet, mit Zahlen zu rechnen, die nicht vollkommen genau sind, wenn nur der daraus entstehende Fehler des Resultats nicht über die im einzelnen Fall gestattete Grenze hinausgeht.

Eine solche nicht vollkommen genaue Zahl entsteht, wenn man bei einem Dezimalbruch nur eine Anzahl der Dezimalstellen benutzt und die folgenden vernachlässigt. Es fragt sich zunächst, welches die Grenzen der dabei begangenen Fehler sind. Da die erste Dezimalstelle die Zehntel, die zweite die Hundertstel, die dritte die Tausendstel enthält u. s. w., so ergibt sich, daß der Fehler bei dem Weglassen aller Dezimalstellen weniger als eine ganze Einheit, bei dem Weglassen der auf die erste folgenden Dezimalstellen weniger als $\frac{1}{10}$, bei dem Beibehalten von 2, 3, 4 ... Dezimalen weniger als $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ ... beträgt. Allgemein ist, wenn man n Dezimalstellen beibehält und die folgenden wegläßt, der Fehler kleiner als eine Einheit der letzten beibehaltenen Stelle, d. h. kleiner als $\frac{1}{10^n}$, wo 10^n ein Produkt von n Faktoren bedeutet, die sämtlich gleich 10 sind.

Eine schärfere Begründung dieses Satzes folgt daraus, daß der durch Weglassen aller Dezimalstellen begangene Fehler nicht größer als der Wert des periodischen Dezimalbruchs $0{,}999\ldots$, der bei Beibehaltung nur einer Dezimalstelle entstehende Fehler nicht größer als $0{,}0999\ldots$ sein kann u. s. w.

2. Eine Dezimalzahl, die durch Weglassen von Dezimalstellen abgekürzt ist, nennt man eine unvollständige Dezimalzahl. Bei dem Abkürzen ist, wenn die erste weggelassene Ziffer 5 oder mehr als 5 beträgt, die letzte beibehaltene Ziffer um eine Einheit zu erhöhen, denn in diesem Fall würde ohne die Erhöhung der Fehler über eine halbe Einheit der letzten Stelle betragen, während er bei der Erhöhung weniger als eine solche halbe Einheit beträgt. Man darf hiernach bei jeder unvollständigen Zahl annehmen, daß der Fehler weniger beträgt als die Hälfte einer Einheit der letzten angegebenen Stelle. Ist diese Stelle erhöht worden, so ist der unvollständige Bruch zu groß, im andern Fall zu klein.

Da hiernach der Fehler mit jeder Dezimalstelle, die mehr angegeben wird, nur ein Zehntel so groß ist als vorher, so kann man die Abkürzung immer so vornehmen, daß eine durch die praktischen Anforderungen an die betreffende Rechnung bestimmte Fehlergrenze nicht überschritten wird.

Da es überflüssig und zeitraubend ist, mit Dezimalstellen zu rechnen, die in der Anwendung keinen Gebrauch finden und wertlos sind, weil die den Rechnungen zu Grunde liegenden Messungen nicht mit entsprechender Genauigkeit ausgeführt wurden oder weil die Praxis die betreffende Genauigkeit des Resultats nicht verwertet, so wird der praktische Rechner nicht nur alle vorkommenden unendlichen Dezimalbrüche, sondern überhaupt alle, die mehr Dezimalstellen haben, als gebraucht werden, abkürzen. Das Rechnen mit solchen unvollständigen Zahlen erfordert aber, daß man stets über die Grenzen der begangenen Fehler, auch in den Resultaten, orientiert bleibe, damit sie das im einzelnen praktischen Fall erlaubte Maß nicht übersteigen.

3. Unter der Voraussetzung der Unvollständigkeit bedeutet nach dem vorhergegangenen beispielsweise:

1715	eine Zahl zwischen	1714,5	und	1715,5 ,
5,728	eine Zahl zwischen	5,7275	und	5,7285 ,
5,7280	eine Zahl zwischen	5,72795	und	5,72805 ,
500	eine Zahl zwischen	499,5	und	500,5 ,
5 Hundert	eine Zahl zwischen	450	und	550 ,
$3\frac{5}{6}$	eine Zahl zwischen	$3\frac{9}{12}$	und	$3\frac{11}{12}$.

Man darf daher z. B. in der unvollständigen Zahl 3,400 die Nullen am Ende nicht weglassen; da 3,4 bedeuten würde, daß die dritte und vierte Dezimale weggelassen, die für diese zu setzenden Ziffern also nicht bekannt seien, während durch 3,400 gesagt wird, daß die Hundertstel und Tausendstel bekannt und mit in Rechnung gezogen sind.

Zur Beurteilung der Genauigkeit einer Zahlangabe genügt nicht die Kenntnis der Anzahl der angegebenen Dezimalstellen. Beispielsweise ist die Zahl 573 Zentimeter ebenso genau als die Zahl 5,73 Meter, denn die Fehlergrenze beträgt bei beiden Zahlenangaben $\frac{1}{2}$ Zentimeter. Entsprechend ist die Zahl 5329 genauer als die Zahl 0,173, denn ein Fehler von 0,5 ist im Verhältnis zu der Zahl 5329 geringer als ein Fehler von 0,0005 im Verhältnis zur Zahl 0,173; im ersten Fall beträgt der Fehler nur $\frac{1}{10658}$, im letzten $\frac{1}{346}$ der betreffenden Zahl.

Man hat daher unter der Genauigkeit einer Zahlangabe das Verhältnis der Zahl zu ihrer Fehlergrenze, also zu 5 Einheiten der ersten nicht angegebenen Stelle zu verstehen.

Bei der Addition unvollständiger Zahlen werden alle Summanden auf die gleiche Anzahl von Stellen abgekürzt angenommen, denn andernfalls würden im Resultat doch nicht mehr Stellen verbürgt sein, als der am meisten abgekürzte Summand enthält. Sind z. B. 0,15274 und 3,481 zu addieren, so sind im Resultat die Zehntausendstel und die Hunderttausendstel nicht zu bestimmen, weil sie in dem zweiten Summanden fehlen. Man kürzt daher den ersten zu 0,153 ab.

Zur Bestimmung der Fehlergrenze der Summe ist, da die Fehler aller einzelnen Summanden möglicherweise in demselben Sinne wirken können, eine halbe Einheit der letzten benutzten Dezimale mit der Anzahl der Summanden zu multiplizieren. Werden z. B. zwölf fünfstellige Dezimalbrüche addiert, so kann die Summe bis zu sechs Einheiten der fünften Dezimale zu groß oder zu klein sein. Hiernach läßt sich umgekehrt leicht bestimmen, wieviel Dezimalstellen die Summanden haben müssen, auf wie viele man diese also abzukürzen hat, falls sie genauer gegeben sind, damit der Fehler in der Summe eine vorher angegebene Grenze nicht übersteige. Um die n-te Dezimale in der Summe sicher zu haben, so daß also der Fehler der Summe eine halbe Einheit dieser n-ten Stelle nicht übersteigt, muß man, wenn die Zahl der Summanden unter 10 ist, $n + 1$-stellige Zahlen addieren; bei mehr als 10 und weniger als 100 Summanden müssen diese $n + 2$-stellig sein.

Für genauere Rechnungen mit abgekürzt gegebenen Zahlen fügt man der Summe die Angabe ihrer Fehlergrenze hinzu. Hierbei können, wenn von den verschiedenen Summanden verschiedene Anzahlen von Stellen bekannt sind, die überzähligen Ziffern zu einer Verminderung der anzunehmenden Fehlergrenze von Nutzen sein. Ist z. B. die Summe folgender Zahlen zu berechnen

$$\begin{array}{r} 0{,}38721 \\ 5{,}369 \\ 4{,}1276\ , \end{array}$$

so erhält man nach Abkürzung des ersten und des dritten Summanden auf je drei Stellen die Summe 9,884 mit der Fehlergrenze $\pm$ 0,0015. Benutzt man dagegen die Kenntnis auch der vierten Stelle in zwei Summanden, so erhält man zwar die Summe ebenfalls nur auf drei Dezimalstellen verbürgt, aber zur Fehlergrenze nur $\pm$ 0,0006, da man die Fehler jener beiden Summanden genauer kennt.

Bei der Subtraktion unvollständiger Zahlen gilt Entsprechendes, wie bei der Addition. Die Fehlergrenze der Differenz zweier n-stelligen Dezimalbrüche ist, da auch hier die Fehler der einzelnen Glieder sich summieren können, gleich einer ganzen Einheit der n-ten Stelle. Um also n Stellen verbürgt zu erhalten, müssen der Minuend und der Subtrahend $n + 1$-stellig genommen werden.

4. Um den Fehler bei der Multiplikation zweier unvollständiger Dezimalzahlen zu beurteilen, sei angenommen, daß eine m-stellige Zahl mit einer n-stelligen multipliziert werden solle. Bei vollständiger Ausrechnung erscheinen dann im Resultat $m + n$ Dezimalstellen; man sieht jedoch ein, daß diese, wenn die Faktoren abgekürzte Zahlen waren, nur zum Teil brauchbar sind; denn fügte man jenen Faktoren noch eine oder mehrere Dezimalstellen hinzu, so würden auch die letzten Ziffern des vorigen Resultats anders ausfallen. Vergleicht man z. B. die beiden Rechnungen

0,2182 · 0,243	0,21823 · 0,2434
0,04364	0,043646
8728	87292
6546	65469
0,0530226	87292
	0,053117182

miteinander, so erkennt man leicht, daß, wenn die Faktoren des ersten Produkts durch Abkürzung aus denen des zweiten entstanden sind, von dem ersten Resultat nur 0,053 richtig ist. Die Berechnung der übrigen Stellen war daher überflüssig.

Auch wenn die beiden Faktoren genaue Zahlen sind, im Resultat jedoch keine so große Genauigkeit, als es in diesem Falle bietet, verlangt ist, entsteht die Aufgabe, durch ein abgekürztes Multiplikationsverfahren die Berech-

nung der überflüssigen Ziffern zu ersparen. Genügt z. B. für die praktische Anwendung die Genauigkeit von drei Dezimalen, und multipliziert man zwei genaue dreistellige Dezimalbrüche, so erhält man im Resultat sechs Dezimalen, von denen die drei letzten wieder gestrichen werden, so daß also ihre Berechnung nicht nötig war.

Man beachte für den vorliegenden Zweck, daß ein Produkt unvollständiger Zahlen höchstens mit derjenigen Genauigkeit angegeben werden kann, die das Produkt des minder genauen Faktors mit der höchsten Stelle des genaueren Faktors erhält. Daher nehme man den ungenaueren Faktor, also den, der die wenigsten geltenden Ziffern hat, zum Multiplikanden. Multipliziert man dann auf die Art, bei der man mit der höchsten Ziffer des Multiplikators beginnt, so hat man nur die nach rechts auszurückenden Stellen der folgenden Teilprodukte wegzulassen und zu beachten, ob infolge dieses Weglassens die letzte bleibende Ziffer zu erhöhen ist. Man verkürzt also den Multiplikand für jedes folgende Teilprodukt um eine Stelle, wie das nachstehende Beispiel zeigt:

$$\begin{array}{r} 5{,}274 \cdot 8{,}165 \\ \hline 42{,}192 \\ 527 \\ 316 \\ 26 \\ \hline 43{,}061 \end{array}$$

Für das erste Teilprodukt ist hier 5,274 mit 8 multipliziert; dann ist in 5,274 die letzte Ziffer 4 weggelassen, also 527 mit 1 multipliziert; darauf ist auch 7 weggelassen und also für das dritte Teilprodukt nur $5{,}2 \cdot 6$ berechnet, jedoch dabei beachtet, daß die weggelassene Ziffer 7 durch ihr Produkt mit 6 noch das Teilprodukt um die im Sinne behaltene 4 erhöht; endlich ist 5 mit 5 multipliziert und das Teilprodukt um die aus $5 \cdot 2$ im Sinne behaltene 1 vermehrt. In dem Produkte ist in der Regel nur die letzte Stelle unsicher, da die Fehler der letzten Stellen der Teilprodukte diese beeinflussen können.

Um jedoch die Fehlergrenze des abgekürzten Produkts näher zu bestimmen, unterscheiden wir den Fall, in dem die gegebenen Faktoren genaue, und den, in dem sie abgekürzte Zahlen sind. Im ersten Fall entsteht eine Ungenauigkeit des Produkts nur dadurch, daß die einzelnen Teilprodukte, mit Ausnahme des ersten, abgekürzt worden sind; die Unsicherheit beträgt also so oft eine halbe Einheit der letzten angegebenen Stelle, als die um 1 verminderte Anzahl der geltenden Ziffern des Multiplikators angibt. Man kann selbstverständlich diese Unsicherheit verringern, wenn man bei der Multiplikation auch den Betrag der jedesmal zuerst weggelassenen Ziffer des Produkts berücksichtigt.

Sind dagegen die Faktoren abgekürzte Zahlen, so multipliziere man jeden der Faktoren mit der ersten fehlenden Stelle des andern Faktors, für die, falls sie unbekannt ist, 5 genommen werden muß, und addiere die beiden Produkte. Denn ist z. B. eine vierstellige Zahl a mit einer dreistelligen b zu multiplizieren, so hat man

$$(a \pm 0{,}00005) \cdot (b + 0{,}0005) = a\,b + 0{,}00005 \cdot b + 0{,}0005 \cdot a \pm 0{,}000000025\,.$$

Vernachlässigt man das gegen die übrigen kleine letzte Glied dieser Entwicklung, so sieht man, daß das Produkt $a\,b$ um $+ (0{,}00005 \cdot b + 0{,}0005 \cdot a)$ unsicher ist.

Für die Praxis genügt meist schon folgendes: Man multipliziere die erste fehlende Stelle jedes Faktors, für die nötigenfalls 5 angenommen wird, mit der höchsten geltenden Ziffer des andern Faktors; dasjenige dieser beiden Produkte, das den höhern Wert hat, bestimmt die höchste unsichere Ziffer. Für das Produkt

$2{,}1457\ldots \times 8837{,}42$ beispielsweise hat man $0{,}00005 \cdot 8000 = 0{,}4$; $2 \cdot 0{,}005 = 0{,}010$; die Unsicherheit beträgt also jedenfalls mehr als 0,4 und reicht also schon bis in die Ordnung der Zehntel. Ebenso erhält man z. B. für $0{,}4236\ldots \times 9{,}84253\ldots$ zunächst $0{,}00005 \cdot 10 = 0{,}0005$; $0{,}4 \cdot 0{,}000005 = 0{,}000002$, als Fehlergrenze darf daher 0,0005 angenommen werden.

5. Für die Division mit unvollständigen Dezimalzahlen erhält man durch entsprechende Entwicklungen, wie bei der Multiplikation folgendes:

Es sei zunächst vorausgesetzt, daß Divisor und Dividend genaue Zahlen sind, und nur das Resultat bis auf eine bestimmte Anzahl von Stellen abgekürzt erscheinen soll. Man bestimme die erste geltende Stelle des Quotienten wie gewöhnlich und kann dann auch noch beliebig viele folgende Ziffern in gleicher Weise berechnen, ehe man das abgekürzte Divisionsverfahren beginnt. Bei diesem hängt man an den jedesmal vorher gebliebenen Rest nicht die betreffende Ziffer des Dividenden oder eine Null an, sondern streicht jedesmal die letzte vorhandene Ziffer des Divisors, berücksichtigt jedoch bei der Bildung des Teilprodukts diese weggelassene Ziffer noch in Gedanken, um das dabei im Sinn Behaltene zu verwerten. Im folgenden ist die genaue Division zweier Dezimalzahlen mit der abgekürzten in verschiedener Ausdehnung der Abkürzung, an einem Beispiel zur Vergleichung zusammengestellt:

20349,85 : 312,4 = 203498,5 : 3124

203498,5 : 3124 = 65,1403649 ..

16058 ...

4385 203498,5 : 3124 = 65,1403649

12610 16058 ....

11400 4385 203498,5 : 3124 = 65,1404

20280 12610 16058 ...

15360 11400 4385 203498,5 : 3124 = 65,140

28640 2028 1261 16058

524 154 12 439

29 0 127

1 2

Um hierbei die Fehlergrenze des Quotienten zu bestimmen, beachte man zunächst, daß der Fehler bei der vollständigen Division, in Einheiten der letzten Stelle des Quotienten ausgedrückt, gleich dem Quotienten des zuletzt gebliebenen Restes durch den Divisor ist, im obigen Beispiel also gleich $\frac{524}{3124}$. Bei der abgekürzten Division ist der letzte Divisor die höchste Ziffer des ursprünglichen Divisors, der letzte Rest aber kann bis zu so vielen halben Einheiten der betreffenden Stelle ungenau sein, als die Anzahl der abgekürzt berechneten Teilprodukte beträgt. Man erhält hiernach die Fehlergrenze des Quotienten, wenn man den letzten Rest um diesen möglichen Fehler vermehrt oder vermindert und das Resultat durch die erste geltende Ziffer des Divisors dividiert.

Sind ferner schon der Divisor und der Dividend ungenaue Zahlen, so wird die erste Stelle des Quotienten, wie gewöhnlich, bestimmt und für die folgenden sogleich das abgekürzte Verfahren in der vorher angegebenen Weise angewendet, so daß also an keinen Rest eine weitere Ziffer des Dividenden oder eine Null angehängt wird. Ist der Divisor genauer als der Dividend, so muß man den Divisor so weit abkürzen, bis sein Produkt mit der ersten Ziffer des Quotienten vom Dividenden abgezogen werden kann. In 0,527 : 471,39 z. B. oder

52,7 : 47139 = 0,00112

56

9

0

sind an 52,7 nicht die fehlenden zwei Nullen anzuhängen, sondern 47139 ist durch Abstreichen von zwei Stellen abzukürzen, man subtrahiert also 471 von 527, streicht darauf im Divisor auch die 1 und dividiert also mit 47 in den vorher gebliebenen Rest 56. Darauf wird mit 4 in den Rest 9 dividiert, jedoch berücksichtigt, daß die weggelassene Ziffer 7 des Divisors noch eine im Sinne behaltene 1 zu dem Produkt $4 \cdot 2 = 8$ hinzufügt. Der letzte Rest ist also 0. Hierbei ist die letzte Stelle des Quotienten infolge des möglichen Fehlers in dem letzten Reste unsicher.

Ist dagegen der Divisor ungenauer als der Dividend, so ist der Dividend auf so viele Stellen abzukürzen, als zur Subtraktion des ersten Teilprodukts erforderlich sind und dann ist wie vorher abgekürzt zu dividieren.

Beispiel: $643{,}18 : 5{,}142 = 64318_{(0)} : 5142 = 125{,}1$

1290
262
5
0 .

Das erste Teilprodukt $5142 \cdot 1 = 5142$ ist hier von 6431 abgezogen, die folgende Ziffer 8 wird abgestrichen und nur insofern berücksichtigt, als der Rest 1289 um 1 zu erhöhen ist. Dann wird im Divisor die 2 abgestrichen, darauf das Teilprodukt $2 \cdot 514_2 = 1028$ vom Reste 1290 subtrahiert, dann auch die 4 im Divisor abgestrichen, das neue Teilprodukt $51{,}4 \cdot 5 = 257$ von dem vorigen Reste 262 subtrahiert u. s. w.

Die genauere Bestimmung der Fehlergrenze ist hier umständlicher als vorher, weil nicht bloß die Ungenauigkeit des letzten Restes, sondern auch die des Divisors und des Dividenden zu berücksichtigen ist. Man kann folgende Regel aufstellen, welche daraus folgt, daß

$$\frac{a+\delta}{b-\varepsilon} - \frac{a}{b} = \frac{ab + b\delta - ab + a\varepsilon}{b(b-\varepsilon)} = \frac{b\delta + a\varepsilon}{b(b-\varepsilon)} > \frac{b\delta + a\varepsilon}{b^2} \text{ oder } > \left(\delta + \frac{a}{b}\varepsilon\right) : b$$

ist: Man multipliziere eine halbe Einheit der letzten Stelle des Divisors mit dem auf seine erste geltende Ziffer abgekürzten Quotienten, addiere zum Produkt eine halbe Einheit der letzten Stelle des Dividenden und dividiere die Summe durch den Divisor oder seine höchste geltende Stelle. Der Fehler ist kleiner als das hierbei entstehende Resultat. In dem vorher berechneten Beispiel $643{,}18 : 5{,}142$ hat man also, da 643,18 auf 643,2 abgekürzt wird, $(0{,}0005 \cdot 100 + 0{,}05) : 5 = 0{,}02$, in dem diesem vorhergehenden Beispiel $0{,}527 : 471{,}39$, das auf $0{,}527 : 471$ abgekürzt wurde, $(0{,}5 \cdot 0{,}001 + 0{,}0005) : 500 = 0{,}000002$.

6. Die Anwendung der Rechnung mit unvollständigen Dezimalzahlen zeigen folgende Beispiele:

1. Das Licht gebraucht 8,22 Minuten, um den Weg von der Sonne bis zur Erde (20658000 geogr. Meilen) zurückzulegen. Wieviel Meilen durchläuft es in jeder Sekunde?

$8{,}22\ min = 8{,}22 \cdot 60\ sec = 493{,}2\ sec$
$20658\,(0000) : 4932 = 41890$ Meilen .
930
437
43
— 1

2. Ein Mondmonat, d. h. die Zeit von einem Neumonde bis zum nächsten, dauert 29,530588 Tage. Wieviel Mondmonate verfließen in 19 Sonnenjahren, wenn ein solches zu 365,24222 Tagen gerechnet wird?

365,24222 · 19	69396022 : 295305,88 = 234,997099, rund 235 Monate.
3652,4222	10334846
3287 1800	1475670
6939 6022	294447
	28672
	2095
	28
	2
	0 .

3. Man berechne den Flächeninhalt F eines Kreises, wenn der Radius $r = 2{,}178\ m$ gegeben ist. Es ist $F = \pi r^2$, also

$r^2 = 2{,}178 \cdot 2{,}178$,	$F = 4{,}743 \cdot 3{,}142 = 14{,}902\ m^2$.
4,356	14,229
218	474
152	190
17	9
4,743	14,902

4. Man berechne, wieviel Tage, Stunden, Minuten und Sekunden ein Jahr hat, wenn es 365,24222 Tage enthält.

0,24222 · 24	0,8133 · 60	0,798 · 60
4,8444	48,798	$47{,}8^{(8)}$
9689		
5,8133		

Also ist 1 Jahr = 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten 47,9 Sekunden.

Zweiter Abschnitt.

Die Operationen dritter Stufe.

§ 10. Das Potenzieren.

1. Ein Produkt, dessen Faktoren einander gleich sind, wird eine Potenz genannt und durch

$$a^n$$

bezeichnet, wobei a einer der gleichen Faktoren, n die Anzahl dieser Faktoren ist und a die Basis, n der Exponent der Potenz genannt wird. Man liest den obigen Ausdruck »a zur n-ten Potenz« oder kurz »a zur n-ten«, oder »a hoch n«.

Der Exponent ist eine natürliche Zahl.

Es ist also $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$; $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$; $a^3 = a \cdot a \cdot a$. (vgl. § 5 Nr. 3).

Die Berechnung des Wertes einer Potenz, als einer Verbindung zweier Zahlen a und n wird als eine neue Operation mit dem Namen Potenzieren bezeichnet und ist eine dritte Stufe der möglichen Verbindungen von Zahlen.

Bei dieser Operation ergibt sich eine wesentliche Abweichung von den beiden vorhergehenden direkten Operationen erster und zweiter Stufe, der Addition und der Multiplikation. Denn während bei diesen die Grundgesetze

$a + b = b + a$ und $a \cdot b = b \cdot a$ Geltung hatten, zeigt bei der Potenzierung jedes beliebige Beispiel (mit Ausnahme von 2^4 und 4^2), daß

$$a^n \text{ nicht gleich } n^a$$

ist. Die Bestandteile einer Potenz können nicht vertauscht werden. Addition und Multiplikation sind kommutative Operationen, das Potenzieren nicht. Daher erhalten die Basis und der Exponent keinen gemeinschaftlichen Namen und die beiden umgekehrten Operationen, die aus der Potenzierung hervorgehen, nämlich die Bestimmung von x aus den Gleichungen $x^n = c$ und $a^x = c$ sind verschieden.

Die zweite Potenz a^2 einer Zahl a wird das Quadrat dieser Zahl genannt und »a im Quadrat« oder abgekürzt »aQuadrat« gelesen. Die dritte Potenz a^3 heißt auch der Kubus, die vierte das Biquadrat von a.

Zwischen dem Begriff der Potenz a^n und dem Begriff ihres durch Ausführung der Rechnung entstehenden Wertes bestehen analoge Bestimmungen, wie bei den Operationen erster und zweiter Stufe.

2. Zur Entwicklung der Gesetze des Potenzierens lassen wir zuerst die Basis a einen mittels der bekannten Operationen zusammengesetzten Ausdruck sein und erhalten folgende Regeln:

Für die Potenzierung einer Summe oder Differenz ergibt die Ausführung der Multiplikation in $(a \pm b) \cdot (a \pm b) \cdot (a + b) \ldots$, daß

$$\begin{aligned}
(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \quad , \\
(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad , \\
(a + b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
(a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \quad , \\
(a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad , \\
(a - b)^4 &= a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4
\end{aligned}$$

ist. Man ersieht schon hieraus, daß die Aufgabe, allgemein eine Formel für die Entwicklung von $(a \pm b)^n$ aufzustellen, zu keinem Resultate führen kann, das hinreichend einfach ist, um an dieser Stelle Erörterung finden zu können. Es empfiehlt sich daher, vorläufig bei Ausdrücken von der Form $(a \pm b)^n$ diese unverändert zu lassen und bei Zahlenbeispielen die Ausrechnung des Resultats dieser Form entsprechend vorzunehmen. Außer den obenstehenden einfachsten Fällen merke man sich außerdem, daß $(a + b)^n$ nicht gleich $a^n + b^n$ gesetzt werden darf, wozu eine vermeintliche Analogie mit $(a + b) \cdot n$ Anfänger irrtümlich verleiten könnte.

Für die Potenzierung eines Produkts folgt dagegen aus

$$(ab)^n = (ab)(ab)(ab) \ldots = (aaa \ldots^n) \cdot (bbb \ldots^n) \quad .$$

$$1) \qquad (ab)^n = a^n \cdot b^n \quad ,$$

und dieses Gesetz läßt sich leicht auf Produkte mit beliebig vielen Faktoren ausdehnen, die also potenziert werden können, indem man jeden Faktor potenziert und dann die Potenzen multipliziert.

In entsprechender Weise ergibt sich für die Potenzierung eines Quotienten aus

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots = \frac{aaa \ldots}{bbb \ldots} \quad ,$$

$$2) \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad ,$$

oder daß ein Bruch potenziert wird, indem man Zähler und Nenner potenziert und die Potenzen entsprechend dividiert.

So ist beispielsweise auch

$$\left(\frac{a\,b\,c}{d\,e\,f}\right)^n = \frac{a^n\,b^n\,c^n}{d^n\,e^n\,f^n}\,; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^m = \frac{a^n}{b^n} \cdot \frac{c^m}{d^m} = \frac{a^n \cdot c^m}{b^n \cdot d^m} \quad .$$

Ferner ist

$$(\tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4}\,, \quad (\tfrac{1}{2})^3 = \tfrac{1}{8}\,, \quad (\tfrac{2}{3})^3 = \tfrac{8}{27}\,, \quad (\tfrac{5}{2})^3 = 1\tfrac{25}{8} \quad .$$

Man sieht ein, daß die Potenzen echter Brüche hiernach um so kleiner, die Potenzen unechter Brüche um so größer werden, je größer der Exponent ist.

Um endlich eine Potenz a^m zu potenzieren, hat man 1) wiederholt anzuwenden und findet

$$(a^m)^n = (a \cdot a \cdot a \ldots^m)^n = a^n \cdot a^n \cdot a^n \ldots^m = (a^n)^m \quad .$$

Außerdem kann man

$$(a^m)^n = (a\,a\,a \ldots^m) \cdot (a\,a\,a \ldots^m) \cdot (a\,a\,a \ldots^m) \ldots$$

setzen und erkennt, daß man nach Entfernung der Klammern ein Produkt erhält, dessen Faktoren sämtlich gleich a sind, und in dem die Anzahl der Faktoren gleich $m \cdot n$ ist, so daß es als Potenz $a^{m\,n}$ geschrieben werden darf. Somit ist

$$3) \qquad (a^m)^n = (a^n)^m = a^{m\,n} \quad .$$

Soll eine Potenz potenziert werden, so kann man die Reihenfolge der Exponenten ändern oder die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenzieren. Dieselbe Regel läßt sich durch Wiederholung auf mehr als zwei aufeinander folgende Exponenten ausdehnen. So ist:

$$[(a^2)^3]^4 = [(a^3)^2]^4 = (a^6)^4 = (a^4)^6 = a^{24} \quad .$$

3. Während vorher für die Basis einer Potenz ein zusammengesetzter Ausdruck gesetzt war, soll nun angenommen werden, daß der Exponent eine Summe, eine Differenz, ein Produkt oder ein Quotient sei.

Soll ein Produkt von $m + n$ gleichen Faktoren a gebildet werden, so kann man das Produkt in zwei von m und n Faktoren zerlegen, also

$$a^{m+n} = \overset{m}{a\,a\,a \ldots} \cdot \overset{n}{a\,a\,a\,a \ldots}$$

setzen, so daß

$$4) \qquad a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

erhalten wird.

Eine Zahl wird mit einer Summe potenziert, indem man sie mit jedem Summanden potenziert und die Potenzen multipliziert. So ist

$$3^7 = 3^{2+5} = 3^2 \cdot 3^5 \quad ,$$

$$a^{x+y+z} = a^{x+y} \cdot a^z = a^x \cdot a^y \cdot a^z \quad .$$

Ist der Exponent eine Differenz $m - n$, und nimmt man die Basis a zunächst m mal als Faktor, so hat die entstandene Potenz a^m den Faktor n mal mehr als verlangt ist. Die n überzähligen Faktoren können durch Division mit a^n wieder entfernt werden, und somit ist

$$5) \qquad a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n} \quad .$$

Eine Zahl wird mit einer Differenz potenziert indem man sie mit dem Minuenden und Subtrahenden potenziert und die erste der beiden Potenzen durch die zweite dividiert. Hierbei ist, da $m - n$ eine natürliche Zahl sein muß, vorausgesetzt, daß der Minuend m größer ist als der Subtrahend n.

Ist ferner der Exponent ein Produkt mn, so ergibt sich, indem man mn als eine Summe $m + m + \ldots^n$ oder $n + n + n + \ldots^m$ darstellt, aus 4), oder auch durch Umkehrung von 3)

$$6) \qquad a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m \quad .$$

Eine Zahl wird mit einem Produkt potenziert, indem man sie mit den Faktoren nacheinander und zwar in beliebiger Reihenfolge potenziert.

Der Fall endlich, in dem der Exponent ein Quotient ist, kann nach der Erklärung der Potenz nur dann eintreten, wenn der Dividend ein Vielfaches des Divisors ist.

4. Zu der Aufgabe, die Gesetze des Potenzierens mit zusammengesetzten Zahlen zu entwickeln, tritt noch die hinzu, die verschiedenen Rechnungsarten auf Potenzen anzuwenden, also zu fragen, wie man Potenzen addieren, subtrahieren, multiplizieren, dividieren oder potenzieren kann.

Für die Addition und Subtraktion beliebiger Potenzen lassen sich keine einfachen Gesetze entwickeln. Ausdrücke, wie $a^m + b^n$, können also nicht durch gleichwertige von einfacherer Form ersetzt und müssen bei bestimmten Zahlenbeispielen ausgerechnet werden. Daß man sich insbesondere zu hüten hat, etwa $a^n \pm b^n = (a \pm b)^n$ zu setzen, folgt aus Nr. 2. Auch ein Produkt beliebiger Potenzen gestattet keine einfache Umformung. Dagegen ist eine solche möglich, wenn entweder die Basen oder die Exponenten einander gleich sind, und dasselbe gilt für Quotienten von Potenzen. Man erhält nämlich durch Umkehrung der Formeln 1) bis 4) die folgenden:

$$7) \qquad a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad ,$$

$$8) \qquad a^m \cdot b^m = (a\,b)^m, \quad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad .$$

Diese Regeln lassen sich kurz ausdrücken:

Potenzen mit gleichen Basen werden multipliziert oder dividiert, indem man ihre Exponenten addiert oder subtrahiert:

Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert oder dividiert, indem man die Basen multipliziert oder dividiert.

Daher ist auch

$$a^x \cdot a^y \cdot a^z = a^{x+y+z}, \quad a^m \cdot b^m \cdot c^m = (a\,b\,c)^m, \quad \frac{a^x \cdot a^y}{a^z} = a^{x+y-z} \quad .$$

Die Potenzierung einer Potenz ist bereits durch 3) erledigt.

5. Nach der Erklärung der Potenz kann nur die Basis gleich Null oder negativ sein. Ist die Basis 0, so folgt aus $0 \cdot 0 = 0$, daß jede Potenz der Zahl 0 gleich Null ist. Ist die Basis negativ, so folgt aus

$$(-a)^2 = (-a) \cdot (-a) = +a^2; \quad (-a)^3 = (-a)^2 \cdot (-a) = -a^3 \quad ,$$

$$(-a)^4 = (-a)^3 \cdot (-a) = +a^4; \quad (-a)^5 = (-a)^4 \cdot (-a) = -a^5 \quad ,$$

u. s. w., allgemein

$$(-a)^{2n} = +a^{2n}; \quad (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1} \quad ,$$

d. h. man potenziert eine negative Zahl, indem man ihren absoluten Wert potenziert und der Potenz bei geradem Exponenten das Vorzeichen +, bei ungeradem Exponenten das Vorzeichen — gibt. Für positive Zahlen ist immer $(+a)^n = +a^n$.

Obgleich der Exponent einer Potenz nach der Erklärung in Nr. 1 nie Null oder negativ sein kann, so läßt sich doch diese Erklärung dergestalt erweitern,

daß der Begriff der Potenz allgemeiner, auch für die genannten Fälle gültig bleibt. Betrachtet man nämlich die Reihe der Potenzen einer Zahl a,

$$a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5 \ldots a^n,\ a^{n+1} \ldots\ ,$$

so erkennt man, daß jede aus der folgenden durch Division mit a abgeleitet werden kann. Setzt man die Reihe nach dem gleichen Bildungsgesetz rückwärts, also über ihren Anfang hinaus fort, so wird man zunächst darauf geführt, unter a^1, welcher Ausdruck als Produkt mit nur einem Faktor nach dem früheren streng genommen auch keinen Sinn haben würde, den Wert von $\frac{a^2}{a} = a$, dann unter a^0 den Wert von $\frac{a}{a} = 1$, unter a^{-1} den Wert von $\frac{1}{a}$ u. s. w. zu verstehen, also $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ u. s. f. zu setzen. Benutzt man also jenes Bildungsgesetz zu einer erweiterten Definition des Potenzbegriffs, oder setzt man, was auf dasselbe hinauskommt, fest, daß allgemein

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

sein solle, wenn auch der Wert der Differenz $m - n$ negativ sein möge, so erhält man insbesondere

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n .$$

Es ist also die Potenz a^0 dahin zu erklären, daß alle vorhanden gedachten Faktoren a durch Division mit einer gleichen Anzahl wieder entfernt gedacht werden. Die Regel, daß jede Zahl mit 0 potenziert 1 gibt, hat jedoch eine Ausnahme in dem Fall, daß die Basis a selbst gleich Null ist, denn aus $a^0 = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m}$ geht für den Fall $a = 0$ die Form $\frac{0^m}{0^m} = \frac{0}{0}$ hervor, und es ist daher 0^0 ebenso wie $\frac{0}{0}$ ein unendlich vieldeutiger Ausdruck.

Eine Potenz mit negativem Exponenten ist also zu erklären als der reziproke Wert der entsprechenden Potenz mit positivem Exponenten. Statt dessen kann man auch sagen, eine Potenz mit negativem Exponenten ist gleich der entsprechenden Potenz des reziproken Wertes der Basis mit positivem Exponenten. Z. B.

$$10^{-3} = 0{,}1^3 = 0{,}001 : \quad \left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n .$$

Die Rechenregeln für Potenzen, deren Exponenten natürliche Zahlen sind, also für Produkte aus gleichen Faktoren, gelten, wie sich aus der Definition der Potenzen mit negativen Exponenten ergibt, auch für diese. Dies läßt sich für jede der Formeln 1) bis 8) nachweisen. Z. B. ist

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{-m-n} :$$

$$a^{-m} \cdot b^{-m} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{b^m} = \frac{1}{(a\,b)^m} = (a\,b)^{-m} .$$

Damit ist erst die Berechtigung nachgewiesen, eine Zahlenverbindung wie a^{-m} als Potenz aufzufassen. Man kann also allgemein mit Potenzen, die einen nega-

tiven Exponenten haben, ebenso rechnen, wie mit Produkten aus gleichen Faktoren. Die Beschränkung, daß der Exponent einer Potenz eine natürliche Zahl sein müsse, wird also insoweit aufgehoben, daß er eine positive oder negative ganze Zahl sein kann.

Im Resultat einer Rechnung mit Potenzen kann man negative Exponenten vermeiden. Man kann sie aber, bequemerer Schreibweise wegen, auch einführen oder stehen lassen. Z. B. ist gelegentlich einfacher

$$\frac{x^3}{a^4 b^5} = a^{-4} b^{-5} x^3$$

zu schreiben.

§ 11. Begriff der Wurzel.
Dritte Erweiterung des Zahlbegriffs. Irrationale Zahlen.

1. Als erste Umkehrung des Potenzierens behandeln wir die Aufgabe, zu dem gegebenen Werte einer Potenz und ihrem Exponenten die Basis zu berechnen, oder den Wert von x aus der Gleichung

$$x^n = a$$

zu bestimmen. Man nennt diese Rechnungsart Radizieren oder Wurzelausziehen, den gegebenen Wert a der Potenz den Radikanden, den gegebenen Exponenten n den Wurzelexponenten und die gesuchte Basis die Wurzel. Für diese schreibt man

$$x = \sqrt[n]{a}$$

und liest diesen Ausdruck »die n-te Wurzel aus a«.

Die Wurzel aus einer Zahl ist also gleich der Basis, die mit dem Wurzelexponenten potenziert den Radikanden gibt. Diese Erklärung kann durch die Formel dargestellt werden:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \quad .$$

Die zweite Wurzel heißt die Quadratwurzel, die dritte die Kubikwurzel aus der Zahl. Bei der Quadratwurzel pflegt man den Wurzelexponenten wegzulassen; $\sqrt{a}$ bedeutet also $\sqrt[2]{a}$.

So ist beispielsweise $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt[3]{8} = 2$, denn $3^2 = 9$, $2^3 = 8$. Ebenso ist $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$, $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x} = x$.

Aus der Erklärung der Wurzel folgt weiter

$$\sqrt[n]{a^n} = a \quad ,$$

d. h. radiziert man eine Potenz mit ihrem Exponenten, so erhält man ihre Basis.

2. Wie bei den inversen (umgekehrten) Operationen erster und zweiter Stufe, der Subtraktion und der Division, so entsteht auch bei der Radizierung die Frage, ob diese auch dann ausführbar ist, wenn die Werte des Radikanden und des Exponenten nicht durch Umkehrung einer wirklich ausgeführten Potenzierung entstanden sind, sondern wenn für sie willkürliche Zahlen gesetzt werden. Zu dieser Untersuchung setzen wir zunächst nur natürliche Zahlen voraus.

Man sieht zunächst ein, daß nach der Erklärung der n-ten Wurzel aus a nicht nur der Wurzelexponent n eine natürliche Zahl sein muß, sondern daß auch der Radikand nicht beliebig angenommen werden kann. Beispielsweise sind 4, 16, 25 ... und ebenso $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{16}{25}$, $2\frac{1}{4}$ vollständige zweite Potenzen und daher die Quadratwurzeln aus denselben möglich, dagegen ist die Aufgabe, $\sqrt{7}$ zu bestimmen, im bisherigen Sinne unlösbar, da sich unter den bisher bekannten Zahlformen keine Zahl finden läßt, deren Produkt mit sich selbst gleich 7 ist. Zunächst ist

einleuchtend, daß in der Reihe der Quadrate der natürlichen Zahlen: 1, 4, 9, 16 ... die Zahl 7 nicht enthalten ist, und es bliebe somit nur die Möglichkeit, daß $\sqrt{7}$ durch eine gebrochene Zahl angegeben werden könnte. Nimmt man nun an, daß $\frac{c}{d}$ dieser Bruch und in den kleinsten ganzen Zahlen ausgedrückt sei, so daß also c und d relativ prim seien, so müsste $\frac{c^2}{d^2} = 7$, also c^2 durch d^2 teilbar sein, was nach § 6 Nr. 3 unmöglich ist.

Es ist nicht schwer, diese Schlußfolgerung zu verallgemeinern. Soll $\sqrt[n]{a}$ berechnet werden, und ist a eine natürliche Zahl, so gehört a entweder der Reihe der n-ten Potenzen der natürlichen Zahlen 1^n, 2^n, 3^n ... an, oder liegt zwischen zwei Gliedern dieser Reihe, so daß also daselbst keine natürliche Zahl sein kann. Wäre in diesem Falle $\sqrt[n]{a}$ einer gebrochenen Zahl $\frac{c}{d}$ gleich, so erhielte man in derselben Weise wie vorher die unmögliche Folgerung, daß c^n durch d^n teilbar sein müsse, auch wenn c und d relativ prim sind.

Ebensowenig kann behauptet werden, daß, wenn a eine gebrochene Zahl ist, $\sqrt[n]{a}$ immer in dem bisherigen Sinne möglich sei. Denn setzt man $\sqrt[n]{\frac{p}{q}} = \frac{c}{d}$, so ist $\frac{p}{q} = \frac{c^n}{d^n}$ und sind $\frac{p}{q}$ und $\frac{c}{d}$ in den kleinsten Zahlen ausgedrückt, also auch c^n und d^n relativ prim, so muß $p = c^n$ und $q = d^n$, also $c = \sqrt[n]{p}$, $d = \sqrt[n]{q}$ sein, womit dieser Fall auf den vorigen zurückgeführt ist.

Die Form $\sqrt[n]{a}$ führt also für den Fall, daß a keine vollständige n-te Potenz einer der bisher bekannten Zahlen ist, auf eine neue Erweiterung des Zahlenbegriffs, die zunächst an einem Beispiel erläutert werden soll:

Es sei die Aufgabe gestellt, $\sqrt{2}$ zu berechnen, also eine Zahl zu ermitteln, die mit sich selbst multipliziert, zum Produkt 2 gebe. Da nun $1^2 = 1$ und $2^2 = 4$ ist, so nehme man zunächst an, die gesuchte Zahl liege zwischen 1 und 2. Berechnet man nun nacheinander $1{,}1^2$, $1{,}2^2$, $1{,}3^2$ u. s. w., so ergibt sich $1{,}4^2 = 1{,}96$ und $1{,}5^2 = 2{,}25$, und man kann hiernach annehmen, daß die gesuchte Zahl zwischen 1,4 und 1,5 liege. Geht man in dieser Weise weiter fort, berechnet also zunächst die Quadrate von 1,41, von 1,42 u. s. w., so findet man $1{,}41^2 = 1{,}9881$ und $1{,}42^2 = 2{,}0164$, ebenso weiterhin $1{,}414^2 = 1{,}999396$ und $1{,}415^2 = 2{,}002225$ u. s. w. Man sieht nun bereits, daß man in dieser Weise die Reihe der gefundenen Zahlen 1, 1,4, 1,41, 1,414 ... immer weiter fortsetzen kann, so daß das Quadrat einer jeden folgenden Zahl dieser Reihe näher an die Zahl 2 kommt, als das der vorhergehenden, und daß man also den Wert von $\sqrt{2}$ durch einen Bruch zwar niemals absolut genau, aber doch bis zu jedem verlangten Grade der Annäherung darstellen kann.

Derartige Zahlen nennt man irrationale, und im Gegensatz zu ihnen die im früheren behandelten ganzen und gebrochenen Zahlen rationale.

Eine irrationale Zahl ist also eine Zahl, die zwischen zwei rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$ und $\frac{p+1}{q}$ so eingeschlossen ist, daß man die beiden Grenzen ohne Ende einander nähern, d. h. ihre Differenz $\frac{1}{q}$ mit unendlichem Wachsen von q unendlich klein machen kann, ohne gleichwohl den Wert der irrationalen Zahl auf diese Weise absolut genau zu erhalten.

3. Eine klare Einsicht in das Wesen einer irrationalen Zahl liefert die geometrische Veranschaulichung. In der Planimetrie wird gezeigt, daß bei der Vergleichung der Längen zweier Strecken $AB = a$, $CD = b$ folgende Fälle mög-

lich sind: 1. Man kann die kleinere Strecke b wiederholt auf der größeren a abtragen, ohne daß zuletzt ein Rest bleibt. In diesem Fall ist a ein Vielfaches von b und setzt man $a = p \cdot b$, so ist p eine natürliche Zahl. 2. Bei dem wiederholten Abtragen der Strecke b von der Strecke a bleibt zuletzt ein Rest, der kleiner als b ist, aber man kann eine dritte Strecke c finden, die sich sowohl auf b als auf a ohne Rest abtragen läßt. Es ist also a ein Vielfaches eines ganzzahligen Teiles, z. B. das m-fache des n-ten Teiles von b, und in $a = p \cdot b$ ist also p eine gebrochene Zahl. 3. Es gibt auch keine dritte Strecke c, die ein ganzzahliger Teil beider gegebenen Strecken zugleich ist. Nimmt man in diesem Fall einen beliebigen ganzzahligen Teil von b, etwa $\frac{1}{n} b$, an und trägt denselben so oft als möglich auf a ab, so bleibt zuletzt ein Rest, der kleiner als ein solcher Teil sein muß. Hat hierbei eine m-malige Abtragung stattgefunden, so ist a größer als $\frac{m}{n} b$ und kleiner als $\frac{m+1}{n} b$. Da man nun den Wert von n so groß machen kann, als man will, so kann man auch die beiden Grenzwerte, zwischen denen der Wert von a liegen muß, einander so nahe bringen als man will. In $a = p \cdot b$ ist p jetzt eine irrationale Zahl, deren zwischen $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n}$ liegender Wert durch eine dieser beiden Zahlen um so genauer angegeben wird, je größer n, je kleiner also die Differenz $\frac{1}{n}$ dieser Zahlen ist.

Eine irrationale Zahl ist also eine solche, die sich nicht vollkommen genau durch eine rationale Zahl, d. h. durch einen Bruch ausdrücken läßt, dessen Zähler und Nenner natürliche Zahlen sind, aber bis zu jeder beliebigen Genauigkeit angenähert. Die Annäherung wird um so größer, je größer Zähler und Nenner dieses Bruches werden.

Stellt man, wie früher geschehen, die Reihe der natürlichen Zahlen durch eine Reihe von Punkten einer Geraden dar, die in gleichen Abständen aufeinander folgen, die gebrochenen Zahlen also durch zwischen den so bestimmten Punkten eingeschaltete Punkte, so bleiben nach dem vorigen noch immer Punkte übrig, deren Abstand vom Anfangspunkt der Zählung auf diese Weise nicht erhalten werden kann, weil er mit dem die Einheit darstellenden Abstand kein gemeinschaftliches Maß hat. Diese Punkte versinnlichen also die irrationalen Zahlen, und durch sie wird nun die bisher eine Reihe unterbrochener, wenn auch noch so nahe aneinanderliegender Punkte bildende Darstellung der Zahlenreihe zur kontinuierlichen Zahlenlinie; denn es kann keinen Punkt auf dieser Linie geben, dessen Abstand vom Anfangspunkt sich nicht entweder durch eine rationale oder durch eine irrationale Zahl ausdrücken läßt.

Die irrationalen Zahlen sind, obgleich durch rationale nicht absolut genau ausdrückbar, doch wie diese, bestimmte Zahlen. Sie sind bei der Anwendung auf Größen irgendwelcher Art nur mit der gewählten Einheit nicht durch ganze oder gebrochene Zahlen zu vergleichen, und dieselbe Größe, die in Beziehung auf eine bestimmte Einheit durch eine irrationale Zahl gemessen wird, kann in Beziehung auf eine andre Einheit rational erscheinen.

Sind z. B. die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks gleich a, so ist zufolge des pythagoreischen Lehrsatzes die Hypotenuse gleich $\sqrt{2\,a^2}$. Nimmt man also die Länge der Kathete zur Einheit an, so ist die der Hypotenuse gleich $\sqrt{2}$. Diese irrationale Zahl ist also hier durch eine eindeutig bestimmte konstruierbare Länge dargestellt. Dieselbe Länge aber ist durch eine rationale Zahl ausgedrückt, wenn man z. B. die Hälfte oder das Drittel u. s. w. der Hypotenuse zur Einheit nimmt, und in diesem Fall wird umgekehrt die Zahl der Einheiten der Kathete irrational.

Es erscheint als selbstverständlich, daß man auch von positiven und negativen Irrationalzahlen reden, oder daß die Stetigkeit der Zahlenlinie nach beiden Richtungen vom Anfangspunkt aus erreicht werden kann.

4. Es entsteht nun die Frage, ob die bisherigen Erklärungen und Rechenregeln, die nur unter der Voraussetzung rationaler Zahlen aufgestellt und abgeleitet waren, auch auf irrationale Zahlen angewendet werden dürfen. Daß dies nicht ohne weiteres geschehen kann, folgt schon daraus, daß die früheren Erklärungen der Summe, Differenz u. s. w. von der Entstehung der Zahlen aus der Einheit ausgingen, bei den Irrationalzahlen aber eine Zerlegung in Einheiten nicht möglich ist. Gleichwohl müssen diese Erklärungen sich auch auf die neue Zahlform ausdehnen lassen. Zur Vermeidung weitläufiger abstrakter Erörterungen mag folgende Darstellung in Betreff der aufgeworfenen Frage genügen: Jede irrationale Zahl kann nach dem vorigen durch eine rationale Zahl $\frac{a}{b}$ annähernd dargestellt werden, wobei dieser Bruch von der Irrationalzahl selbst um so weniger verschieden ist, je größer a und b gedacht werden. Die gebrochene Zahl $\frac{a}{b}$ verlangt die Bildung von b Teileinheiten aus der ursprünglichen ganzen Einheit, demnach erfordert die Irrationalzahl eine Teilung der Einheit in unendlich viele gleiche, daher an Größe unendlich kleine Teile der Einheit. Eine solche Teilung kann nicht wirklich ausgeführt werden, sondern kann nur ausgeführt gedacht werden. Weil aber die Erklärungen der Rechnungsarten und die Ableitungen der Gesetze für gebrochene Zahlen unabhängig waren von der Größe der Nenner, also von der Anzahl der Teile, in die die Einheit geteilt gedacht wurde, so müssen sie auch gültig bleiben, wenn diese Anzahl unendlich wächst.

Denkt man sich eine Irrationalzahl durch einen Dezimalbruch annähernd dargestellt, so muß die Anzahl der Dezimalstellen um so mehr zunehmen, je geringer seine Abweichung von der Irrationalzahl selbst sein soll. Die irrationale Zahl selbst könnte aber nur durch einen Dezimalbruch von unendlich vielen Stellen angegeben werden. Obgleich es nun unmöglich ist, einen solchen zu schreiben, so kann doch die Existenz eines solchen gedacht und es können auch solche Dezimalbrüche unter sich oder mit endlichen Dezimalbrüchen addiert, subtrahiert, multipliziert u. s. w. gedacht werden, ohne daß es nötig wäre, diese Operationen wirklich auszuführen. Auch ohne dies läßt sich zu zwei unendlichen Dezimalbrüchen ein dritter unendlicher Dezimalbruch denken, dessen einzelne Stellen bis ins Unendliche durch Addition u. s. w. der entsprechenden Stellen der beiden ersten entstehen würden.

Es mag übrigen hier besonders erwähnt werden, daß nicht jeder unendlichvielstellige Dezimalbruch eine Irrationalzahl ist. Die periodischen Dezimalbrüche sind gemeinen Brüchen gleich, also rational (vgl. § 8 Nr. 4).

§ 12. Das Radizieren.

1. Die Gesetze des Rechnens mit Wurzeln, also auch mit Irrationalzahlen, ergeben sich aus dem Begriff der Wurzel und durch Umkehrung der Potenzregeln. Auch für die Wurzeln aus Summen und Differenzen gibt es keine einfachen Umformungen. Dagegen kann eine Wurzel aus einem Produkt gezogen werden, indem man die einzelnen Faktoren mit demselben Exponenten radiziert und die entstehenden Wurzeln multipliziert, oder es ist

$$1) \qquad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad ,$$

eine Regel, die sich auf Produkte von beliebig vielen Faktoren ausdehnen läßt, und deren Richtigkeit sich daraus ergibt, daß

$$\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^n=a\,b\quad,$$

also in der Tat die rechte Seite der Gleichung der Zahl gleich ist, deren n-te Potenz den Wert $a\,b$ hat.

Dieser Satz findet eine wichtige Anwendung zunächst zur praktischen Berechnung von Wurzeln, deren Radikanden sich in Faktoren zerlegen lassen, aus denen die Wurzeln bekannt sind. So ist z. B.

$$\sqrt{6084}=\sqrt{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 13\cdot 13}=\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 13^2}=2\cdot 3\cdot 13=78\quad,$$

$$\sqrt[3]{74088}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3^3\cdot 7^3}=2\cdot 3\cdot 7=42\quad,$$

$$\sqrt[5]{a^5\,b^{10}\,c^{15}}=\sqrt[5]{a^5\cdot b^5\cdot b^5\cdot c^5\cdot c^5\cdot c^5}=a\,b^2\,c^3\quad.$$

Auch wenn der Radikand sich nicht vollständig in so geeignete Faktoren zerlegen läßt, kann das Ausziehen der Wurzeln aus einzelnen solchen Faktoren zur Vereinfachung einer Rechenaufgabe dienen. So hat man z. B.:

$$\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=3\cdot\sqrt{2}\,;\quad\sqrt[3]{56}=\sqrt[3]{8\cdot 7}=2\sqrt[3]{7}\quad;$$

$$\sqrt{4\,a^3\,b}=\sqrt{4\,a^2\cdot a\,b}=2\,a\sqrt{a\,b}\quad.$$

Da umgekehrt das Produkt zweier Wurzeln mit gleichen Exponenten gleich der Wurzel aus dem Produkt der Radikanden sein muß, so kann man beispielsweise:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{a^{n-1}}\cdot\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{a\,b\,a^{n-1}\,c}=\sqrt[n]{a^n\,b\,c}=a\sqrt[n]{b\,c}\quad;$$

$$\sqrt[n+1]{a^4\,b\,c}\cdot\sqrt[n+1]{a^6\,b^n\,c^{5-n}}\cdot\sqrt[n+1]{a^{n-9}\,b^0\,c^{2n-5}}$$

$$=\sqrt[n+1]{a^{n+1}\cdot b^{n+1}\cdot c^{n+1}}=a\,b\,c$$

setzen und auch Faktoren vor einer Wurzel unter das Wurzelzeichen schaffen, wie in folgenden Beispielen:

$$a\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n\,b}\,;\qquad 5\sqrt{3}=\sqrt{25\cdot 3}=\sqrt{75}\quad;$$

$$p\sqrt{\frac{q}{p}}=\sqrt{p^2\frac{q}{p}}=\sqrt{p\cdot q}\,;\qquad 2\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{8\cdot 3}=\sqrt[3]{24}\quad.$$

Für die Wurzeln aus Quotienten erhält man entsprechend

$$2)\qquad\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\quad,$$

d. h. man kann eine Wurzel aus einem Quotienten ziehen, indem man die Wurzel aus dem Dividenden und dem Divisor zieht und die erste durch die zweite dividiert.

Umgekehrt kann man zwei Wurzeln, die gleiche Exponenten haben, dividieren, indem man ihre Radikanden dividiert und aus dem Quotienten die Wurzel zieht.

Der Beweis der Formel 2) ergibt sich, entsprechend dem vorigen aus:

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n}=\frac{a}{b}\quad.$$

Beispielsweise ist also

$$\sqrt{\frac{49}{64}} = \frac{7}{8}; \quad \sqrt{\frac{a^2 b^2 c^2}{p^2 q^2}} = \frac{a b c}{p q}; \quad \sqrt{\frac{a^4 b^3 c^2}{m n^2}} = \frac{a^2 b c}{n}\sqrt{\frac{b}{m}} \; ;$$

und umgekehrt

$$\sqrt{a^3} : \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a; \quad \sqrt{2} : 2 = \sqrt{2} : \sqrt{4} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \; ;$$

$$a : \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^3} : \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^2} \; .$$

Man kann auf diese Weise stets bewirken, daß die Ausziehung einer Wurzel aus einem Bruche wieder zu einem Bruche führt, dessen Nenner rational ist, denn man hat nur nötig den Radikanden so zu erweitern, daß der Nenner eine dem Wurzelexponenten entsprechende vollständige Potenz wird. Man hat z. B.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{a b^{n-1}}{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{a b^{n-1}}}{b}; \quad \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{6}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{6} \; .$$

Überhaupt kann man in Brüchen, deren Nenner irrational sind, den Nenner rational machen, wie folgende Beispiele zeigen mögen:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b^2}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}; \quad \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}; \quad \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}; \quad \frac{5}{\sqrt{7}} = \frac{5}{7}\sqrt{7} \; .$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}+c} = \frac{a(\sqrt{b}-c)}{(\sqrt{b}+c)(\sqrt{b}-c)} = \frac{a(\sqrt{b}-c)}{\sqrt{b^2}-c^2} = \frac{a(\sqrt{b}-c)}{b-c^2} \; ;$$

$$\frac{5}{\sqrt{3}-1} = \frac{5(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{5}{2}(\sqrt{3}+1); \quad \frac{1}{5+\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{5}}{25-5} = \frac{5-\sqrt{5}}{20} \; ;$$

$$\frac{x}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{x(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-\sqrt{c^2}} = \frac{x(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{a+2\sqrt{a b}+b-c}$$

$$= \frac{x(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{a b})}{(a+b-c)^2-4ab} \; ;$$

$$\frac{1}{a-\sqrt{a-\sqrt{a}}} = \frac{a+\sqrt{a-\sqrt{a}}}{a^2-a+\sqrt{a}} = \frac{(a+\sqrt{a-\sqrt{a}})(a^2-a-\sqrt{a})}{(a^2-a)^2-a} \; .$$

2. Um eine Wurzel aus einer Potenz ziehen zu können, muß vorausgesetzt werden, daß der Potenzexponent ein Vielfaches des Wurzelexponenten sei. Da nämlich der Ausdruck $\sqrt[n]{a^m}$ verlangt, daß die Potenz a^m in n gleiche Faktoren zerlegt werde, so ergibt sich für diesen Fall die Lösung, daß für $m = p \cdot n$ ein solcher Faktor gleich a^p ist. Es ist nämlich dann

$$a^m = a^{pn} = (a^p)^n; \quad \sqrt[n]{(a^p)^n} = a^p \; ,$$

oder, wenn man $p = \frac{m}{n}$ einführt,

$$3) \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Die Umkehrung dieser Regel liefert die vorbehaltene Umformung einer Potenz mit gebrochenem Exponenten unter der Voraussetzung, daß der Dividend m

ein Vielfaches von n sei. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, also $\frac{m}{n}$ ein eigentlicher Bruch, so hat $a^{\frac{m}{n}}$ nach der früheren Erklärung der Potenz keinen Sinn, führt aber zu einer Erweiterung dieser Erklärung, durch welche die Formel 3) die Bedeutung einer allgemeinen Definition des Potenzbegriffs erhält, und somit selbst allgemein gültig wird. Setzt man nämlich, um die dem Ausdruck $a^{\frac{m}{n}}$ notwendig beizulegende allgemeine Bedeutung zu ermitteln, zunächst die Basis a statt $\frac{m}{n}$ mal, m mal als Faktor, so hat man a zu oft gesetzt, d. h. die Anzahl der gesetzten Faktoren ist n mal zu groß. Um also den wirklich verlangten Ausdruck zu erhalten, muß man die genannte Potenz $\overset{m}{a\,a\,a\ldots}$ in n gleiche Faktoren zerlegen. Dies ist aber nach dem früheren nicht bloß dann möglich, wenn m ein Vielfaches von n ist, sondern mit Hilfe der Wurzelausziehung und der neuen Zahlform der Irrationalzahlen ganz allgemein.

Hiernach ist also beispielsweise der Ausdruck $5^{\frac{3}{2}}$ dahin zu deuten, daß eine Zahl gesucht werden solle, die zweimal als Faktor gesetzt, den Wert $5 \cdot 5 \cdot 5$ ergebe, oder daß dieses Produkt in zwei gleiche Faktoren zu zerlegen sei. Dies ist zwar nicht durch Angabe einer ganzen Anzahl der vorhandenen Faktoren 5, wohl aber durch die Irrationalzahl $\sqrt{125}$ möglich.

Hiernach führt also die konsequente Erweiterung der bisherigen Begriffe mit Notwendigkeit zu der Erklärung, daß unter $a^{\frac{m}{n}}$ in jedem Fall die n-te Wurzel aus a^m verstanden werden, also immer

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

sein soll.

Da man hierbei den Quotienten $\frac{m}{n}$ beliebig erweitern oder gelegentlich kürzen kann, so führt die Formel weiter zu den folgenden:

$$4) \qquad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n:p]{a^{m:p}} \quad .$$

Potenzexponent und Wurzelexponent stehen also in einer ähnlichen Beziehung, wie Zähler und Nenner eines Bruches. Wie diese, so darf man auch jene durch gemeinschaftliche Faktoren dividieren, also z. B.

$$\sqrt[12]{a^{30}} = \sqrt{a^5}\,; \qquad \sqrt[mnp]{a^{np\,q}} = \sqrt[m]{a^q}$$

setzen, und umgekehrt. Die Multiplikation beider Exponenten mit demselben Faktor führt zu der Möglichkeit, zwei Wurzeln so umzuformen, daß sie denselben Potenzexponent oder denselben Wurzelexponent erhalten. Der gemeinschaftliche Exponent wird hierbei ebenso bestimmt, wie der Generalnenner bei dem Gleichnamigmachen von Brüchen. Sind z. B.

$$\sqrt[5]{a^2}\,, \quad \sqrt[8]{a^3}\,, \quad \sqrt[10]{a^9}\,, \quad \sqrt[12]{a^5}$$

gegeben, so erhält man gleiche Wurzelexponenten, indem man $5 \cdot 8 \cdot 3 = 120$ zum gemeinsamen Exponenten macht, also für die gegebenen Wurzeln

$$\sqrt[120]{a^{48}}\,, \quad \sqrt[120]{a^{45}}\,, \quad \sqrt[120]{a^{108}}\,, \quad \sqrt[120]{a^{50}}$$

setzt, dagegen gleiche Potenzexponenten mittels $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 90$, also

$$\sqrt[225]{a^{90}}\,, \quad \sqrt[240]{a^{90}}\,, \quad \sqrt[100]{a^{90}}\,, \quad \sqrt[216]{a^{90}} \quad .$$

Da nun Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten sich nach 1) und 2) multiplizieren und dividieren lassen, so erhält man die Möglichkeit, allgemein die Multiplikation und Division von Wurzeln auszuführen. So ist

$$\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[r]{a^s} = \sqrt[nr]{a^{mr}} \cdot \sqrt[nr]{a^{ns}} = \sqrt[nr]{a^{mr+ns}}; \quad \sqrt[3]{a^5} \cdot \sqrt[4]{a^3} = \sqrt[12]{a^{20}} \cdot a^9 = \sqrt[12]{a^{29}} \quad ;$$

$$\sqrt[xy]{a^m} \cdot \sqrt[yz]{a^n} = \sqrt[xyz]{a^{mz+nx}}; \quad \sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[8]{a^3} = \sqrt[24]{a^{29}} \quad .$$

Als ein besonderer Fall der Anwendung der obigen Regel kann auch die Umformung von $\sqrt[n]{a^m}$ in $\sqrt[n:m]{a^{m:m}}$, d. h.

$$5) \qquad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{m}]{a}$$

gelten. In der Praxis findet diese Anwendung, wenn n ein Vielfaches von m ist. So ist z. B.

$$\sqrt[15]{a^3} = \sqrt[5]{a}, \quad \sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a} \quad .$$

Zugleich ergibt diese Formel die Bedeutung, die einer Wurzel mit gebrochenem Exponenten beizulegen ist.

Da jede Zahl als Potenz mit dem Exponenten 1 geschrieben werden kann, so läßt sich jeder Wurzel die Form einer Potenz geben. Es ist also

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad ,$$

also z. B. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, und umgekehrt $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$; $8^{\frac{1}{3}} = 2$, $8^{\frac{2}{3}} = 4$.

3. Es läßt sich zeigen, daß alle früher für Potenzen im engeren Sinne, also für solche mit positiven oder negativen ganzen Exponenten abgeleiteten Regeln auch für die neue, erweiterte Bedeutung der Potenz richtig bleiben.

So ist z. B.

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} \quad ,$$

denn

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} \quad .$$

Ebenso ist

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{(ab)^m} = (ab)^{\frac{m}{n}} \quad .$$

Umgekehrt kann man auch eine Potenz in Form einer Wurzel schreiben: denn es ist

$$a^m = \sqrt[\frac{1}{m}]{a}, \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[\frac{n}{m}]{a} \quad .$$

Eine Potenz kann in eine Wurzel und umgekehrt eine Wurzel in eine Potenz verwandelt werden, wenn man statt des Exponenten seinen reziproken Wert setzt.

Der Ausdruck $\sqrt[n]{a^m}$ gestattet endlich noch eine andre Umformung, die sich auf die Reihenfolge der Operationen bezieht und in der Formel

$$6) \qquad \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

ausgesprochen ist. Man kann also statt der Potenz ihre Basis radizieren und die entstandene Wurzel mit dem Potenzexponenten potenzieren.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich daraus, daß

$$\left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right]^n = \left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right]^m = a^m$$

ist. So ist z. B.

$$\sqrt[3]{8^7} = 2^7; \quad \sqrt[3]{25^3} = 5^3 \ .$$

Umgekehrt kann man hiernach eine Wurzel potenzieren, indem man ihren Radikanden potenziert.

Um endlich eine Wurzel zu radizieren, findet man die Formel

$$7). \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} \ ,$$

d. h. man kann die beiden Wurzelexponenten miteinander vertauschen, oder auch statt der zweimaligen Wurzelausziehung eine einmalige mit dem Produkt der beiden Exponenten vornehmen.

Der Beweis ergibt sich wieder aus dem Begriff der Wurzel. Es ist

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{mn} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^{mn}}} = \sqrt[n]{a} \ ,$$

und auch

$$\sqrt[mn]{a^{mn}} = \sqrt[m]{a} = \sqrt[n]{a} \ .$$

Umgekehrt zeigt die Formel 7), wie man eine Zahl mit einem Produkt als Exponenten radizieren kann.

So ist also beispielsweise

$$\sqrt[6]{a} = \sqrt[3]{\sqrt{a}}, \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^m b}} = \sqrt[nm]{a^m b} \ .$$

Der verallgemeinerte Begriff der Potenz und Wurzel gilt auch dann, wenn der Exponent eine negative gebrochene Zahl ist. Man hat nämlich

$$a^{-\frac{m}{n}} = a^{\frac{-m}{n}} = \sqrt[n]{a^{-m}} \ ,$$

$$= a^{\frac{m}{-n}} = \sqrt[-n]{a^m} \ .$$

Endlich kann man sich sogar irrationale Potenz- oder Wurzelexponenten denken, für die man bei Ausführung der Rechnung rationale Zahlen, die bis zu der verlangten Genauigkeit gleich den irrationalen Exponenten anzunehmen sind, zu setzen hätte.

Aus diesen Betrachtungen geht aber hervor, daß der Begriff der Potenz dahin erweitert werden kann, daß der Exponent jede bisher bekannte Zahl sein darf, also positiv oder negativ, ganz oder gebrochen, rational oder irrational. Die aus dem ursprünglichen, engsten Begriff der Potenz als einem Produkt aus gleichen Faktoren gelten für diesen allgemeinsten Begriff. Man kann daher definieren:

Eine Potenz ist die Zahlenverbindung, mit der man rechnen kann als wäre sie ein Produkt aus gleichen Faktoren.

§ 13. Vierte Erweiterung des Zahlbegriffs. Imaginäre und komplexe Zahlen.

1. Ist der Radikand einer Wurzel eine algebraische Zahl, so hat man zu beachten, daß zwar $(+a)^n$ stets gleich $+(a^n)$, dagegen $(-a)^n$, je nachdem der Exponent eine gerade oder ungerade ganze Zahl ist, entweder gleich $+(a^n)$ oder gleich $-(a^n)$ ist.

Hieraus folgt umgekehrt, daß $\sqrt[n]{+a^n}$, falls n eine gerade Zahl ist, sowohl gleich $+a$, als auch gleich $-a$, dagegen wenn n ungerade ist, nur gleich $+a$ sei, sowie daß $\sqrt[n]{-a^n}$ für ein gerades n nicht möglich, für ein ungerades gleich $-a$ sei. So ist z. B. $(-2)^2 = (+2)^2 = +4$, $(-2)^3 = -8$, daher kann $\sqrt{4}$ sowohl gleich $+2$, als auch gleich -2 sein, während $\sqrt[3]{8}$ nur gleich $+2$, und $\sqrt[3]{-8} = -2$ zu setzen ist. Die Aufgabe, die Quadratwurzel aus einer positiven Zahl zu ziehen, ist demnach immer zweideutig. Dagegen erscheint die Aufgabe, die Kubikwurzel aus einer positiven oder negativen Zahl zu ziehen, immer eindeutig zu sein. Daß dies nicht der Fall ist, ergibt sich später in § 21. Unter den bisher bekannten Zahlen gibt es aber keine, deren zweite Potenz negativ ist, und $\sqrt{-4}$ erscheint also als unmöglich.

Ist der Exponent keine ganze Zahl, so kann die Wurzel auf eine solche zurückgeführt werden, bei der dies der Fall ist. So hat man beispielsweise

$$\sqrt[\frac{2}{3}]{-4} = \sqrt[2]{(-4)^3} = \sqrt{-64}\,; \qquad \sqrt[-\frac{3}{2}]{-8} = \sqrt[-3]{(-8)^2} = \sqrt[-3]{64} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}\,.$$

Man kann sich daher auf den Fall, in dem der Wurzelexponent eine natürliche Zahl ist, beschränken, und also folgende Regeln aufstellen:

Um eine Wurzel aus einer algebraischen Zahl zu ziehen, kann man im allgemeinen die Wurzel aus ihrem absoluten Werte ziehen und das Vorzeichen wie folgt, bestimmen:

Ist der Wurzelexponent ungerade, so erhält die Wurzel das Vorzeichen des Radikanden.

Ist der Wurzelexponent gerade, so erhält die Wurzel bei positivem Radikanden beide Vorzeichen. Sie hat also zwei Werte, ist zweideutig. Ist der Radikand negativ, so entspricht in diesem Fall der Wurzel keine der bisher bekannten Zahlformen.

Es ist also

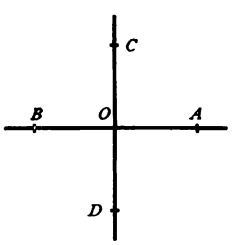
$$\sqrt[2n+1]{+a} = +\sqrt[2n+1]{a}\,; \qquad \sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}\,,$$

$$\sqrt[2n]{+a} = \pm\sqrt[2n]{a}\,; \qquad \sqrt[2n]{-a} \text{ unmöglich.}$$

Insbesondere ist also

$$\sqrt{a^2} = +a\,, \qquad \sqrt[3]{+a^3} = +a\,; \qquad \sqrt[3]{-a^3} = -a\,.$$

2. Daraus, daß $\sqrt[2n]{-a}$ durch keine der bisherigen Zahlformen angegeben werden kann, darf ebensowenig wie in ähnlichen früheren Fällen gefolgert werden, daß ein solcher Ausdruck überhaupt keinen Sinn haben könne, sondern es ist zu untersuchen, ob nicht auch in diesem Fall eine Erweiterung des bisherigen Zahlbegriffs möglich sei. Hierfür bietet uns wieder die Veranschaulichung der Zahlen durch Strecken ein Hilfsmittel, wobei wir uns auf den einfachsten und in den spätern Anwendungen ausschließlich vorkommenden Fall der Quadratwurzel aus negativen Zahlen beschränken.



Die Zahl $+1$ wurde früher durch eine Strecke OA veranschaulicht, die von einem Anfangspunkte O aus nach einer bestimmten, als positiv angenommenen Richtung auf einer unendlichen Geraden abgetragen war. Entsprechend stellte die an Länge der OA gleiche, nach der entgegengesetzten Richtung abgetragene Strecke OB die Zahl -1 dar. Errichtet man nun auf der durch A und B gehenden Zahlenlinie im Anfangspunkte O die Senkrechte und trägt

auf dieser nach der einen Richtung OC, nach der andern OD ab, so daß $OC = OD = OA$ ist, so ist nach geometrischen Sätzen OC die mittlere Proportionale zwischen OA und OB, also $OC^2 = OA \cdot OB$. Man kann daher $OC^2 = (+1) \cdot (-1) = -1$, und somit $OC = \sqrt{-1}$ setzen. Das gleiche gilt von OD, und da die Richtungen von OC und OD entgegengesetzt sind, so wird man die eine dieser Strecken gleich $+\sqrt{-1}$, die andre gleich $-\sqrt{-1}$ setzen dürfen. Man kann nun OC als die Einheit einer zweiten Zahlenlinie betrachten, die zu der ersten senkrecht steht und aus dieser Einheit durch Wiederholung oder Teilung ebenso wie bei der ersten Zahlenlinie die übrigen Zahlen der zweiten Zahlenlinie ableiten. Diese Zahlen heißen imaginäre und die Zahl $\sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit. Im Gegensatz dazu heißen die bisher bekannten Zahlen der ersten Zahlenlinie reelle. Da nun $\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2 \cdot (-1)} = a\sqrt{-1}$ gesetzt werden kann, so erhält jede Quadratwurzel aus einer negativen reellen Zahl die Bedeutung einer imaginären Zahl. Es ist also umgekehrt das Quadrat einer reellen Zahl eine positive, das Quadrat einer imaginären Zahl eine negative reelle Zahl.

Imaginäre Zahlen sind also solche, die sich weder durch Wiederholung noch durch Teilung, selbst wenn diese unendlich fortgesetzt gedacht wird, aus der ursprünglichen Einheit oder aus der dieser entgegengesetzten negativen Einheit ableiten lassen, sondern die aus einer Einheit andrer Art hervorgehen. Während die negative Zahl $-a$ aus der entgegengesetzten $+a$ durch Umkehrung der Richtung, also durch Drehung des positiven Strahls der reellen Zahlenlinie um 180^0 entstehend gedacht werden kann, entsteht die imaginäre Zahl $+a\sqrt{-1}$ oder $-a\sqrt{-1}$ durch eine solche Drehung um 90^0. Welche der beiden Richtungen der imaginären Zahlenlinie man als die positive, welche als die negative annehmen will, bleibt hierbei, wie bei der reellen Zahlenlinie, willkürlich. Hat man eine dieser Richtungen als die positive angenommen, so wird dadurch die entgegengesetzte zur negativen. Die imaginäre Zahlenlinie ist nicht an sich, sondern nur durch ihre Beziehung zur reellen imaginär. Würden die auf CD gemessenen Strecken als die ursprünglichen angesehen, so wären die betreffenden Zahlen als reelle und im Gegensatz dazu die der Zahlenlinie AB als die imaginären zu betrachten. — Die Null ist beiden Zahlenarten gemeinschaftlich, da beide Linien einander in dem Anfangspunkt der Zählung schneiden.

Ebenso wie in praktischen Aufgaben ein negatives Resultat die Unmöglichkeit der Auflösung bezeichnet, wenn für die Zahlen der Aufgabe ein Richtungsgegensatz nicht existiert, oder wie dasselbe bei einer gebrochenen Zahl der Fall war, wenn die Einheit keine Teilung zuließ, so sagt in Aufgaben, wo nur reelle Resultate einen Sinn haben, ein imaginäres Resultat, daß die Auflösung nicht möglich sei. Damit ist jedoch nicht gesagt, daß in der Rechnung selbst keine imaginären Zahlen vorkommen dürften, denn es kann auch aus solchen bei weiterer Rechnung ein reelles Resultat hervorgehen, wie z. B. aus $\sqrt{-a}$ durch Erhebung ins Quadrat der Radikand $-a$.

Die Worte reell und imaginär sind nicht in ihrem eigentlichen Wortsinne zu verstehen, sondern nur historisch aufzufassen; da man zur Zeit ihrer Einführung das Wesen des Unterschieds damit zu bezeichnen glaubte. Im eigentlichen Wortsinne sind reell nur die aus der Erfahrung gegebenen natürlichen Zahlen. Alle andern Zahlen sind imaginär; denn sie sind nur abstrakte Begriffe, durch notwendige Erweiterung des ursprünglichen Zahlbegriffs entstanden.

3. Bei dem Rechnen mit imaginären Zahlen bezeichnet man nach dem Vorgange von GAUSS die imaginäre Einheit $+\sqrt{-1}$ durch den Buchstaben i.

Da alle früher abgeleiteten Rechenregeln unter der Voraussetzung reeller Zahlen entwickelt worden sind, so können diese nicht ohne weiteres auf imaginäre

Zahlen angewendet werden, und es ist also zunächst nachzuweisen, daß dies erlaubt ist.

Da nun die imaginären Zahlen in derselben Weise aus der imaginären Einheit entstehen, wie die reellen aus der reellen Einheit, so lassen sich imaginäre Zahlen unter sich, ebenso wie reelle unter sich addieren und subtrahieren und da ferner auch hier das Gesetz von der Vertauschbarkeit der Summanden gelten muß, so sind die Rechenregeln, die früher für die Addition und Subtraktion reeller Zahlen auf Grund dieser Vertauschbarkeit abgeleitet wurden, in gleicher Weise für die Addition und Subtraktion imaginärer Zahlen gültig. Es ist also

$$a i + b i = (a + b) i\,; \quad a i - b i = (a - b) i \quad ,$$
$$0 + a i = +a i\,; \quad 0 - a i = -a i \quad \cdot$$
$$(+a i) + (-a i) = 0 \quad .$$

Eine Summe von gleichen imaginären Summanden führt ferner auf den Begriff des Produkts einer imaginären mit einer natürlichen Zahl. Es ist

$$(+a i) \cdot b = +a i + a i + \ldots = +(a + a + \ldots) i = +(a b) i \quad ,$$

und entsprechend

$$(-a i) \cdot b = (-a i) + (-a i) + \ldots = -(a b) i \quad .$$

Nach der Erweiterung des Begriffs des Produkts, müssen diese Regeln für jede positive reelle Zahl b gelten. Ebenso findet der Begriff der Multiplikation mit einem negativen reellen Multiplikator Anwendung, wonach mit $-b$ multiplizieren gleichbedeutend ist mit der Multiplikation mit b und Umkehrung des Vorzeichens des Resultats. Es ist also

$$(+a i) \cdot (-b) = -(a b) i\,; \quad (-a i) \cdot (-b) = +(a b) i \quad .$$

Man kann entsprechend erklären, daß mit einer imaginären Zahl multiplizieren gleichbedeutend sei mit der Multiplikation mit der entsprechenden reellen Zahl und Versetzung des Resultats in die imaginäre Zahlenlinie. Hiernach ist

$$(+a) \cdot (+b i) = +(a b) i\,; \quad (+a) \cdot (-b i) = -(a b) i$$
$$(-a) \cdot (+b i) = -(a b) i\,; \quad (-a) \cdot (-b i) = +(a b) i$$

und die Vergleichung mit den vorhergehenden Resultaten zeigt, daß auch hier das Gesetz von der Vertauschbarkeit der Faktoren gilt.

Entsprechend läßt sich auch einem Produkt zweier imaginärer Zahlen eine Bedeutung beilegen. Die Aufgabe $(a i) \cdot (b i)$ bedeutet, daß $a i$ mit b multipliziert und daß außerdem das Resultat in die imaginäre Zahlenlinie versetzt werden soll, so daß dieses reell wird. Es bleibt hierbei aber noch unbestimmt, in welche Richtung der andern Zahlenlinie das Produkt zu verlegen, also ob dasselbe positiv oder negativ zu nehmen ist. Diese Frage erledigt sich dadurch, daß

$$i \cdot i = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

gesetzt werden muß, und daß hiernach

$$(+i) \cdot (+i) = -1\,; \quad (+i) \cdot (-i) = (-i) \cdot (+i) = +1\,; \quad (-i) \cdot (-i) = -1$$

zu setzen ist. Man ist also zu folgender Erklärung genötigt:

Unter einem Produkt zweier imaginärer Zahlen ist diejenige Zahl zu verstehen, die man durch Multiplikation der entsprechenden reellen Zahlen erhält und zwar die positiv reelle, wenn die beiden imaginären Faktoren ungleiche, die negativ reelle, wenn die Faktoren gleiche Vorzeichen haben. Es ist also

$$(+a i) \cdot (+b i) = -a b\,; \quad (+a i) \cdot (-b i) = -(a i) \cdot (+b i) = +a b \quad ;$$
$$(-a i) \cdot (-b i) = -a b \quad .$$

Die Regel »gleiche Vorzeichen geben +, ungleiche —« verwandelt sich also hier in die entgegengesetzte.

Entsprechende Regeln für die Division von imaginären Zahlen ergeben sich durch Umkehrung aus denen für die Multiplikation. Es ist hiernach

$$\frac{+ai}{+b} = +\frac{a}{b}i\,; \quad \frac{-ai}{+b} = -\frac{a}{b}i\,; \quad \frac{+ai}{-b} = -\frac{a}{b}i\,; \quad \frac{-ai}{-b} = +\frac{a}{b}i\,;$$

$$\frac{+ai}{+bi} = +\frac{a}{b}\,; \quad \frac{+ai}{-bi} = -\frac{a}{b}\,; \quad \frac{-ai}{+bi} = -\frac{a}{b}\,; \quad \frac{-ai}{-bi} = +\frac{a}{b}\,;$$

$$\frac{+a}{+bi} = -\frac{a}{b}i\,; \quad \frac{+a}{-bi} = +\frac{a}{b}i\,; \quad \frac{-a}{+bi} = +\frac{a}{b}i\,; \quad \frac{-a}{-bi} = -\frac{a}{b}i\,.$$

Die vorstehenden Multiplikations- und Divisionsregeln lassen sich, wie folgt, merken: Die Verwandlung einer reellen Zahl a in eine imaginäre ai kann aufgefaßt werden als eine Richtungsveränderung, die durch eine Drehung aus der Zahlenlinie um 90^0 hervorgebracht wird. Hierbei wird man sich die Drehung so denken, daß $+a$ in $+ai$, $-a$ in $-ai$ übergeht. Die imaginäre Zahl ai wieder imaginär nehmen, heißt diese Drehung um 90^0 in demselben Sinne wiederholen. Hierdurch geht offenbar die positiv imaginäre Zahl $+ai$ in die negativ reelle $-a$ und ebenso die negativ imaginäre $-ai$ in die positiv reelle $+a$ über, denn beide Drehungen ergeben zusammen eine solche von 180^0. Mit $+bi$ multiplizieren heißt nun mit b multiplizieren und in dem gedachten Sinne die Richtung um 90^0 verändern; mit $-bi$ multiplizieren heißt mit b multiplizieren und die Richtung im umgekehrten Sinne verändern. Daher wird aus $(+a)\cdot(+bi)$ wieder $+(ab)i$, aus $(+a)\cdot(-bi)$ dagegen $-(ab)i$, ferner aus $(+ai)\cdot(+bi)$, weil zweimalige Drehung um 90^0 eine solche um 180^0 hervorbringt, $-ab$ u. s. w. — Die Divisionsregeln ergeben sich durch Umkehrung dieses Gedankengangs. Soll z. B. $\frac{+a}{+bi}$ berechnet, also der Faktor gesucht werden, womit $+bi$ zu multiplizieren ist, um die positiv reelle Zahl $+a$ zu geben, so muß dieser Faktor negativ imaginär sein, denn ein positiv imaginärer würde ein negativ reelles Resultat geben u. s. w.

Man hüte sich also in Aufgaben, wie $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}$ nach den Regeln für reelle Zahlen etwa $\sqrt{(-a)\cdot(-b)} = \sqrt{+ab} = \pm ab$ zu rechnen. Von dem hierbei erhaltenen doppelten Resultat ist nur das eine $-ab$ richtig.

Die vorstehenden Regeln gelten auch, wenn a oder b gebrochene oder irrationale Zahlen sind, da in diesem Fall die früher ausgeführten Entwicklungen sich ebenfalls anwenden lassen.

Auch ergibt sich die allgemeine Richtigkeit des Satzes, daß bei Produkten von beliebig vielen, reellen oder imaginären Faktoren, die Reihenfolge der Multiplikationen für das Resultat gleichgültig ist.

Für die Potenzierung einer imaginären Zahl gehen aus dem vorstehenden folgende Regeln hervor: Zunächst ist für die imaginäre Einheit:

$$i^2 = -1\,; \quad i^3 = -i\,; \quad i^4 = +1\,; \quad i^5 = +i\,; \quad i^6 = -1\,,$$

u. s. w., allgemein

$$i^{4n} = +1\,, \quad i^{4n+1} = +i\,, \quad i^{4n+2} = -1\,; \quad i^{4n+3} = -i\,.$$

Ferner ist

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i\,; \quad i^{-2} = \frac{1}{i^2} = -1\,; \quad i^{-3} = \frac{1}{i^3} = -\frac{1}{i} = +i\,,$$

$$i^{-4} = \frac{1}{i^4} = +1\,,$$

u. s. w., allgemein

$$i^{-4n} = +1\,; \quad i^{-(4n+1)} = -i\,; \quad i^{-(4n+2)} = -1\,; \quad i^{-(4n+3)} = +i\,.$$

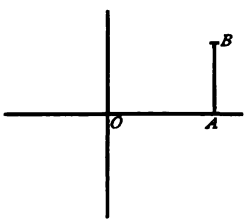
Ferner ist allgemein

$$(ai)^n = a^n \cdot i^n, \text{ also } (ai)^2 = -a^2; \ (ai)^3 = -a^3 i \ ;$$
$$(ai)^4 = +a^4; \ (ai)^5 = +a^5 i$$

u. s. w.

Die Behandlung der Potenzierung imaginärer Zahlen für den Fall, daß der Exponent eine gebrochene, irrationale oder eine imaginäre Zahl ist, sowie die Behandlung von vierten, sechsten u. s. w. Wurzeln aus negativen Zahlen muß späterer Untersuchung überlassen bleiben.

4. Während im vorigen imaginäre Zahlen sowohl unter sich, als mit reellen durch Multiplikation und Division verbunden werden konnten, erschien bei der Addition und Subtraktion nur eine Verbindung imaginärer Zahlen unter sich, nicht aber mit reellen möglich, weil beide Arten von Zahlen sich auf verschiedenartige, nicht vergleichbare Einheiten beziehen. Ein Ausdruck von der Form $a + bi$ erscheint also hiernach unmöglich, falls es nicht auch hier gelingt, durch eine neue Erweiterung des Zahlbegriffs ihm eine Bedeutung beizulegen. In diesem Fall muß freilich die Zahl aufhören, nur als die zusammenfassende Angabe einer bestimmten Anzahl völlig gleichartiger Größen zu gelten, und man muß annehmen, daß es auch möglich sei, Einheiten verschiedener Arten zu einer einzigen Zahl zusammenzusetzen. Inwiefern dies gestattet sein könne, zeigt wieder eine geometrische Veranschaulichung: Man kann zu einer nach bestimmter Richtung erfolgten Bewegung nicht bloß eine weitere Bewegung in derselben oder in der entgegengesetzten Richtung, sondern auch eine nach irgend einer andern Richtung hinzufügen und die zurückgelegten Wege nicht bloß nach der absoluten Länge, sondern auch zugleich nach den verschiedenen Richtungen zu einer Bewegungsgröße vereinigt denken. In dieser Weise kann die komplexe Zahl $a + bi$ dadurch geometrisch dargestellt werden, daß zuerst auf der reellen Zahlenlinie eine Strecke $OA = a$ und dann von A aus in einer zu OA senkrechten, also in der imaginären Richtung, eine Strecke $AB = b$ abgetragen wird. Man gelangt so, statt zu einem Punkte der reellen oder der imaginären Zahlenlinie, zu einem Punkte B, der seitlich von diesen in der Ebene liegt und umgekehrt läßt sich die Lage eines jeden Punktes der Ebene durch eine Zahl von der Form $a + bi$, wobei a und b positiv oder negativ sein können, darstellen. Die Zahlenlinie ist also durch die komplexen Zahlen zur Zahlenebene erweitert.



Während demnach die reellen Zahlen zur Bezeichnung der Stellen von gleichartigen Zahlen dienen, wenn diese sich in eine einzige Reihe ordnen lassen, reichen sie nicht hin, um auch die Stellen solcher Zahlen zu bezeichnen, bei denen die Anordnung in eine einfache Reihe nicht möglich ist, die sich vielmehr nur in verschiedenen Reihen nebeneinander ordnen lassen. Hier treten die komplexen Zahlen an ihre Stelle, die übrigens die reellen wie die imaginären als besondere Fälle einschließen, denn $a + bi$ wird reell für $b = 0$ und imaginär für $a = 0$.

Eine komplexe Zahl besteht also im allgemeinen aus einem reellen und einem imaginären Teil.

Zwei komplexe Zahlen, die sich voneinander nur durch das Vorzeichen des imaginären Teiles unterscheiden, wie $a + bi$ und $a - bi$, heißen konjugiert komplex. Sie werden dargestellt durch zwei zur reellen Zahlenlinie symmetrisch liegende Punkte.

Zwei komplexe Zahlen $a + bi$ und $c + di$ sind einander gleich, wenn zugleich $a = c$ und $b = d$ ist.

Unter der Summe zweier komplexer Zahlen hat man die komplexe Zahl zu verstehen, deren reeller Teil die Summe ihrer reellen und deren imaginärer

Teil die Summe ihrer imaginären Teile ist. Man hat also

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

und entsprechend die Differenz

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i \quad .$$

Daher ist die Summe zweier konjugiert komplexer Zahlen

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a$$

eine reelle und die Differenz

$$(a + bi) - (a - bi) = 2bi$$

eine imaginäre Zahl.

Ein Polynom aus komplexen Zahlen ist im allgemeinen wieder eine komplexe Zahl $A + Bi$, wobei die reellen und die imaginären Teile für sich vereinigt werden können.

Das Produkt zweier komplexen Zahlen $a + bi$ und $c + di$ kann nach der Regel für das Produkt zweier Binome entwickelt werden, da sich reelle Zahlen mit imaginären multiplizieren lassen. Man erhält so:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \quad .$$

Das Produkt zweier konjugierten komplexen Zahlen ist hiernach

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + abi - abi + b^2 = a^2 + b^2 \quad ,$$

also eine positive reelle Zahl, die Norm der komplexen Zahl $a + bi$. Da das Vorzeichen von a und b dabei nicht in Betracht kommt, so haben die vier Zahlen $a \pm bi$, $-a + bi$ dieselbe Norm $a^2 + b^2$.

Ferner ist

$$(a \pm bi)^2 = a^2 \pm 2abi + (bi)^2 = a^2 - b^2 \pm 2abi \quad ,$$

$$(a + bi)^3 = a^3 - 3ab^2 \pm i(3a^2b - b^3)$$

und allgemein wird jede Potenz einer komplexen Zahl, deren Exponent eine natürliche Zahl ist, wieder eine komplexe Zahl sein.

Der Quotient zweier komplexen Zahlen läßt sich, wie ihre Summe, ihre Differenz oder ihr Produkt wieder als eine komplexe Zahl darstellen. Erweitert man einen Quotienten, dessen Divisor komplex ist, mit der zu dem Divisor konjugierten Zahl, so erhält man als Divisor die Norm der komplexen Zahl, also eine reelle Zahl. So wird:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bci - adi + bd}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i \quad .$$

Es ergibt sich also, daß man mit Zahlen, die irgendwie i enthalten, so rechnen kann als wäre i eine reelle Zahl, wenn man nur beachtet, daß $i^2 = -1$ ist. Wenn man hiernach beliebig viele komplexe Zahlen durch Addition und Subtraktion, Multiplikation und Division miteinander verbindet, so ist das Resultat im allgemeinen wieder eine komplexe Zahl $A + Bi$. Vertauscht man überall i mit $-i$, so erhält man die konjugierte Zahl $A - Bi$.

Es ist möglich, daß ein Zahlenausdruck in komplexer Form erscheint, aber reell ist, wenn sich die imaginären Teile aufheben. So muß

$$(a + bi)^3 + (a - bi)^3$$

reell sein, weil beide Kuben konjugiert komplexe Zahlen geben. Dagegen ist

$$(a + bi)^3 - (a - bi)^3$$

imaginär, weil sich die reellen Teile aufheben.

§ 14. Das Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel.

1. Die Berechnung des Wertes der Wurzel aus einer gemeinen Zahl ergibt sich durch Umkehrung der entsprechenden Potenzierungsaufgabe.

Die Quadrate aller einziffrigen natürlichen Zahlen liegen zwischen $1^2 = 1$ und $10^2 = 100$, sind also ein- oder zweiziffrig; die Quadrate aller zweiziffrigen Zahlen liegen zwischen $10^2 = 100$ und $100^2 = 10000$, sind also drei- oder vierziffrig u. s. w. Allgemein liegen die Quadrate der n-ziffrigen Zahlen zwischen $(10^{n-1})^2$ und $(10^n)^2$, d. h. zwischen 10^{2n-2} und 10^{2n}, sind also $2n$ — 1- oder $2n$-ziffrig.

Hieraus folgt, daß umgekehrt die Quadratwurzel aus einer $2n$ — 1- oder $2n$-ziffrigen Zahl, oder, falls sie irrational ist, die nächst kleinere ganze Zahl, n-ziffrig sein muß.

Die Quadratwurzel aus einer ein- oder zweiziffrigen Zahl ist also einziffrig, und kann daher mittels des Einmaleins gefunden werden.

Die Quadratwurzel aus einer drei- oder vierziffrigen Zahl ist zweiziffrig, kann also in der Form $10a + b$ geschrieben werden. Dann ist der Radikand gleich

$$(10a + b)^2 = (10a + b) \cdot (10a + b) = 100a^2 + 2 \cdot 10a \cdot b + b^2 \quad .$$

Daher erhält man umgekehrt aus diesem Radikanden die gesuchte Wurzel, indem man ihn in zwei Gruppen teilt, deren zweite aus den beiden letzten Ziffern besteht, und dann die Ziffer a so bestimmt, daß a^2 entweder gleich der die erste Gruppe bildenden Zahl oder kleiner als diese ist und ihr möglichst nahe kommt. Nachdem man dann $100a^2$ von dem Radikanden subtrahiert hat, dividiere man in den Rest mit $20a$; der Quotient liefert die Ziffer b. Nachdem $20ab$ von dem Reste subtrahiert ist, hat man endlich noch b^2 von dem hierbei gebliebenen Reste zu subtrahieren. Ergibt sich, daß dieser zu klein hierfür ist, so hat man vorher b zu groß angenommen und muß die Rechnung mit einem um eine Einheit kleineren Werte wiederholen. Ist der letzte Rest gleich b^2, so ist die Wurzel rational und vollständig berechnet. Ist der letzte Rest größer als b^2, so ist die Wurzel irrational und man hat die nächstkleinere ganze Zahl gefunden.

Beispiele:

$$\sqrt{7\,29} = \overset{a}{2}(8)\overset{b}{7}$$

$100a^2 =$	400		
$20a =$	$40\,329$		329
$20ab =$	320	$20ab =$	280
	9		49
	$b^2 = 64$	$b^2 =$	49

Man sieht ein, daß man bei dieser Rechnung die Nullen an $100a^2$ und an $20ab$ weglassen und demnach, wie folgt, nach der Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

rechnen kann:

$$\sqrt{7\,29} = \overset{a}{2}\,\overset{b}{7}$$

$a^2 =$	4
$2a =$	$4\,32 \mid b =$ 7
$2ab =$	28
	49
$b^2 =$	49

$$\sqrt{79\,36} = \overset{a}{8}\,\overset{b}{9}$$

$a^2 =$	64
$2a =$	$16\,153 \mid b =$ 9
$2ab =$	144
	96
$b^2 =$	81
Rest:	15

Bei einiger Übung in diesem Verfahren wird man die Berechnung von $2ab$ und von b^2 miteinander verbinden, also $2ab\ (10) + b^2$, indem man mit b^2 beginnt, als eine einzige Zahl bestimmen und dann subtrahieren. Die vorstehenden Beispiele gestalten sich dann wie folgt:

$$\begin{array}{rl} & \overset{a\ \ b}{\sqrt{7\,29}} = 2\ 7 \\ a^2 = & 4 \\ 2a = & \overline{4|32|9}\ \ b = 7 \\ 2ab + b^2 = & \ 32\ 9 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rl} & \sqrt{79\,36} = 89 \\ & 64 \\ & 16|153\,6 \\ & \ 1521 \\ & \ \ \ 15 \end{array}$$

In dem zweiten Beispiele ist also, wie folgt, gerechnet: $2a = 16$; $b = 9$; $b^2 = 81$, also wird 1 hingeschrieben und 8 im Sinn behalten; $16 \cdot 9 = 144$, $144 + 8 = 152$.

Die Quadratwurzel aus einer fünf- oder sechsziffrigen Zahl ist dreiziffrig und hat also die Form $100a + 10b + c$ oder $10 \cdot (10a + b) + c$. Setzt man also $10a + b = a_1$, so erhält man die vorige Form $10a_1 + c$, und der Radikand muß gleich $100a_1^2 + 2 \cdot 10a_1 \cdot c + c^2$ sein. Hieraus folgt die Regel: Man teile den Radikanden von rechts nach links in Gruppen zu je zwei Ziffern, wobei die erste Gruppe links ein- oder zweiziffrig sein kann, bestimme zu den beiden ersten Gruppen, wie vorher gezeigt, die zweiziffrige Zahl $10a + b$, setze diese gleich a_1; und entwickle nun mittels dieses a_1 und der dritten Gruppe in gleicher Weise wie vorher $2 \cdot 10a_1 \cdot c + c^2$. Die Ausführung zeigen folgende Beispiele:

$$\begin{array}{rl} & \overset{\overset{a}{\frown}}{\sqrt{32|94|76}} = \overset{a\ \ b\ \ c}{5\ \ 7\ \ 4} \\ a^2 = & 25 \\ 2a = & 10\ \ 79|4 \\ 2ab + b^2 = & 74\ 9 \\ 2a = & 114\ \ 457|6 \\ 2ac + c^2 = & 457\ 6 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rl} & \sqrt{4|20\,27} = 205 \\ & 4 \\ & (4)0\ 20\ 27 \\ & \ \ \ 20\ 25 \\ & \ \ \ \ \ \ 2 \end{array}$$

Für Quadratwurzeln aus mehr als sechsziffrigen Zahlen ergibt sich leicht die Ausdehnung des vorstehenden Verfahrens. Ist z. B. die Wurzel vierziffrig, so denke man sich diese wieder in der Form $z = 1000a + 100b + 10c + d$ und setze $10a + b = a_1$, $10a_1 + c = a_2$, also $z = 10a_2 + d$. Im folgenden Beispiel ist noch die Abänderung getroffen, daß die Werte von $2a$, $2a_1$ u. s. w. über die entsprechenden Zahlen a, a_1 u. s. w. des Resultats geschrieben sind, wodurch eine Bequemlichkeit für ihre successive Berechnung erreicht wird.

$$\begin{array}{l} \overset{4\ 6\ 8}{\sqrt{5\ 35\ 69\ 10|25}} = 23145 \\ \ \ 4 \\ \ \ 1\ 35 \\ \ \ 1\ 29 \\ \ \ \ \ 6\ 69 \\ \ \ \ \ 4\ 61 \\ \ \ \ \ 2\ 08\ 10 \\ \ \ \ \ 1\ 84\ 96 \\ \ \ \ \ \ \ 23\ 14\ 25 \\ \ \ \ \ \ \ 23\ 14\ 25 \end{array}$$

In den sämtlichen vorstehenden Beispielen ist die gebräuchliche Schreibweise bei der Division bezw. Subtraktion angewendet worden, um das Verfahren mit hinreichender Klarheit deutlich zu machen. Bei Anwendung der früher empfohlenen Methoden der Division und Subtraktion vermindert sich die Anzahl der hinzuschreibenden Ziffern, wie die folgende Wiederholung des vorstehenden Beispiels zeigt.

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad {\scriptstyle 4\,6\,2\,8} \\ \sqrt{5|35|69|10|25} = 23145 \\ \;1\,35 \\ \qquad 6\,69 \\ \qquad 2\,08\,10 \\ \qquad\quad 23\,14\,25 \\ \qquad\qquad 00\,00 \end{array}$$

Hier ist gerechnet worden: $a = 2$, also $a^2 = 4$; $4 + 1 = 5$. Die Heranziehung der nächsten Gruppe ergibt also 135. Nun ist $2a = 4$; $13 : 4$ liefert $b = 3$, also $b^2 = 9$; $9 + 6 = 15$; $3 \cdot 4 + 1 = 13$, $13 + 0 = 13$. Es bleibt also nur der Rest 6, und die Heranziehung der nächsten Gruppe liefert 669. Nun ist $a = 23$, $2a = 46$; $66 : 46$ liefert $b = 1$; $b^2 = 1$; $1 + 8 = 9$; $1 \cdot 6 = 6$; $6 + 0 = 6$; $1 \cdot 4 = 4$, $4 + 2 = 6$. Es bleibt also der Rest 208, und die Heranziehung der nächsten Gruppe liefert 20810; dazu ist $a = 231, 2a = 462$, $b = 4$ u. s. w.

2. Ist der Radikand eine gebrochene Zahl, so kann man nach 2) in § 12 Nr. 1 die Wurzel aus dem Zähler und aus dem Nenner einzeln ausziehen und dann die erste durch die zweite dividieren. Bei einer Dezimalzahl ist die Quadratwurzel aus dem Nenner dann ein vollständiges Quadrat einer Potenz von 10, wenn die Anzahl der Dezimalstellen gerade ist. Dies läßt sich nun immer bewirken, da man nötigenfalls dem Dezimalbruch eine Null anhängen kann. Dann ist also die Wurzel wieder eine Dezimalzahl, und diese hat halb soviele Dezimalstellen, als der Radikand, oder ebensoviele, als Gruppen von Zifferpaaren auf das Komma folgen. So ist z. B.

$$\sqrt{1{,}44} = \sqrt{\frac{144}{100}} = \frac{12}{10} = 1{,}2 \quad ;$$

$$\sqrt{14{,}4} = \sqrt{14{,}40} = \sqrt{\frac{1440}{100}} = \frac{\sqrt{1440}}{10} \quad .$$

Hieraus ergibt sich folgende praktische Regel für die Berechnung von Quadratwurzeln aus Dezimalzahlen:

Man teile den Radikanden in Gruppen von je zwei Ziffern, und zwar vom Komma aus nach rechts und nach links, und ergänze die letzte Gruppe, falls diese einziffrig ist, durch eine Null. Man radiziere dann, wie bei ganzen Zahlen, also ohne Rücksicht auf das Komma, setze aber in dem Resultat das Komma, sobald man es bei dem Fortschreiten von Gruppe zu Gruppe im Radikanden überschreiten muß.

Ist der Radikand keine vollständige Quadratzahl, bleibt also schließlich ein Rest, so kann man durch Anhängen beliebig vieler Nullen an den Radikanden die Fortsetzung der Rechnung ermöglichen, und so für den irrationalen Wurzelwert so viele Dezimalstellen bestimmen, bis die für den vorliegenden Fall erforderliche Genauigkeit erreicht ist. Dieses Verfahren findet auch Anwendung auf die Berechnung von irrationalen Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen, da man auch diesen ein Komma und beliebig viele Nullen als Dezimalstellen anfügen kann. So hat man z. B.:

$$
\begin{array}{l}
\qquad\quad (2)34640 \\
\sqrt{3} = 1{,}73205 \\
\;\;200 \\
\;\;\;1100 \\
\;\;\;\;\;7100 \\
\;\;\;\;\;\;1760000 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;2797500
\end{array}
$$

Um im Resultat n Dezimalstellen zu erhalten, erscheint hiernach die Kenntnis von $2n$ Dezimalstellen im Radikanden notwendig. Dies ist jedoch nur scheinbar richtig, denn da das Quadrat der zuletzt gefundenen Ziffer der Wurzel auf eine Anzahl der folgenden Ziffern ohne Einfluß ist, und soweit unberücksichtigt bleiben darf, so kann man nach Berechnung irgend einer Anzahl von Stellen der Wurzel das Heranziehen neuer Stellen des Radikanden unterlassen und jedesmal bloß das Glied $2ab$ berechnen und subtrahieren, indem man bei jeder folgenden Division mit $2a$ eine Ziffer von rechts aus vom Divisor abstreicht. Man kann auf diese Weise, wenn n Ziffern der Wurzel vorher bestimmt waren, noch $n-1$ bis n weitere Ziffern berechnen. Das nachfolgende Beispiel wird dieses Verfahren der sogenannten abgekürzten Ausziehung von Quadratwurzeln erläutern. Es wird zunächst wie vorher $\sqrt{15}$ auf 3 Dezimalen berechnet, und von da an abgekürzt verfahren.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{15} = 3{,}872983 \\
 & \;\;9 \\
\hline
6 & 600 \\
 & 544 \\
\hline
76 & 5600 \\
 & 5369 \\
\hline
774 & 23100 \\
 & 15484 \\
\hline
7744 & 76160 \\
 & 69704 \\
\hline
774 & 7456 \\
 & 6195 \\
\hline
77 & 261 \\
 & 232 \\
\hline
 & 29
\end{array}
$$

Ist der Radikand selbst ein abgekürzter Dezimalbruch, so ergibt sich aus dem vorstehenden, wie weit die Wurzel genau gefunden werden kann. Für eine genauere Bestimmung dürfen selbstverständlich nicht Nullen an den Radikanden angehängt, sondern es müssen die nächstfolgenden Stellen des Radikanden ermittelt werden.

Die Quadratwurzel aus einem gemeinen Bruch wird nach der Regel 2) in § 12 Nr. 1 nur dann bequem gefunden, wenn die Wurzel aus dem Nenner rational, oder eine ganze Zahl mit möglichst wenigen Ziffern ist. Es empfiehlt sich andernfalls, den Nenner rational zu machen, also z. B. $\sqrt{\frac{2}{3}}$ nicht mittels $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ zu berechnen, sondern vorher in $\sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$ umzuformen. Noch bequemer ist in der Regel die Verwandlung des gemeinen Bruches in einen Dezimalbruch, also im vorliegenden Beispiel die Berechnung von $\sqrt{0{,}666\ldots}$

3. Um die Quadratwurzel aus einem Polynom zu berechnen, ordne man dieses zunächst nach den Potenzen einer Zahl und bestimme dann in analoger

Weise, wie bei gemeinen Zahlen, nacheinander a, b, c u. s. w. entsprechend der Formel $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$. Als Beispiel hierzu diene das folgende:

$$\sqrt{81\,x^{10m-14} + 126\,x^{8m-10} + 103\,x^{6m-6} + 42\,x^{4m-2} + 9\,x^{2m+2}} = 9\,x^{5m-7} + 7\,x^{3m-3} + 3\,x^{m+1}$$

$$\begin{array}{rl}
a^2 = 81\,x^{10m-14} & \\
2a = 18\,x^{5m-7} & \\
2ab = & +\,126\,x^{8m-10} \\
b^2 = & +\,49\,x^{6m-6} \\
\hline
2a = 18\,x^{5m-7} + 14\,x^{3m-3} & +\,54\,x^{6m-6} + 42\,x^{4m-2} + 9\,x^{2m+2} \\
2ab = & +\,54\,x^{6m-6} + 42\,x^{4m-2} \\
\hline
 & b^2 = +\,9\,x^{2m+2}
\end{array}$$

In einfachen Fällen läßt sich durch Zerlegung des Radikanden nach gewissen Quadratformeln die Quadratwurzel angeben. So ist zu beachten, daß das Quadrat eines Trinoms im allgemeinen 6 Glieder enthalten muß, nämlich die Summe der Quadrate der 3 Glieder des Trinoms und die doppelten Produkte von je zweien mit Berücksichtigung des Vorzeichens. Es ist also

$$(a + b \pm c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \pm 2ac \pm 2bc \quad ,$$
$$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc \quad .$$

Hiernach ist z. B.

$$\sqrt{4\,a^4 + 12\,a^3 b - 7\,a^2 b^2 - 24\,a b^3 + 16\,b^4} = \sqrt{4\,a^4 + 9\,a^2 b^2 + 16\,b^4 + 12\,a^3 b - 16\,a^2 b^2 - 24\,a b^3} = 2a^2 + 3ab - 4b^2 \,.$$

4. Die dritte Potenz einer einziffrigen Zahl liegt zwischen $1^3 = 1$ und $10^3 = 1000$, ist also ein-, zwei- oder dreiziffrig; die dritte Potenz einer zweiziffrigen Zahl liegt zwischen 1000 und 1000000, ist also vier- bis sechsziffrig; allgemein ist die dritte Potenz einer n-ziffrigen Zahl $3n - 2$-, $3n - 1$- oder $3n$-ziffrig.

Ferner ist

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 \quad .$$

Die Umkehrung beider Sätze nach Analogie des Verfahrens bei den Quadratwurzeln führt auf folgende Regel für das Ausziehen von Kubikwurzeln.

Man teile die Ziffern des Radikanden von den Einern aus, also bei einer ganzen Zahl von rechts nach links, bei einer Dezimalzahl vom Komma aus nach beiden Seiten, in Gruppen zu je drei Ziffern, wobei die erste Gruppe links auch zwei- oder einziffrig werden kann. Man bestimme zu dieser ersten Gruppe den Wert von a so, daß a^3 gleich dieser Gruppe oder der nächst kleinern ganzen Kubikzahl ist, schließe an den Rest die erste Ziffer der nächsten Gruppe an, bilde $3a^2$ und dividiere die vorher erhaltene Zahl durch $3a^2$; die für den Quotienten erhaltene ganze Zahl nehme man zur zweiten Ziffer b des Resultats, bilde $3a^2 b$, subtrahiere dieses von der vorher erhaltenen Restzahl, ziehe zu dem jetzt bleibenden Rest die zweite Ziffer der Gruppe herunter, subtrahiere von der entstehenden Zahl $3ab^2$, ziehe die dritte Ziffer der Gruppe herunter und subtrahiere b^3. Ergibt eine der gedachten Subtraktionen einen Subtrahend, der größer als der Minuend ist, so war für b ein zu großer Wert angenommen und die Rechnung ist mit dem nächst kleinern Werte von b zu wiederholen. Man betrachte sodann die aus den Ziffern a und b bestehende Zahl als ein neues a, die bisherige Berechnung als die des Gliedes a^3 der Formel, bestimme mit Hilfe der nächsten Gruppe und des Gliedes $3a^2 b$ durch Division ein neues b und fahre, wie vorher, fort. Sind alle Gruppen des Radikanden in dieser Weise benutzt

und bleibt noch ein Rest, so kann man mittels Anhängen von Nullen bis zur Erreichung der verlangten Genauigkeit weiter rechnen. Ist der Radikand selbst abgekürzt, so dürfen keine Nullen angehängt werden; man kann auch hier statt dessen abgekürzt rechnen. Die Ausführung des Verfahrens zeigen folgende Beispiele:

$\sqrt[3]{12\,812\,904} = \overset{a}{2}\,\overset{b}{3}\,4$ (a_1, b_1)

$a^3 =$	8	
$3a^2 =$	12 | 48	$b = 3$ ($b = 4$ zu groß)
$3a^2b =$	36	
	121	
$3ab^2 =$	54	
	672	
$b^3 =$	27	
$3a_1^2 =$	1587 | 6459	$b_1 = 4$
$3a_1^2b_2 =$	6348	
	1110	
$3a_1b_1^2 =$	1104	
	64	
$b^3 =$	64	

$\sqrt[3]{9\,300\,947\,727} = 2103$

	8	
12	13	
	12	
	10	
	6	
	40	
	1	
1323	399	
132 300 |	399 477	
	396 900	
	2 577 2	
	56 70	
	201 027	
	27	
	201 000	

Kürzer als die vorstehende ausführliche Rechnungsweise ist es, jedesmal nach Bestimmung von b die drei Glieder $3a^2b$, $3ab^2$ und b^3 nicht einzeln nacheinander zu subtrahieren, sondern die Summe $3a^2b\,(\cdot 100) + 3ab^2\,(\cdot 10) + b^3$ zu berechnen und nur einmal zu subtrahieren, wobei man sich zur Berechnung dieser Summe noch verschiedener Abkürzungen, wie z. B. der Absonderung des gemeinsamen Faktors b, bedienen kann. Wir unterlassen die Ausführung von Beispielen hierzu, da man in der Praxis das immerhin umständliche Verfahren meist durch die später zu entwickelnde Methode der Berechnung mit Logarithmen ersetzen wird. — Die Ausziehung der Kubikwurzel aus Dezimalzahlen u. s. w. geschieht in analoger Weise wie bei den Quadratwurzeln.

Für Wurzeln, deren Exponent größer als 3 ist, kann man nach Anleitung des bei den Quadrat- und Kubikwurzeln eingeschlagenen Verfahrens, also mit Hilfe der durch Ausführung der Multiplikation für die betreffende Potenz von $10a + b$ zu entwickelnden Formeln, entsprechende Methoden ableiten. Doch ist die Anwendung solcher nicht zu empfehlen, wenn der Exponent keine Primzahl ist, denn in diesem Fall kann man die Wurzel auf solche niederer Grade zurückführen, was unter allen Umständen bequemer ist. So ist z. B. $\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}$, und entsprechend lassen sich 8-te Wurzeln durch dreimaliges Ausziehen einer Quadratwurzel, 6-te durch Ausziehung einer Kubikwurzel aus einer Quadratwurzel berechnen u. s. w.

Auch hier wird praktisch die Berechnung mit Hilfe der Logarithmen angewendet (vgl. § 16).

§ 15. Das Logarithmieren.

1. Die zweite Umkehrung des Potenzierens verlangt die Lösung der Aufgabe, zu dem gegebenen Werte einer Potenz und ihrer Basis den Exponenten zu berechnen, oder den Wert von x aus der Gleichung

$$a^x = b$$

zu bestimmen. Man nennt diese Rechnungsart Logarithmieren, den gegebenen

Wert b der Potenz den Logarithmand, die gegebene Potenzbasis a die Basis des Logarithmus und den Exponenten x den Logarithmus. Für diesen schreibt man

$$x = {}^a\log b$$

und liest diesen Ausdruck »Logarithmus von b zur Basis a«, oder kurz »a-Logarithmus b«.

Der Logarithmus ist also die Zahl, mit der die Basis potenziert werden muß, um den Logarithmanden zu erhalten. Diese Erklärung kann durch folgende Formel dargestellt werden:

$$a^{{}^a\log b} = b \quad .$$

So ist beispielsweise ${}^2\log 8 = 3$, denn $2^3 = 8$; ${}^3\log 81 = 4$, denn $3^4 = 81$; dagegen ${}^9\log 81 = 2$ und ${}^{81}\log 81 = 1$. Ferner ist ${}^{16}\log 4 = \frac{1}{2}$, denn $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$; ${}^{\frac{2}{3}}\log \frac{4}{9} = 2$, denn $(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$; ${}^2\log \frac{1}{8} = -3$; ${}^{25}\log \frac{1}{5} = -\frac{1}{2}$, ${}^{\frac{2}{3}}\log \frac{27}{8} = -3$ u. s. w.

Aus der Erklärung des Logarithmus folgt ohne weiteres

$${}^a\log (a^n) = n \quad .$$

Inbesondere ist

$${}^a\log a = 1 \quad ,$$

d. h. der Logarithmus der Basis ist stets gleich 1. Ferner ist

$${}^a\log 1 = 0 \quad ,$$

d. h. der Logarithmus von 1 ist für jede Basis gleich 0, denn $a^0 = 1$. Eine Ausnahme von beiden Regeln macht

$${}^1\log 1 = \frac{0}{0} \quad ,$$

d. h. der Logarithmus von 1 zur Basis 1 kann jede beliebige Zahl sein, da jede Potenz von 1 gleich 1 ist.

Der Logarithmus einer Zahl, die nicht gleich 1 ist, zur Basis 1 ist nicht angebbar.

Es entsteht auch hier die Frage, ob die Logarithmierung auch dann in allen Fällen möglich ist, wenn sie nicht aus der Umkehrung einer wirklich ausgeführten Potenzierung hervorgegangen, sondern wenn für die Basis und den Logarithmanden willkürliche Zahlenwerte gesetzt sind. Für diese Untersuchung werde hier vorausgesetzt, daß Basis und Logarithmand reell sind. Ist die Basis negativ, so sind die Logarithmen aller positiven Zahlen, die ungerade Potenzen der Basis sind und ebenso die aller negativen Zahlen, die gerade Potenzen der Basis sind, nicht reell. So sind z. B. ${}^{-2}\log(-4)$ und ${}^{-2}\log 8$ nicht durch reelle Zahlen angebbar. Es wird daher weiter vorausgesetzt, daß die Basis reell und positiv sei. Dann haben negative Zahlen keinen reellen Logarithmus, da die Potenz einer positiven Basis nicht negativ werden kann.

Dagegen gibt es von jeder positiven Zahl einen reellen Logarithmus, wenn die Basis positiv ist. Um dieses nachzuweisen, beachte man, daß man aus a^x durch die Annahme $x = 0$, $x = 1$ u. s. w., $x = -1$, $x = -2$ u. s. w. eine Reihe von Zahlen

$$\ldots \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}, 1, a, a^2 \ldots$$

erhält, die nach der einen Seite unbegrenzt wächst, nach der andern unbegrenzt abnimmt. Ist nun ${}^a\log b = x$ zu bestimmen, soll also $a^x = b$ sein, so müssen sich für reelle positive Werte von a und b zwei Zahlen jener Reihe angeben lassen, zwischen denen b liegt, wenn b nicht eine der Zahlen jener Reihe selbst, x also als ganze Zahl bestimmt ist.

Es seien a und $a+1$ jene beiden Zahlen, so kann man

$$a^x = a^{\alpha+\frac{\gamma}{10}} = a^\alpha \cdot a^{\frac{\gamma}{10}} ,$$

mithin

$$a^{\frac{\gamma}{10}} = \frac{b}{a^\alpha} , \quad a^\gamma = \left(\frac{b}{a^\alpha}\right)^{10}$$

setzen und wieder für y zwei ganze Zahlen β, $\beta+1$ bestimmen, so daß $\left(\frac{b}{a^\alpha}\right)^{10}$ zwischen a^β und $a^{\beta+1}$ liegt, dann $y = \beta + z$ setzen, und in dieser Weise fortfahren.

Es sei beispielsweise $x = {}^2\log 7$ gesucht, so hat man $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, also kann man $7 = 2^x = 2^{2+\frac{\gamma}{10}} = 4 \cdot 2^{\frac{\gamma}{10}}$

$$2^{\frac{\gamma}{10}} = \frac{7}{4} , \quad 2^\gamma = \left(\frac{7}{4}\right)^{10}$$

setzen. Da nun $\left(\frac{7}{4}\right)^{10} = 269{,}38\ldots$ und $2^8 = 256$, $2^9 = 512$, so kann man $y = 8 + \frac{z}{10}$ setzen und erhält

$$2^{8+\frac{z}{10}} = \left(\frac{7}{4}\right)^{10} ; \quad 2^{\frac{z}{10}} = \left(\frac{7}{4}\right)^{10} : 256 ; \quad 2^z = \left[\left(\frac{7}{4}\right)^{10} : 256\right]^{10} ,$$

woraus wieder $z = 0 + \frac{u}{10}$ folgt, u. s. w. Es ist also

$${}^2\log 7 = 2{,}80\ldots$$

Auf diese Weise kann man für jeden Logarithmus einen Wert erhalten, der entweder rational, also eine ganze oder gebrochene Zahl, oder irrational ist, also bis zu beliebiger Genauigkeit angenähert durch eine Dezimalzahl ausgedrückt werden kann.

2. Für das Rechnen mit Logarithmen gelten folgende Sätze:

Der Logarithmus eines Produkts ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren.

Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz der Logarithmen des Dividenden und des Divisors.

Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt aus dem Exponenten und dem Logarithmus ihrer Basis.

Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Quotienten aus dem Logarithmus des Radikanden und dem Wurzelexponenten.

Dabei werden die Logarithmen für dieselbe Basis angenommen. Diese Sätze sind in Formeln auszudrücken:

1) $${}^m\log(a\,b) = {}^m\log a + {}^m\log b$$

2) $${}^m\log\frac{a}{b} = {}^m\log a - {}^m\log b$$

3) $${}^m\log(a^n) = n \cdot {}^m\log a$$

4) $${}^m\log\sqrt[n]{a} = \frac{{}^m\log a}{n} = \frac{1}{n} \cdot {}^m\log a .$$

Diese Sätze sind die Umkehrungen von Potenzsätzen. Man kann sie beweisen, indem man die Basis m mit beiden Seiten der Gleichungen potenziert und die entsprechenden Potenzregeln anwendet. Z. B. ist in der Tat

$$m^{{}^m\log a + {}^m\log b} = m^{{}^m\log a} \cdot m^{{}^m\log b} = a \cdot b = m^{{}^m\log (a \cdot b)} \quad .$$

Der Beweis kann auch auf folgende Art geführt werden. Ist

$${}^m\log a = x \, , \qquad {}^m\log b = y \quad ,$$

so folgt

$$m^x = a \, , \qquad m^y = b \quad ,$$

mithin

$$a \cdot b = m^x \cdot m^y = m^{x+y} \, , \qquad x + y = {}^m\log (a \cdot b) = {}^m\log a + {}^m\log b \quad ,$$

$$a : b = m^x : m^y = m^{x-y} \, , \qquad x - y = {}^m\log (a : b) = {}^m\log a - {}^m\log b \quad ,$$

$$a^n = (m^x)^n \quad = m^{nx} \quad , \qquad n x = {}^m\log (a^n) \quad = n \cdot {}^m\log a \quad .$$

Der vierte Satz ist in dem dritten enthalten, da $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ zu setzen ist. Als besondern Fall des zweiten Satzes hat man noch

$$5) \qquad {}^m\log \left(\frac{1}{b}\right) = {}^m\log 1 - {}^m\log b = -{}^m\log b \quad ,$$

d. h. der Logarithmus einer Zahl ist gleich dem negativen Logarithmus des reziproken Wertes der Zahl oder die Logarithmen einer Zahl und ihres reziproken Wertes haben gleichen absoluten Wert aber entgegengesetzte Vorzeichen. Ist $b > 1$, $m > 1$ so ist $\log (1 : b)$ negativ. Der Logarithmus eines echten Bruches ist also für eine Basis, die größer als 1 ist, immer negativ.

3. Ist man imstande, die Logarithmen aller positiven Zahlen für eine positive Basis m anzugeben, und soll der Logarithmus einer Zahl a für eine andre Basis n gefunden werden, so sei

$${}^n\log a = x \, , \qquad n^x = a \quad .$$

Nimmt man von beiden Seiten der letzten Gleichung die Logarithmen zur Basis m, so erhält man

$$x \cdot {}^m\log n = {}^m\log a \quad ,$$

also

$$6) \qquad x = {}^n\log a = \frac{{}^m\log a}{{}^m\log n} \quad .$$

Man findet also aus den Logarithmen der Zahlen für eine Basis m die Logarithmen der Zahlen für eine andre Basis n, indem man sie durch den Logarithmus der neuen Basis n für die alte m dividiert.

Hiermit ist die Aufgabe der Berechnung der Logarithmen zurückgeführt auf die Aufgabe, diese für irgend eine Basis zu berechnen.

Die Gesamtheit der Logarithmen aller positiven Zahlen für dieselbe Basis bilden ein Logarithmensystem für diese Basis.

Hat man eine Tabelle (Logarithmentafel) berechnet, die gestattet, von jeder positiven Zahl den Logarithmus für irgend ein System aufzuschlagen, so kann man mit Hilfe dieser Tafel nach dem vorstehenden Lehrsatz die Logarithmen für jedes beliebige andre System berechnen.

Daß, und auf welche Weise die Berechnung einer solchen Tabelle möglich ist, geht schon aus der Entwicklung in Nr. 1 hervor. Das daselbst angegebene Verfahren ist freilich so überaus mühsam und zeitraubend, daß die praktische Ausführung der Berechnung aller Logarithmen nach ihm schwerlich von jemand auch nur versucht werden dürfte.

Eine bequeme Methode zur Berechnung von Logarithmen wird in § 37 gezeigt. An dieser Stelle genügt es anzunehmen, daß man imstande sei, eine Logarithmentafel herzustellen, d. h. ein Logarithmensystem für eine Basis zu berechnen.

Für den praktischen Gebrauch bedient man sich aus sogleich anzugebenden Gründen der gemeinen Logarithmen, deren Basis die Zahl 10 ist, und die nach ihrem Erfinder auch BRIGGische Logarithmen genannt werden. Sie werden ohne Angabe der Basis geschrieben, so daß unter $\log a$ der gemeine Logarithmus der Zahl a zu verstehen und immer

$$a = 10^{\log a}$$

ist. Für irgend eine Basis n hat man dann nach 6):

$${}^{n}\log a = \frac{\log a}{\log n} .$$

§ 16. Die Logarithmen als Rechenhilfsmittel.

1. Daß für ein Logarithmensystem die Basis 10 am bequemsten ist, geht aus folgenden Eigenschaften der gemeinen Logarithmen hervor.

Es ist:

$$\log 1 = 0 , \quad \log 10 = 1 , \quad \log 100 = 2 \text{ u. s. w.},$$

daher sind die der Logarithmen aller Zahlen zwischen 1 und 10, d. h. aller einziffrigen Zahlen zwischen 0 und 1, diejenigen der Zahlen zwischen 10 und 100, d. h. der zweiziffrigen Zahlen zwischen 1 und 2 enthalten u. s. w. Allgemein folgt aus $\log 10^{n-1} = n - 1$ und $\log 10^{n} = n$, daß der Logarithmus einer n-ziffrigen Zahl zwischen $n - 1$ und n enthalten ist.

Die im allgemeinen irrationalen Logarithmen lassen sich als Dezimalzahlen darstellen, die je nach der erforderlichen Genauigkeit auf eine mehr oder minder große Anzahl von Dezimalstellen abgekürzt sind. Jeder Logarithmus besteht also aus einer ganzen Zahl und einem echten Dezimalbruch. Die ganze Zahl wird die Kennziffer, der echte Bruch die Mantisse des Logarithmus genannt. Für die gemeinen Logarithmen besteht sonach die Regel, daß die Kennziffer aus der Anzahl der Ziffern des Logarithmanden, wenn dieser eine ganze Zahl ist, bestimmt werden kann; er ist um 1 kleiner als diese Anzahl.

Die zweite Eigentümlichkeit der gemeinen Logarithmen besteht darin, daß der Logarithmus einer Zahl, die sich aus einer andern durch Anhängen von Nullen ableiten läßt, dieselbe Mantisse haben muß, so daß die Logarithmen beider sich nur durch die Kennziffer unterscheiden. Denn ist z. B. $\log 2 = 0{,}30103$ bekannt, so hat man

$$\log 20 = \log (2 \cdot 10) = \log 2 + \log 10 = \log 2 + 1 = 1{,}30103 ,$$
$$\log 200 = \log (2 \cdot 100) = \log 2 + \log 100 = \log 2 + 2 = 2{,}30103 ,$$
$$\log 2000 = \log (2 \cdot 1000) = \log 2 + \log 1000 = \log 2 + 3 = 3{,}30103 ,$$

u. s. w.

Allgemein ist $\log (a \cdot 10^{n}) = \log a + \log 10^{n} = \log a + n$; der zweite Summand n ist hier eine ganze Zahl, ändert also nur die Kennziffer, so daß die Mantisse unverändert bleibt.

Aus diesen beiden Eigentümlichkeiten der BRIGGischen Logarithmen folgt: Eine Tafel, welche die Logarithmen aller ganzen Zahlen bis zu einer bestimmten durch die höchste in den Rechnungen vorausgesetzte Zifferzahl bedingten Grenze angeben soll, braucht nicht die Kennziffern, sondern nur die Mantissen dieser Logarithmen zu enthalten. Da aber die Mantissen aller Zahlen, die nicht die

höchste vorkommende Anzahl von Ziffern besitzen, sich bei den höchstziffrigen Zahlen wieder finden, die aus jenen durch Anhängen von Nullen entstehen, so ist es überhaupt nur nötig, in der Tafel die Mantissen der höchstziffrigen Zahlen anzugeben.

Soll z. B. die Tafel die Logarithmen der Zahlen bis zu den vierziffrigen einschließlich enthalten, so kann man die Mantisse zu $\log 2$ bei derjenigen von $\log 2000$ aufsuchen und die Kennziffer 0 dazu setzen. Ebenso findet man die Mantisse zu $\log 52$ bei der Zahl 5200, die zu 352 bei 3520. Hierdurch wird der Umfang der Tafel verkleinert und das Aufsuchen eines Logarithmus erleichtert.

Hat eine ganze Zahl am Ende Nullen und streicht man die letzte, so wird die Zahl durch 10 dividiert, die Kennziffer des Logarithmen also um 1 vermindert, während die Mantisse unverändert bleibt. Hat die Zahl keine Null am Ende, so wird sie durch 10 dividiert, indem man die letzte Stelle durch das Komma abschneidet. Also muß auch der Logarithmus der Dezimalzahl eine um 1 verminderte Kennziffer aber noch dieselbe Mantisse haben. So ist z. B.

$$\log 5732 = 3{,}75\,831\,, \quad \log 573{,}2 = 2{,}75\,831\,, \quad \log 57{,}32 = 1{,}75\,831\,,$$
$$\log 5{,}732 = 0{,}75\,831\,.$$

Daraus ergibt sich die Regel: Die Kennziffer des Logarithmus einer Dezimalzahl bestimmt sich nach der Anzahl der Ziffern vor dem Komma, die Mantisse erhält man, wenn man die Zahl ohne Rücksicht auf das Komma in der Tafel aufschlägt.

Hat die Dezimalzahl nur noch eine Ziffer vor dem Komma, so dividiert man sie durch 10, indem man das Komma vor die Ganzen und davor 0 setzt. Es muß sich dann nochmals die Kennziffer des Logarithmen um 1 vermindern, die Mantisse aber unverändert bleiben. Man hat also

$$\log 0{,}5732 = 0{,}75\,831 - 1\,,$$

demnach

$$\log 0{,}5732 = -0{,}24\,169$$

eine negative Zahl, da 0,5732 ein echter Bruch ist. Man schreibt einen negativen Logarithmus aber in der ersten Form, um anzudeuten, daß die positive Mantisse dieselbe geblieben ist und nimmt -1 als negative Kennziffer. Die Kennziffer des Logarithmus einer Dezimalzahl, deren geltenden Ziffern Nullen vorangehen, hat so viel negative Einheiten wie die Anzahl dieser Nullen, einschließlich der Null vor dem Komma angibt. Es ist gewöhnlich bequem, den Logarithmus einer solchen Zahl zunächst um 10 zu groß anzugeben und dann 10 wieder zu subtrahieren, also zu schreiben

$$\log 0{,}5732 = 9{,}75\,831 - 10$$

und, wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist, -10 einfach wegzulassen.

Entsprechend sind auch die Logarithmen gemeiner echter Brüchte negativ und werden mit positiver Mantisse und angehängter negativer Kennziffer geschrieben. Um z. B. $\log \frac{2}{3}$ zu bestimmen, hat man

$$\log \tfrac{2}{3} = \log 2 - \log 3 = 0{,}30\,103 - 0{,}47\,712\,.$$

Statt aber hierfür $-0{,}17609$ zu setzen, erhöht man behufs der Subtraktion die Kennziffer von $\log 2$ um 1 und fügt nach Ausführung der Subtraktion diese 1 als negative Kennziffer zu, schreibt also

$$\log \tfrac{2}{3} = 0{,}82\,391 - 1\,.$$

Man kann auch bequemer $\log 2$ um 10 vermehrt denken und erhält mit Weglassung von -10:

$$\log \tfrac{2}{3} = 9{,}82\,391\,.$$

Den Logarithmus des reziproken Wertes einer Zahl findet man nach § 15 Nr. 2, 5), indem man den Logarithmus der Zahl von 10 subtrahiert und -10 anhängt. Es ist also z. B.

$$\log \tfrac{1}{3} = 10 - 0{,}47712 - 10 = 9{,}52288 - 10$$
$$\log \tfrac{1}{17} = 10 - 1{,}23045 - 10 = 8{,}76955 - 10 \quad .$$

Da 9,52 288 also 0,47 712 zu 10 ergänzt, so nennt man diese Zahl die dekadische Ergänzung zu log 3. Bei einiger Übung schreibt man diese statt des Logarithmen der Zahl selbst hin, indem man jede Ziffer zu 9, die letzte zu 10 ergänzt. Man kann also ebenso leicht $\log \frac{1}{3} = -\log 3$ wie log 3 in der Tafel aufschlagen.

2. Vergleicht man die Logarithmen je zweier von drei aufeinander folgenden ganzen Zahlen $n-1$, n, $n+1$, so erhält man ihre Differenzen nach dem Satze 2) in § 15 Nr. 2

$$\log(n+1) - \log n = \log \frac{n+1}{n} = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad ,$$

$$\log n - \log(n-1) = \log \frac{n}{n-1} = \log\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \quad .$$

Ist nun n eine große Zahl, so sind $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{n-1}$ nur wenig verschieden und es ist angenähert

$$\log(n+1) - \log n = \log n - \log(n-1)$$

und zwar um so genauer, je größer n ist. In der Tat bemerkt man, daß die Unterschiede der Mantissen in den Tafeln bei großen Zahlen in einem gewissen Bereiche nahezu konstant bleiben. Man findet z. B.

$$\log 3350 = 3{,}52504 \ , \quad \log 3351 = 3{,}52517 \ , \quad \log 3352 = 3{,}52530 \text{ u. s. w.}$$

und die Differenz 0,00013 aufeinander folgender Mantissen bleibt eine Weile lang dieselbe. Man könnte daher etwa

$$\log 3357 = \log 3350 + 7 \cdot 0{,}00013 = 3{,}52504 + 0{,}00091 = 3{,}52595$$

bestimmen, und die Tafel gibt wirklich diesen Logarithmus. Man kann daher sagen, daß die Differenz der Logarithmen großer Zahlen nahezu der Differenz dieser Zahlen proportional sei. Dies wird um so genauer gelten, je größer die Zahlen und je kleiner ihre Differenz ist, also noch genauer, wenn man z. B. von log 3352 auf log 3352,6 kommen will. Es gehört dann zu der Differenz 0,6 der Zahlen nur $0{,}6 \cdot 0{,}00013 = 0{,}00008$ der Mantisse, es ist also

$$\log 3352{,}6 = 3{,}52538 \quad .$$

Damit ist die Mantisse von log 3352,6, die in Tafeln nicht enthalten ist, die nur die Logarithmen von höchstens vierstelligen Zahlen geben, zwischen die in den Tafeln enthaltenen Mantissen von log 3352 und log 3353 eingeschaltet (interpoliert) worden, indem man zu der Mantisse von log 3352 einen Proportionalteil der Differenz zweier aufeinander folgender Mantissen hinzugefügt hat.

In den überaus zahlreichen in Gebrauch befindlichen Logarithmentafeln sind über deren Einrichtung, auch was die umgekehrte Aufgabe betrifft, zu einem gegebenen Logarithmus die Zahl aufzuschlagen, spezielle Anweisungen gegeben. Die Tafeln unterscheiden sich namentlich durch die Anzahl der Dezimalstellen, in denen die Mantissen gegeben sind. Für Praxis und Schule genügen gewöhnlich fünfstellige Tafeln, wie sie im folgenden vorausgesetzt werden, doch wird für die

Schule in den meisten Fällen bereits die Genauigkeit vierstelliger Tafeln vollkommen ausreichen. Für wissenschaftliche Zwecke hat man auch sechs- und siebenstellige Tafeln.

3. Wenn man in einer Logarithmentafel zu einer gegebenen Zahl den Logarithmus aufschlägt, so hat man damit die Zahl als Potenz von 10 geschrieben. Ist z. B.

$$\log 26{,}8 = 1{,}42\,975$$

gefunden, so folgt

$$26{,}8 = 10^{1{,}42\,975} \quad .$$

Schlägt man dagegen zu einem gegebenen Logarithmus die Zahl auf, so hat man 10 mit dem Logarithmus potenziert. Findet man z. B.

$$2{,}83\,967 = \log 691{,}3 \quad ,$$

so ist nun

$$10^{2{,}83\,967} = 691{,}3 \quad .$$

Nun werden Potenzen mit gleichen Basen multipliziert oder dividiert, indem man ihre Exponenten addiert oder subtrahiert und eine Potenz wird potenziert oder radiziert, indem man ihren Exponenten multipliziert oder dividiert. Hat man also zwei Zahlen als Potenzen von 10 geschrieben, so werden die Zahlen multipliziert oder dividiert, indem man ihre Logarithmen addiert oder subtrahiert und die Zahl aufschlägt, die die Summe oder Differenz der Logarithmen als Logarithmus hat. Ebenso kann man eine Zahl potenzieren oder radizieren, indem man den Logarithmus der Zahl mit dem Exponenten multipliziert oder dividiert und zu dem Produkt oder Quotienten als Logarithmus die Zahl aufschlägt.

Dieses Verfahren stellt sich dar als Anwendung der Sätze 1) bis 4) in § 15 Nr. 2. Damit erkennt man in einer Logarithmentafel ein unentbehrliches Hilfsmittel zur wesentlichen Erleichterung umständlicher Rechnungen mit unbequemen gemeinen Zahlen. Wenn man statt mit den Zahlen selbst mit ihren Logarithmen, die man aus der Tafel entnommen hat, rechnet, so kann man Multiplikation und Division auf Addition und Subtraktion, Potenzierung und Radizierung auf Multiplikation und Division, also eine Operation zweiter und dritter Stufe auf eine solche erster und zweiter zurückführen.

4. Bei der Ausführung einer umständlichen numerischen Rechnung mit Hilfe der Logarithmen ist es notwendig, die Rechnung in einem übersichtlichen Schema aufzuschreiben. Dieses wird zweckmäßig so eingerichtet, daß man hinter den zu berechnenden Zahlenausdruck nach dem Gleichheitszeichen zuletzt das Resultat setzt und unter einem Strich die aufgeschlagenen Logarithmen und deren Verbindungen hinschreibt. Die Art dieser Verbindung (Addition und Subtraktion, Multiplikation und Division) anzugeben, ist entbehrlich, weil nach der vorstehenden Regel jede Operation, die mit den Zahlen vorgenommen werden soll, sich bei ihren Logarithmen um eine Stufe erniedrigt.

Beispiele:

1.
$$\frac{2{,}746 \cdot 14{,}318 \cdot 7{,}459}{27{,}982} = 10{,}4805$$

$$\begin{aligned}
\log 2{,}746 &= 0{,}43\,870 \\
\log 14{,}318 &= 1{,}15\,588 \\
\log 7{,}459 &= 0{,}87\,268 \\
&\overline{2{,}46\,726} \\
\log 27{,}982 &= 1{,}44\,688 \\
&\overline{1{,}02\,038}
\end{aligned}$$

2.
$$\frac{17{,}159 \cdot 1{,}7485^3}{0{,}014 \cdot \sqrt[3]{123{,}456}} = 1315{,}82$$

$\log 1{,}7485 =$	$0{,}24\,267$
	$0{,}72\,801$
$\log 17{,}159 =$	$1{,}23\,449$
	$1{,}96\,250$
$\log 123{,}456 =$	$2{,}09\,152$
	$0{,}69\,717$
$\log 0{,}014 =$	$8{,}14\,613 - 10$
	$8{,}84\,330 - 10$
	$3{,}11\,920$

Bei der Division eines Logarithmus mit negativer Kennziffer durch eine natürliche Zahl, hat man es so einzurichten, daß die Kennziffer durch die Zahl ohne Rest zu dividieren ist. Um z. B. $9,\ldots - 1$ durch 3 zu dividieren, denkt man sich $2,\ldots - 3$ geschrieben. Bei der üblichen Schreibweise $9,\ldots - 10$ hat man dann $29,\ldots - 30$ zu denken, damit die negative Kennziffer ein Vielfaches von 10 wird.

3.
$$\frac{\sqrt[3]{0{,}076}}{\sqrt[4]{0{,}0058^3}} = 20{,}1543$$

$\log 0{,}076 =$	$8{,}88\,081$
	$9{,}62\,694$
$\log 0{,}0058 =$	$7{,}76\,343$
	$9{,}44\,086$
	$8{,}32\,257$
	$1{,}30\,437$

Hat man zu einer algebraischen Formel ein numerisches Beispiel zu berechnen, so schreibt man zunächst die für die allgemeinen Zahlen gegebenen Werte, dann die algebraische Formel und hinter das Gleichheitszeichen wieder das Resultat. In dem logarithmischen Rechnungsschema benutzt man die Buchstaben zur Abkürzung.

4. Das Volumen V eines Kegels zu berechnen, dessen Grundfläche den Radius r hat und dessen Höhe h ist, für die Werte:

$$r = 12{,}382, \quad h = 29{,}520$$

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h = 3900 \text{ rund}$$

$\log \frac{1}{3} =$	$9{,}52\,288$
$\log \pi =$	$0{,}49\,715$
$\log r =$	$1{,}05\,046$
$\log r =$	$1{,}06\,046$
$\log h =$	$1{,}47\,012$
$\log V =$	$3{,}59\,107$

5. Enthält ein numerischer Ausdruck nur Operationen zweiter und dritter Stufe, so läßt er sich ununterbrochen logarithmisch berechnen. Kommen dagegen auch Operationen erster Stufe vor, so muß man bei den Operationszeichen plus und minus die logarithmische Rechnung unterbrechen, d. h. von den Logarithmen zu den Zahlen übergehen und mit diesen zunächst weiter rechnen. Der Logarithmus eines Polynoms läßt sich nämlich nicht durch die Logarithmen der Glieder ausdrücken oder die Operationen erster Stufe lassen sich durch Rechnung mit

den Logarithmen der Zahlen nicht auf noch einfachere Operationen zurückführen. Die Unterbrechung wird in dem Rechenschema ersichtlich gemacht, daß man die Zahl zu dem Logarithmus daneben rechts schreibt und rechts die Rechnung mit den Zahlen selbst ausführt; beim Übergang von der Zahl zum Logarithmus schreibt man diesen wieder links daneben.

5. $\sqrt[3]{\frac{1{,}482}{\sqrt{0{,}414}}} - \frac{1}{6}\sqrt{87{,}516} = 0{,}94\,508$

$\log 0{,}414 =$	9,61 700	
	9,80 850	
$\log 1{,}482 =$	0,17 085	
	0,36 235	2,30 332
$\log 87{,}516 =$	1,94 209	
	0,97 105	
$\log \frac{1}{6} =$	9,22 185	
	0,19 290	1,55 919
$\log 0{,}84\,413 =$	9,92 641	0,84 413
	9,97 547	

In diesem Beispiel macht die Unterbrechung der logarithmischen Rechnung drei Aufschlagungen in den Tafeln mehr nötig als wenn an Stelle des Minuszeichens etwa ein Multiplikationszeichen stände. Da die größere Zahl der notwendigen Aufschlagungen hauptsächlich die Rechnung weitläufig macht, so wäre es ein Vorteil, wenn man bei einem Beispiel diese Anzahl reduzieren könnte. Dies kann in gewissen Fällen, wo nach algebraischen Formeln zu rechnen ist, geschehen durch Umgestaltung dieser Formeln. Schreibt man z. B.

$$\sqrt{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{ab}} = \sqrt{\frac{(a+b)(a-b)}{ab}}$$

und sind für a und b numerische Werte direkt gegeben, so hat man nach der Formel in der ursprünglichen Gestalt sechs, in der dritten nur fünf Aufschlagungen vorzunehmen. Ebenso bei der Umformung

$$\sqrt{a^2 + ab + b^2} = a\sqrt{1 + \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

würde man in der ersten Gestalt sieben, in der zweiten nur sechs Aufschlagungen nötig haben. Dieser kleine Vorteil fällt doch ins Gewicht, wenn man nacheinander viele derartige Rechnungen zu machen hat.

Ein andres praktisch wichtiges Hilfsmittel geben die Gaussschen Hilfstafeln zur Berechnung des Logarithmus der Summe oder Differenz zweier Zahlen, deren Logarithmen gegeben sind. Diese Hilfstafeln sind einigen Logarithmentafeln (denen von F. G. Gauss, Heger u. a.) beigegeben. Schreibt man

$$a \pm b = b\left(\frac{a}{b} \pm 1\right) \quad ,$$

so ist

$$\log(a + b) = \log b + \log\left(\frac{a}{b} \pm 1\right) \quad .$$

Sind $\log a$ und $\log b$ gegeben, so ist $\log(a : b) = \log a - \log b$ einfach zu berechnen. Hat man nun Tafeln berechnet, die unter A den Logarithmus einer

Zahl n und unter B den Logarithmus der Zahl $n + 1$ geben, so schlägt man $\log a - \log b = A$ auf, bestimmt das zugehörige B und hat

$$\log (a + b) = \log b + B \quad .$$

Sucht man dagegen $\log a - \log b$ unter B auf, so gibt das zugehörige A den Logarithmus der um 1 kleinern Zahl und es ist

$$\log (a - b) = \log b + A \quad .$$

Hätte man aus $\log a$ und $\log b$ zu finden $\log (a + b)$, so würde dies mit den gewöhnlichen Tafeln drei, mit den Gaussschen Hilfstafeln nur eine Aufschlagung nötig machen. Aber auch wenn in Formeln eine Summe oder Differenz vorkommt von Ausdrücken, die selbst erst logarithmisch berechnet werden müssen, ersparen die Gaussschen Hilfstafeln zwei Aufschlagungen. Ist z. B. der Ausdruck

$$\sqrt{a\sqrt{b} + c\sqrt{d}}$$

für gegebene numerische Werte für a, b, c, d zu berechnen, so hat man mit Unterbrechung der gewöhnlichen logarithmischen Rechnung acht, mit Benutzung der Hilfstafeln nur sechs Aufschlagungen nötig.

II. Teil.

Die Gleichungen.

Dritter Abschnitt.

Allgemeines über Gleichungen. Gleichungen ersten und zweiten Grades.

§ 17. Einteilung und Umformung der Gleichungen.

1. Eine Gleichung entsteht, wenn man zwei gleiche Zahlen oder Zahlenausdrücke durch das Gleichheitszeichen verbindet. Die beiden Zahlen oder Zahlenausdrücke selbst sind die Seiten der Gleichung.

Am einfachsten ist eine Gleichung, die eine selbstverständliche Identität aussagt, z. B. $7 = 7$, $a = a$. Solche Gleichungen drücken nur den Grundsatz aus, daß jede Größe sich selbst gleich ist.

Es können aber die beiden Seiten einer Gleichung identisch sein, ohne daß es sofort zu sehen ist, wenn sie denselben Wert in andrer Form enthalten. So sieht man, daß die Gleichung $5 + 7 = 20 - 8$ identisch ist, wenn man auf beiden Seiten die Rechenoperationen wirklich ausführt. Beide Seiten stellen dieselbe Zahl 12 in zwei verschiedenen Formen dar. So drückt auch

$$3 + 8 - 5 = 6$$

eine Identität aus, wenn man die linke Seite als eine gegebene Rechenaufgabe, die rechte als das Resultat betrachtet.

Solche identische Gleichungen sind alle, die nur gemeine Zahlen enthalten. Gleichungen, die auch allgemeine Zahlen enthalten, können identisch sein, wenn man durch Anwendung der Regeln der allgemeinen Arithmetik die eine Seite der Gleichung in die andre umformen kann; z. B.:

$$a + b = b + a\,,\quad (a - b)c = ac - bc\,,\quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\quad .$$

Jede solche identische Gleichung ist der algebraische Ausdruck eines arithmetischen Satzes, der für jeden Wert gelten muß, den man den darin vorkommenden allgemeinen Zahlen beilegt. Identische Gleichungen dieser Art, die vielfach bei algebraischen Rechnungen weiter benutzt werden, sind die Formeln der Arithmetik. Ist eine Formel dem Rechner noch nicht bekannt, so muß er ihre Richtigkeit beweisen.

Dagegen ist z. B. die Gleichung $a + 7 = 12$ nicht für jeden beliebigen Wert von a, sondern nur für $a = 5$ gültig, und daher keine identische. Dasselbe gilt auch von der Gleichung $x + y = 10$, die zwar für unendlich viele verschiedene Werte von x und y, wie $x = 1$, $y = 9$ oder $x = 2$, $y = 8$ oder $x = 0{,}5$, $y = 9{,}5$ richtig ist, jedoch nicht für alle den Zahlen x und y zugleich willkürlich beigelegte Werte gültig bleibt.

Eine nicht identische Gleichung enthält die Aufgabe, diejenigen Werte zu bestimmen, die man für eine oder mehrere der in ihr enthaltenen allgemeinen Zahlen setzen kann, damit die Gleichung eine identische werde. Mit Rücksicht hierauf nennt man eine solche Gleichung eine Bestimmungsgleichung. So

enthält die Gleichung $a + 7 = 12$ die Aufgabe, eine Zahl a zu bestimmen, die um 7 vermehrt, 12 gibt und $x + y = 10$ die Aufgabe, zwei Zahlen x und y zu bestimmen, deren Summe 10 ist.

Eine Bestimmungsgleichung drückt eine Beziehung zwischen den in ihr vorkommenden Zahlen aus. Umgekehrt läßt sich eine Beziehung zwischen Zahlen häufig in Form einer Bestimmungsgleichung schreiben. Ist z. B. zwischen vier Zahlen die Beziehung bekannt, daß die Summe von zweien a, b ebenso groß wie die Differenz der beiden andern c, d ist, so gibt diese Beziehung die Bestimmungsgleichung

$$a + b = c - d \quad .$$

Eine solche arithmetische Beziehung zwischen Zahlen kann wie in diesem Beispiel, vollkommen willkürlich, sie kann aber auch gesetzmäßig begründet sein. So werden geometrische Lehrsätze, physikalische Gesetze in Form von Gleichungen geschrieben, wenn die Beziehungen, die diese Lehrsätze oder Gesetze ausdrücken, in arithmetische Form gebracht werden können. Sind z. B. die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks gemessen und für die Katheten a und b, für die Hypotenuse c Längeneinheiten gefunden worden, so besteht als notwendige Beziehung zwischen den Zahlen a, b, c die Gleichung

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad ,$$

die als arithmetischer Ausdruck des pythagoreischen Lehrsatzes zugleich als eine Bestimmungsgleichung mit den allgemeinen Zahlen a, b, c erscheint.

Eine Bestimmungsgleichung auflösen heißt, die Werte bestimmen, die für eine oder mehrere der in ihr vorkommenden allgemeinen Zahlen gesetzt werden müssen, damit die Gleichung identisch werde, oder die der Gleichung genügen. Die allgemeinen Zahlen, für die bestimmte Werte gesucht werden, heißen die Unbekannten, die übrigen und die etwa vorkommenden gemeinen Zahlen die Bekannten der Gleichung. An sich kann jede der allgemeinen Zahlen einer Gleichung als Unbekannte betrachtet werden; will man aber gewisse dieser Zahlen vorzugsweise als solche kenntlich machen, so bezeichnet man sie mit einem der letzten Buchstaben x, y, z des Alphabets. Die Werte, die für die Unbekannten gesetzt werden müssen, um die Bestimmungsgleichung zu einer identischen zu machen, heißen die Wurzeln der Gleichung. Man kann daher auch sagen: eine Gleichung auflösen, heißt ihre Wurzeln bestimmen. Eine Wurzel einer Gleichung kann nur ein Zahlenausdruck sein, in dem die Bekannten der Gleichung vorkommen. Hiernach dient die Auflösung einer Gleichung dazu, eine Unbekannte auf die Bekannten zurückzuführen, sie durch Bekannte auszudrücken.

2. Aus jeder gegebenen Gleichung, sie sei eine identische oder eine Bestimmungsgleichung, kann man durch Vornahme gleicher Operationen auf beiden Seiten neue Gleichungen ableiten, die denselben Inhalt nur in verschiedenen Formen darstellen. Solche Gleichungen kann man der ersten und untereinander kongruent nennen. Die wichtigsten derartigen Umformungen sind folgende:

1. Aus dem Grundsatze: Gleiches zu Gleichem addiert, gibt Gleiches, folgt, daß man zu beiden Seiten einer gegebenen Gleichung gleiche Glieder addieren darf. Addiert man insbesondere zu beiden Seiten ein Glied, das auf einer Seite bereits durch Subtraktion verbunden vorkommt, so fällt infolge der Addition dieses Glied auf jener Seite weg und erscheint auf der andern mit dem Vorzeichen $+$. So erhält man z. B. aus

$$ax + b = cx - d \quad ,$$

indem man zu beiden Seiten d addiert,

$$ax + b + d = cx \quad .$$

Da man ferner in derselben Weise von beiden Seiten einer Gleichung gleiche Glieder subtrahieren darf, so folgt, daß man durch Subtraktion eines vorher auf

einer Seite durch + verbundenen Gliedes dieses von jener Seite entfernen und auf der andern mit dem Vorzeichen — verbinden kann.

Die beiden Regeln lassen sich in folgende zusammenfassen:

Ein Glied einer Seite einer Gleichung kann auf die andre Seite mit dem entgegengesetzten Vorzeichen gebracht werden.

So ergibt sich z. B. aus $x + 7 = 15$: $x = 15 - 7$; $x = 8$, aus $5x + 9 = 3x + 11$, $5x - 3x = 11 - 9$, aus $ax - b = d - cx$, $ax + cx = b + d$.

Insbesondere können Glieder einer Gleichung, die auf beiden Seiten zugleich und mit demselben Vorzeichen stehen, beiderseits weggelassen werden; sie heben sich weg.

Ferner kann man mittels der vorstehenden Regel eine Gleichung auf Null reduzieren, d. h. bewirken, daß alle Glieder auf derselben Seite stehen, für die andre Seite also Null zu setzen ist.

Beispiel: Aus $a - bx + c = dx - e + f$
wird abgeleitet

$$a - bx + c - dx + e - f = 0 \quad .$$

2. Da ferner Gleiches mit Gleichem multipliziert oder dividiert, Gleiches gibt, so kann man beide Seiten einer Gleichung mit derselben Zahl (ausgenommen 0 und ∞) multiplizieren oder durch dieselbe Zahl dividieren, oder auch mit beiden Seiten (falls nicht beide gleich Null oder unendlich sind) in dieselbe Zahl dividieren.

Die Multiplikation beider Seiten, also sämtlicher Glieder mit derselben Zahl bietet die Möglichkeit, jeden in einem Gliede vorkommenden Divisor durch Multiplikation mit diesem wegzuschaffen. So geht z. B. die Gleichung

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = m$$

durch Multiplikation mit b über in die ihr kongruente

$$a + \frac{bc}{d} = bm \quad .$$

Auf diese Weise lassen sich nacheinander alle vorkommenden Nenner wegschaffen. Man kann aus einer Gleichung die Nenner gleichzeitig fortschaffen, indem man beide Seiten mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Nenner, dem Generalnenner, multipliziert.

So ergibt sich z. B. aus der Gleichung

$$\frac{a^2}{2x} + b + \frac{c}{3} + \frac{ef}{6x} = \frac{g}{5} - \frac{h^2}{10x}$$

durch Multiplikation mit $30x$ die ihr kongruente

$$15a^2 + 30bx + 10cx + 5ef = 6gx - 3h^2 \quad ,$$

wobei jedoch vorauszusetzen ist, daß x nicht den Wert 0 habe.

Eine Gleichung zwischen zwei Verhältnissen, wie

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

wird auch Proportion genannt und gelesen: »a verhält sich zu b, wie c zu a«. Durch Wegschaffung der Nenner erhält man die Produktengleichung

$$ad = bc \quad .$$

Umgekehrt kann man eine Gleichung von zwei Produkten in Form einer Proportion schreiben und lesen.

Insbesondere kann man, wenn alle Glieder einer Gleichung denselben Faktor oder denselben Divisor oder denselben Faktor im Divisor haben, und dieser nicht gleich Null sein kann, den gemeinschaftlichen Faktor oder Divisor weglassen. Das Weglassen eines gemeinschaftlichen Faktors aller Glieder heißt, die Gleichung kürzen.

So kann z. B. die Gleichung

$$a x + a b = a c$$

durch a gekürzt werden und ergibt

$$x + b = c \quad ;$$

ebenso die Gleichung

$$5 x + 20 y = 30 z - 15$$

durch 5, wodurch sie sich vereinfacht zu

$$x + 4 y = 6 z - 3 \quad .$$

3. Man kann endlich jede Seite einer Gleichung mit derselben Zahl, oder dieselbe Zahl mit jeder Seite potenzieren, aus beiden Seiten dieselbe Wurzel ziehen oder von beiden Seiten den Logarithmus zu derselben Basis nehmen.

Insbesondere lassen sich in einer Gleichung vorkommende Wurzeln durch Potenzierung beider Seiten mit dem Wurzelexponenten wegschaffen, wenn man zuvor das Glied mit der zu entfernenden Wurzel auf eine Seite allein gebracht (isoliert) hat. So ergibt die Gleichung

$$\sqrt{a + b x} + c = d$$

nach Umformung in

$$\sqrt{a + b x} = d - c$$

durch Erheben beider Seiten ins Quadrat:

$$a + b x = (d - c)^2 \quad .$$

Bei allen diesen Umformungen ist jedoch vorauszusetzen, daß die Wurzelgrößen und die Logarithmen nicht auf der einen Seite eine größere Anzahl von Deutungen erhalten, als auf der andern. So besitzt z. B. die Gleichung $x^2 = 9$ einen weitern Umfang als die Gleichung $x = 3$, denn sie könnte, außer aus dieser, auch aus $x = -3$ durch Potenzieren beider Seiten abgeleitet werden.

3. Eine Gleichung heißt in Beziehung auf eine oder mehrere in ihr enthaltene Unbekannte eine algebraische, wenn diese in ihr nur durch eine endliche Anzahl von Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen oder Divisionen unter sich oder mit Bekannten verbunden, oder wenn diese als Potenzbasis oder Radikand vorkommen. Alle andern Gleichungen, also z. B. solche, in denen eine oder mehrere Unbekannte in Potenz- oder Wurzelexponenten, als Logarithmand oder Basis eines Logarithmus u. dgl. m. vorkommen, heißen in Beziehung auf diese Größen transcendent.

Gewisse transcendente Gleichungen lassen sich auf algebraische zurückführen, sind also im eigentlichen Sinne nicht transcendent. Dies gilt zunächst von den Exponentialgleichungen, die so genannt werden, wenn die Unbekannte im Exponenten einer Potenz oder Wurzel vorkommt. Da man aus der Gleichung

$$a^p = a^q$$

schließen kann, daß

$$p = q$$

ist, so läßt sich eine Exponentialgleichung auf eine algebraische zurückführen, wenn es gelingt, beide Seiten der Gleichung als Potenzen derselben Basis zu

schreiben. So findet man aus der Gleichung

$$\sqrt{a^{3-4x}} : \sqrt[5]{a^{6-7x}} = a^{-4,5}$$

die algebraische

$$\frac{3-4x}{2} - \frac{6-7x}{5} = -4,5 \quad ;$$

ebenso aus

$$32^x \cdot 4^y = 16^{2x^2-3} \cdot 0{,}125^{3y^2+4}$$

die algebraische

$$5x + 2y = 4(2x^2 - 3) - 3(3y^2 + 4) \quad .$$

Jedenfalls kann man eine Gleichung von der Form

$$a^p = b^q$$

so schreiben, daß beide Seiten Potenzen einer beliebigen Basis c werden, wenn man

$$a = c^{c \log a} , \quad b = c^{c \log b}$$

setzt. Es verwandelt sich dann die Gleichung in

$$p\, c^{c \log a} = q\, c^{c \log b} \quad ,$$

die möglicherweise algebraisch ist. So kann man die Gleichung

$$a^x + a^{x+m} = b^y + b^{y+n}$$

zunächst schreiben

$$a^x (1 + a^m) = b^y (1 + b^n)$$

und dann

$$x \log a + \log(1 + a^m) = y \log b + \log(1 + b^n) \quad ,$$

wobei die Basis der Logarithmen willkürlich ist.

Im folgenden sollen zunächst nur algebraische Gleichungen behandelt werden.

4. Wir setzen ferner voraus, daß alle in einer algebraischen Gleichung vorkommenden irrationalen Glieder, d. h. also solche, die eine oder mehrere Unbekannte im Radikand einer Wurzel enthalten, durch Umformung der Gleichung in der eben angegebenen Weise rational gemacht seien, daß also die weiter zu behandelnde Gleichung keine Unbekannten unter einem Wurzelzeichen enthalte.

Beispielsweise würde die Gleichung

$$x^{\frac{2}{3}} + ax = b \, , \text{ d. i. } \sqrt[3]{x^2} + ax = b$$

als in Beziehung auf x irrational, durch die Umformungen

$$x^{\frac{2}{3}} = b - ax \quad ,$$

$$x^2 = (b - ax)^3$$

rational zu machen sein. Dagegen ist die Gleichung

$$ax^2 + \sqrt{a - b} \cdot \sqrt{c} = d^3$$

in Beziehung auf x rational, da die Wurzeln x nicht enthalten.

Eine den vorstehenden Bedingungen entsprechende Gleichung heißt in Beziehung auf die Unbekannten geordnet, wenn mit ihr, soweit es erforderlich, folgende Umformungen mit Hilfe der vorstehenden Regeln vorgenommen sind:

1. es muß die Gleichung auf Null reduziert sein,
2. es müssen alle Nenner, in denen eine der Unbekannten vorkam, weggeschafft sein,
3. es müssen alle Klammern, in denen eine Unbekannte vorkam, aufgelöst sein,
4. es müssen alle Glieder, die eine Unbekannte in derselben Potenz, oder die dasselbe Produkt von aus diesen Größen bestehenden Faktoren enthalten, in

je ein Glied zusammengefaßt und endlich diese Glieder in bestimmter Aufeinanderfolge — nach abnehmenden Potenzen einer Unbekannten oder nach der abnehmenden Anzahl der Faktoren der Produkte — geordnet sein.

Um beispielsweise die Gleichung

$$3 = 12 - \frac{1}{3}\left(47 - \frac{60}{x}\right)$$

nach diesen Bestimmungen zu ordnen, leite man aus ihr nacheinander die folgenden ab:

$$\frac{1}{3}\left(47 - \frac{60}{x}\right) + 3 - 12 = 0\,; \quad \frac{1}{3}\left(47 - \frac{60}{x}\right) - 9 = 0\,;$$

$$47 - \frac{60}{x} - 27 = 0\,; \quad 20 - \frac{60}{x} = 0\,; \quad x - 3 = 0\,.$$

Um die Gleichung

$$\frac{y}{x} - \frac{9\sqrt{x}}{y} - \frac{81}{xy} = (2y + 9)\frac{\sqrt{x}}{y}$$

zu ordnen, kann man aus ihr zunächst

$$0 = (2y + 9)\frac{\sqrt{x}}{y} + \frac{81}{xy} + \frac{9\sqrt{x}}{y} - \frac{y}{x}\,,$$

oder nach Vereinigung der beiden Glieder, die den Divisor y haben,

$$(2y + 18)\frac{\sqrt{x}}{y} + \frac{81}{xy} - \frac{y}{x} = 0$$

ableiten, dann durch Multiplikation mit dem Generalnenner xy,

$$(2y + 18)x\sqrt{x} + 81 - y^2 = 0$$

und hieraus, um $\sqrt{x}$ durch Quadrieren wegschaffen zu können,

$$(2y + 18)x\sqrt{x} = y^2 - 81\,; \quad (2y + 18)^2 x^3 = (y^2 - 81)^2$$

finden. Durch Auflösen der Klammern erhält man dann

$$4x^3y^2 + 72x^3y + 324x^3 = y^4 - 162y^2 + 6561\,,$$

und durch Reduktion auf Null und Ordnen nach den fallenden Exponenten von x und y endlich:

$$4x^3y^2 + 72x^3y - y^4 + 324x^3 + 162y^2 - 6561 = 0\,.$$

Ein Glied einer geordneten Gleichung, das ein Produkt von n unbekannten Faktoren enthält, heißt in Beziehung auf diese Unbekannten ein Glied n-ten Grades oder n-ter Dimension. So ist in der vorstehenden Gleichung das erste Glied in Beziehung auf die Unbekannten x und y von der fünften, das Glied $324x^3$ von der dritten, das Glied 6561 von der 0-ten Dimension. Die Zusammenfassung aller Glieder 0-ter Dimension gibt das Absolutglied der Gleichung. In der vollständig geordneten Gleichung geht kein Glied von einer niedern Dimension einem solchen von höherer voran.

Eine Bestimmungsgleichung heißt eine solche n-ten Grades, wenn in der geordneten Gleichung mindestens ein Glied vorkommt, das in Beziehung auf die Unbekannten von der n-ten Dimension, aber keins, das von einer höheren Dimension ist.

Die obige Gleichung ist hiernach vom fünften, die Gleichung $x^2 + 3x - 4 = 0$ vom zweiten Grade. Gleichungen ersten Grades heißen lineare Gleichungen,

Gleichungen vom zweiten quadratische, vom dritten kubische, vom vierten biquadratische.

Bei der im folgenden zu behandelnden Auflösung gegebener Bestimmungsgleichungen hat man die aufzulösende Gleichung als geordnet vorauszusetzen. Die Herstellung der geordneten Gleichung ist als die Vorarbeit zur Auflösung anzusehen und bei manchen Aufgaben ist diese Vorarbeit umständlicher und weitläufiger als die Auflösung selbst. An der geordneten Gleichung erkennt man erst den Charakter der Gleichung, also außer der Zahl der Unbekannten, den Grad. Die Methoden der Auflösung einer Gleichung bestimmen sich durch den Grad der Gleichung und die Anzahl der Unbekannten.

Die Behandlung von Gleichungen ist wesentlich bequemer, wenn außer den Unbekannten nur gemeine Zahlen vorkommen; solche Gleichungen heißen numerische.

§ 18. Lineare Gleichungen.

1. Eine geordnete Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten kann nur ein Glied mit der ersten Potenz dieser Unbekannten x und ein Absolutglied enthalten, hat also die Form

$$ax + b = 0 \quad ,$$

worin a und b bekannt sind.

Die Auflösung geschieht, indem man das Absolutglied b auf die andre Seite bringt und dann beide Seiten der neuen Gleichung durch den Koeffizienten a der Unbekannten dividiert. Man erhält

$$x = -\frac{b}{a} \quad .$$

Die Auflösung einer linearen Gleichung mit einer Unbekannten geschieht also, indem man die Umformung der gegebenen Gleichung, die zu der geordneten Form führt, noch etwas weiter fortsetzt, um die Unbekannte auf einer Seite isoliert zu erhalten.

Eine lineare Gleichung mit einer Unbekannten hat eine Wurzel.

2. Eine lineare Gleichung mit zwei Unbekannten x und y läßt sich durch Ordnen auf die Form

$$ax + by + c = 0$$

bringen, wobei die Koeffizienten a, b, c Bekannte sind. Diese Gleichung gibt eine Beziehung der Unbekannten und der Bekannten an, die dazu dienen kann, eine der Unbekannten zu finden, wenn die andre bereits bestimmt ist. Hat man x gefunden, so ergibt sich der zugehörige Wert:

$$y = -\frac{ax + c}{b} \quad ;$$

es ist also y durch x ausgedrückt. Setzt man für x einen beliebigen Wert, so ist der zugehörige Wert von y nunmehr bestimmt. Eine solche Gleichung lösen, kann also nur heißen, zu einem willkürlich angenommenen Wert der einen Unbekannten den zugehörigen der andern zu finden. Die Aufgabe ist daher unbestimmt; die Gleichung hat unendlich viele Paare von Wurzeln. Die Unbestimmtheit kann eingeschränkt werden, wenn die Werte der Unbekannten gewissen gegebenen Bedingungen genügen müssen. Soll z. B. die Gleichung $x + y = 10$ aufgelöst werden und müssen die Wurzeln natürliche Zahlen sein, so gibt es nur neun Paare von Wurzeln (vgl. § 23).

Die Unbestimmtheit wird ganz aufgehoben, wenn außer der einen Beziehung zwischen den Unbekannten und Bekannten noch eine zweite Beziehung derselben

Unbekannten zu Bekannten gegeben ist; wenn also dieselben Unbekannten x und y zwei Gleichungen

$$1) \quad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 = 0 \end{cases},$$

zugleich genügen sollen. Die beiden Beziehungen müssen aber verschiedenen Inhalt haben d. h. es darf die eine Gleichung nicht aus der andern durch Umformung hervorgegangen sein, weil sie dann der ersten kongruent sein würde. Zwei Gleichungen dieser Art sind unabhängig voneinander. Die beiden Beziehungen dürfen auch nicht miteinander in Widerspruch stehen.

Die beiden Gleichungen

$$4x + 3y - 7 = 0, \quad 8x + 6y - 14 = 0$$

sind nicht voneinander unabhängig und die beiden Gleichungen

$$x + y = 6, \quad 3x + 3y = 17$$

widersprechen einander. Die Gleichungen

$$ax - by = c, \quad nax - nby = d$$

sind voneinander abhängig, wenn $d = nc$ und widersprechen einander, wenn $d \gtrless nc$ ist.

Zwei voneinander unabhängige und nicht im Widerspruch stehende Gleichungen ersten Grades mit denselben Unbekannten bilden ein lineares System von Gleichungen.

Aus den beiden Gleichungen eines linearen Systems kann man unendlich viele neue lineare Gleichungen bilden, wenn man eine der Gleichungen oder beide mit beliebigen Bekannten multipliziert und die entstehenden Gleichungen addiert oder subtrahiert. Jede dieser neuen Gleichungen ist von den gegebenen abhängig und kann an Stelle einer dieser Gleichungen des Systems gesetzt werden. Nun ist es stets möglich, beide Gleichungen mit Faktoren zu multiplizieren so, daß durch Addition oder Subtraktion der beiden Gleichungen des Systems eine der Unbekannten den Koeffizienten Null erhält, diese Unbekannte also aus der neuen Gleichung verschwindet. Multipliziert man die erste Gleichung des Systems mit dem Koeffizienten b_2 von y in der zweiten Gleichung und diese selbst entsprechend mit b_1, so wird, wenn man die zweite Gleichung nach der Multiplikation von der ersten subtrahiert, der Koeffizient von y

$$b_1 b_2 - b_2 b_1 = 0$$

und man erhält eine Gleichung, die y nicht mehr enthält, nämlich

$$2) \qquad (a_1 b_2 - a_2 b_1) x + (c_1 b_2 - c_2 b_1) = 0 \quad .$$

3. Man kann überhaupt aus zwei linearen Gleichungen, die dieselbe Zahl enthalten, durch dieses Verfahren eine neue Gleichung herstellen, die diese Zahl nicht mehr enthält. Man sagt dann, man habe diese Zahl aus den beiden Gleichungen eliminiert und die Gleichung, die diese Zahl nicht mehr enthält, heißt die Eliminationsgleichung. Diese wird im allgemeinen alle übrigen in beiden Gleichungen vorkommenden Zahlen enthalten. Somit kann man aus einem linearen System mit zwei Unbekannten immer eine der Unbekannten eliminieren und daher aus der Eliminationsgleichung, die nur noch die andre Unbekannte enthält, diese bestimmen. Das allgemeine Verfahren der Elimination besteht darin, beide Gleichungen des Systems so umzuformen, daß dieselbe Unbekannte in beiden Gleichungen gleiche Koeffizienten erhält und dann die Gleichungen zu addieren oder zu subtrahieren, je nachdem diese gleichen Koeffizienten entgegengesetzte oder gleiche Vorzeichen haben.

Durch die Elimination einer Unbekannten aus einem linearen System mit zwei Unbekannten ist die Lösung des Systems gegeben, denn aus der Eliminationsgleichung ergibt sich die andre Unbekannte. So erhält man aus 2) in Nr. 2

$$x = -\frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

und die Elimination von x aus beiden Gleichungen ergibt die Eliminationsgleichung

$$y = -\frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad .$$

Ein lineares System mit zwei Unbekannten hat also eine Lösung, die durch ein Paar zusammengehöriger Wurzeln gegeben wird.

Das Bildungsgesetz dieser Wurzeln ist leicht zu erkennen und zu behalten: Der beiden gemeinsame Nenner ist aus den Koeffizienten

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}$$

der Unbekannten in den beiden Gleichungen so zusammengesetzt, daß jedes der beiden Produkte einen Koeffizienten von jeder Unbekannten und aus jeder Gleichung enthält.

Man nennt den Ausdruck $a_1 b_2 - a_2 b_1$ die Determinante der vier in der vorstehenden Weise in zwei Horizontalreihen und zwei Vertikalkolonnen geschriebenen Koeffizienten. — Auch die Zähler der beiden obigen Formeln sind solche Determinanten; sie entstehen aus dem Nenner, indem man jedesmal die Koeffizienten der gesuchten Unbekannten durch die entsprechenden Glieder c_1, c_2 ersetzt.

Bezeichnet man die Determinante der Koeffizienten a_1, b_1, a_2, b_2 mit

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

und entsprechend die andern, so kann man die Wurzeln in der Form darstellen:

$$x = -\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad , \quad y = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad .$$

4. Auf das einfachste lineare System führt die Aufgabe: zwei Zahlen x und y zu bestimmen, deren Summe s und deren Differenz d ist. Addition und Subtraktion der beiden Gleichungen

$$x + y = s \,, \quad x - y = d$$

gibt die Lösung:

$$x = \tfrac{1}{2}(s + d) \,, \quad y = \tfrac{1}{2}(s - d) \quad .$$

Haben die Koeffizienten einer Unbekannten in beiden Gleichungen einen gleichen Faktor, so hat man nur mit den nicht gleichen Faktoren zu multiplizieren, um der Unbekannten gleiche Koeffizienten zu verschaffen. Z. B. in dem System:

$$9x - 10y - 25 = 0$$
$$15x + 2y - 79 = 0$$

hat man die zweite Gleichung nur mit 5 zu multiplizieren und kann dann durch Addition der Gleichungen y eliminieren, was zu $x = 5$ führt. Zur Elimination von x würde genügen, die erste Gleichung mit 3, die zweite mit 5 zu multiplizieren und die erste von der zweiten zu subtrahieren. Dadurch erhält man $y = 2$.

In einem System numerischer Gleichungen wird man zunächst die Unbekannte eliminieren, bei der es am bequemsten geschehen kann. Ist dann die andre Unbekannte bestimmt und ergibt sie einen bequemen, z. B. ganzzahligen

Wert, so setzt man diesen Wert in eine der Gleichungen ein. Man eliminiert dann diese Unbekannte durch Substitution. Dasselbe Verfahren kann man anwenden, wenn eine Gleichung in der einfachen Form gegeben ist, daß sie eine Unbekannte durch die andre ausdrückt. Z. B. aus dem System

$$a x + b y + c = 0 \quad ,$$
$$y = p x + q$$

kann man y eliminieren, indem man $y = p x + q$ in die erste Gleichung substituiert. Sind beide Gleichungen des Systems in dieser Form gegeben, z. B.

$$y = p_1 x + q_1 \quad ,$$
$$y = p_2 x + q_2 \quad ,$$

so erhält man durch Gleichsetzung der beiden Ausdrücke für y die Eliminationsgleichung, die nur noch x enthält.

Gibt eine Gleichung des Systems das Verhältnis der beiden Unbekannten, ist sie also eine Proportion, z. B.

$$\frac{x}{y} = \frac{m}{n} \quad ,$$

so kann man beide Unbekannte durch eine dritte u ausdrücken, indem man

$$x = m u \, , \quad y = n u$$

setzt. Substituiert man diese Ausdrücke in die andre Gleichung des Systems, so verwandelt sich diese in eine Gleichung, die nur die Unbekannte u enthält. Durch diese erhält man x und y. Dieses Verfahren ist auch bei numerischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten vorteilhaft, weil man dadurch Rechnung mit Brüchen vermeidet.

Die Einführung neuer Unbekannten ist oft ein Hilfsmittel, die Lösung eines Systems zu vereinfachen. So wird man z. B. in dem System

$$\frac{a_1}{x} + \frac{b_1}{y} = c_1 \quad ,$$
$$\frac{a_2}{x} + \frac{b_2}{y} = c_2 \quad ,$$

setzen:

$$\frac{1}{x} = u \, , \quad \frac{1}{y} = v$$

und damit ein System für die Unbekannten u und v erhalten.

Ebenso kann man z. B. das System:

$$\frac{a}{\sqrt{x+y}} + \frac{b}{\sqrt{x-y}} = c \quad ,$$
$$\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{m}{n}$$

lösen, indem man durch die Substitutionen

$$\frac{1}{\sqrt{x+y}} = n u \, , \quad \frac{1}{\sqrt{x-y}} = m u$$

die erste Gleichung in eine solche mit der neuen Unbekannten u verwandelt. Ist diese bestimmt, so ergeben die Substitutionsgleichungen ein einfaches System mit den Unbekannten x und y.

5. Ist ein lineares System von n unabhängigen und einander nicht widersprechender Gleichungen mit n Unbekannten gegeben, so kann man aus einer dieser Gleichungen und je einer der $n - 1$ übrigen jedesmal dieselbe Unbekannte eliminieren, wodurch man ein System von $n - 1$ Gleichungen mit $n - 1$ Unbekannten erhält. Durch Wiederholung dieses Verfahrens kommt man auf ein System von $n - 2$ Gleichungen mit $n - 2$ Unbekannten u. s. f., bis man endlich ein System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten erhält. Es lassen sich also n Unbekannte aus einem linearen System von n Gleichungen bestimmen durch fortgesetzte Elimination.

Die Ausführung der Lösung nach diesem allgemeinen Verfahren ist bei einer größern Zahl von Unbekannten mit nicht bequemen Koeffizienten sehr weitläufig. In praktisch vorkommenden Fällen, namentlich bei numerischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten wird die Lösung zunächst dadurch erleichtert, daß man, nachdem eine Unbekannte bestimmt ist, ihren Wert in eine der Gleichungen des Systems mit zwei Unbekannten einsetzt und so weiter verfährt, bis alle Unbekannte bestimmt sind. In vielen Fällen sind auch manche Gleichungen eines Systems dadurch einfacher, daß sie nicht sämtliche Unbekannten enthalten. Ein Mittel, um die Lösung in gewissen Fällen zu erleichtern, besteht darin, daß man zunächst aus allen oder einigen Gleichungen einfachere herstellt und diese weiter benutzt.

Allgemeine Vorschriften sind bei der zahllosen Menge der einzelnen möglichen Fälle nicht zu geben. Nur durch vielfache Übung wird der praktische Rechner die nötige Gewandtheit sich aneignen, um in einem gegebenen Beispiel den bequemsten Weg zur Lösung zu finden.

Die allgemeine Lösung der Aufgabe wird in § 40 gezeigt.

§ 19. Aufgaben, die auf lineare Gleichungen führen.

1. Die Anwendung von Bestimmungsgleichungen zum Lösen eingekleideter Aufgaben erfordert, daß man die in der Aufgabe in Worten gegebenen Beziehungen zwischen Unbekannten und Bekannten durch Gleichungen ausdrückt. Man nennt dies das Ansetzen der Gleichungen. Ist dieses erfolgt, so liefert die Auflösung der Gleichungen die Unbekannten.

Zum Ansetzen einer Gleichung bezeichne man die gesuchten oder auch andre zu diesen in Beziehung stehenden Zahlen durch $x, y \ldots$, ermittle aus den Bedingungen der Aufgabe zwei einander gleiche Größen, drücke deren Werte durch Zahlen in derselben Einheit aus und setze dann die beiden so gewonnenen Ausdrücke einander gleich.

In Aufgaben geometrischen oder physikalischen Inhalts hat man nicht nur die in der Aufgabe gegebenen willkürlichen Beziehungen, sondern auch die gesetzmäßigen zu beachten, die durch geometrische Lehrsätze oder physikalische Gesetze bekannt sind.

Gibt die Aufgabe kein System von Gleichungen, so ist sie entweder unbestimmt oder enthält einen Widerspruch.

Beispiele:

1. Fließen in einen leeren Behälter alle 3 Minuten 20 Liter Wasser, so werden nach einer gewissen Zeit noch 40 Liter an der vollständigen Füllung fehlen. Fließen aber in ihn alle 5 Minuten 52 Liter, so werden nach derselben Zeit 72 Liter Wasser übergelaufen sein. Wieviel Liter Wasser faßt der Behälter und wieviel Liter müssen jede Minute zufließen, wenn er nach derselben Zeit bis an den Rand gefüllt sein soll?

Zur Auflösung bezeichne man die Anzahl der Minuten, während der jedesmal Wasser in den Behälter fließt, mit x. Bestimmt man dann aus den beiden Angaben den Inhalt des Behälters, so hat man die zwei einander gleich zu setzenden

Ausdrücke. Die erste Angabe zeigt, daß wenn in jeder Minute $\frac{20}{3}$ Liter, also in x Minuten $\frac{20}{3}x$ Liter zufließen, der Inhalt des Behälters $\frac{20}{3}x + 40$ Liter sein muß. In gleicher Weise findet man aus der zweiten Angabe den Inhalt des Behälters $\frac{52}{5}x - 72$. Demnach hat man die Gleichung

$$\frac{20}{3}x + 40 = \frac{52}{5}x - 72 \quad ,$$

deren Auflösung auf

$$x = 30$$

führt. Demnach beantworten sich die gestellten Fragen dahin, daß der Inhalt des Behälters $\frac{20}{3}x + 40 = 240$ Liter sei, und daß, um ihn in 30 Minuten zu füllen, jede Minute $\frac{240}{30} = 8$ Liter zufließen müßten.

Wollte man den Inhalt des Behälters als Unbekannte x nehmen, so kann man die Zeit für beide Fälle als die gleiche Größe annehmen. Im ersten Fall werden um $x - 40$ Liter zu erhalten, so viele Minuten nötig sein, als $\frac{20}{3}$ in $x - 40$ enthalten sind. Ebenso erhält man das zweitemal $(x + 72) : \frac{52}{5}$ Minuten, und die anzusetzende Gleichung ist also jetzt

$$(x - 40) \cdot \frac{3}{20} = (x + 72) \cdot \frac{5}{52} \quad .$$

2. Ein Hase, der von einem Hunde verfolgt wird, hat 90 Sprünge voraus und macht in derselben Zeit 5 Sprünge, in welcher der Hund 4 macht. Wenn nun 7 Hasensprünge an Größe so viel betragen als 5 Hundesprünge, wieviel Sprünge muß der Hund noch machen, um den Hasen einzuholen?

Zur Auflösung kann man die gesuchte Anzahl der Sprünge des Hundes mit x bezeichnen und als die Größe, die doppelt auszudrücken ist, den Weg des Hundes annehmen. Dieser ist gleich x Hundesprüngen und gleich dem Wege des Hasen plus 90 Hasensprüngen. Da nun der Hase in derselben Zeit, in der der Hund 4 Sprünge macht, einen Weg von 5 Hasensprüngen zurücklegt, so ist der Weg des Hasen, während der Hund x Sprünge macht, gleich $\frac{5}{4}x$ Hasensprüngen. Die beiden so gewonnenen Ausdrücke für den Weg des Hundes, nämlich x und $\frac{5}{4}x + 90$ beziehen sich aber auf verschiedene Einheiten, und man muß daher entweder die Größe der Hundesprünge durch die Größe eines Hasensprungs ausdrücken oder umgekehrt. Da nun 5 Hundesprünge an Größe gleich 7 Hasensprüngen sind, so sind x Hundesprünge gleich $\frac{7}{5}x$ Hasensprüngen, und man hat also die Gleichung

$$\frac{7}{5}x = \frac{5}{4}x + 90 \quad ,$$

aus der sich $x = 600$ ergibt.

3. Die Seiten eines Dreiecks sind 13 und 11; wie groß sind ihre Projektionen auf die dritte Seite, die die Länge 12 hat?

Ist die Projektion der Seite von der Länge 13 auf die dritte Seite x, so hat die andre Seite die Projektion $12 - x$. Zum Ansetzen der Gleichung ist die Kenntnis der gesetzmäßigen Beziehung zwischen den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks nötig, die durch den pythagoreischen Lehrsatz gegeben ist. Drückt man

das Quadrat der Höhe auf der dritten Seite doppelt aus, so erhält man die Gleichung

$$169 - x^2 = 121 - (12 - x)^2 \quad ;$$

diese ist linear und ergibt $x = 8$, also $12 - x = 4$.

4. Wie tief taucht ein oben offener Kasten aus 2 *mm* starkem Metallblech in Wasser ein, der außen gemessen 15 *cm* lang, 8 *cm* breit und 6 *cm* hoch ist, wenn das spezifische Gewicht des Metalls 7,5 ist?

Er möge x *mm* tief eintauchen. Zum Ansetzen der Gleichung braucht man die Formel für das Volumen eines rechtwinkligen Parallelepipeds, das physikalische Gesetz, daß das Gewicht eines homogenen Körpers gleich dem Produkt aus seinem Volumen und dem spezifischen Gewicht ist und das Archimedische Prinzip, das besagt, ein Körper verdrängt beim Eintauchen ein seinem Gewicht gleiches Gewicht der Flüssigkeit. Damit ergibt sich die Gleichung

$$(150 \cdot 80 \cdot 60 - 146 \cdot 76 \cdot 58)\, 7{,}5 = 150 \cdot 80 \cdot x$$

und daraus $x = 47{,}8$ mm.

5. Eine dreiziffrige Zahl, deren Quersumme 6 ist, zu finden, so daß die Ziffer auf der ersten Stelle links $\frac{1}{5}$ der Zahl ist, die aus den beiden übrigen Ziffern gebildet wird, und die Ziffer auf der ersten Stelle rechts die Hälfte der aus den beiden übrigen gebildeten Zahl ist. Wie heißt die Zahl?

Die drei Ziffern der gesuchten Zahl seien von links nach rechts x, y, z. Die erste Angabe, daß die Quersumme 6 sei, liefert die Gleichung

$$x + y + z = 6 \quad .$$

Die zweite Angabe, daß x gleich $\frac{1}{5}$ der aus den beiden übrigen Ziffern gebildeten Zahl sei, führt auf die Gleichung

$$x = \tfrac{1}{5}(10y + z) \quad ,$$

und die letzte, ähnliche Angabe auf die Gleichung

$$z = \tfrac{1}{2}(10x + y) \quad .$$

Man findet hieraus $x = 1$, $y = 0$, $z = 5$; die gesuchte Zahl ist also 105.

2. Hat man mehrere Aufgaben gleicher Art, d. h. solche, die sich nur durch verschiedene Werte der gegebenen Zahlen unterscheiden und also im übrigen gleichlautend sind, zu behandeln, so empfiehlt es sich, die Aufgabe in allgemeiner Form, d. h. mit allgemeinen Zahlen statt der gemeinen Zahlen zu lösen. Die besondern Aufgaben erscheinen dann als Zahlenbeispiele zu dieser allgemeinen Aufgabe, und man hat nicht nötig, das ganze Auflösungsverfahren für jedes Beispiel zu wiederholen, sondern setzt nur für die Buchstaben die entsprechenden Werte in das Resultat ein.

Wenn beispielsweise in Aufgaben der sogenannten Mischungsrechnung verlangt wird, wieviel Maß- oder Gewichtseinheiten von jedem von zwei zu mischenden Stoffen, deren Preise für die Einheit gegeben sind, genommen werden müssen, um eine bestimmte Menge einer Mischung zu einem gegebenen Preise zu erhalten, so kann man allgemein, wie folgt, rechnen: Es seien a Einheiten der Mischung zum Preise b für die Einheit verlangt, und es seien c, d die Preise einer Einheit der zu mischenden Substanzen, x die von der ersten und folglich $a - x$ die von der zweiten zu nehmende Zahl von Einheiten so muß der Wert der gesamten Stoffe vor und nach der Mischung derselbe, also

$$c \cdot x + d \cdot (a - x) = a\,b$$

sein, woraus

$$x = \frac{a(b-d)}{c-d}$$

folgt. Dieses allgemeine Resultat, in das man bei einem Beispiel die Werte für a, b, c und d einzusetzen hat, läßt sich in Form einer Rechenregel für alle Aufgaben dieser Art in Worte kleiden.

In entsprechender Weise lassen sich zu allen Aufgaben der bürgerlichen Rechnungsarten (Prozentrechnung, Verteilungsrechnung u. s. w.) durch lineare Gleichungen die Lösungen und bei allgemeiner Behandlung mit Buchstaben, für jede Art solcher Aufgaben allgemeine Rechenregeln ableiten.

Umgekehrt lassen sich alle eingekleideten Aufgaben, die auf Gleichungen ersten Grades führen, auch ohne solche, also durch Schlüsse lösen. Anders verhält es sich mit solchen Aufgaben, die auf die im folgenden zu behandelnden Gleichungen zweiten oder höhern Grades führen, da das bürgerliche Rechnen nicht über die vier ersten Rechnungsarten, die vier Spezies, hinausgeht, also das Rechnen mit Wurzeln u. s. w. ausschließt.

Bei den im vorigen erwähnten allgemeinen Resultaten ist noch die an diese sich anknüpfende Diskussion zu erwähnen, welche die verschiedenen möglicherweise eintretenden Fälle und die Bedingungen der Lösbarkeit der Aufgabe zu erörtern hat. Es sei beispielsweise die Aufgabe gestellt, zu berechnen, in welcher Zeit nach dem Abgange des zweiten von zwei gleichförmig bewegten Körpern diese zusammentreffen, wenn beide in derselben Richtung sich bewegen und der erste alle a Minuten m Meter zurücklegt, während der t Minuten später und von einem um d Meter rückwärts gelegenen Orte abgehende zweite Körper alle b Minten n Meter zurücklegt. Setzt man hier den Weg des zweiten Körpers gleich dem des ersten plus d Meter, und soll die gesuchte Zeit x Minuten sein, so ist der erste Körper $x + t$ Minuten unterwegs und legt also $(x+t)\frac{m}{a}$ Meter zurück; der zweite legt $x \cdot \frac{n}{b}$ Meter zurück; die Gleichung ist also

$$(x+t)\frac{m}{a} + d = x \cdot \frac{n}{b} \quad ,$$

woraus

$$x = \frac{b(mt + ad)}{an - bm}$$

folgt. Setzt man voraus, daß a, b, m, n, t positive Werte haben, so wird x positiv und die Auflösung ist möglich, wenn $an > bm$ ist. Ist dagegen $an < bm$, so wird x negativ; in diesem Fall ist $\frac{m}{a} > \frac{n}{b}$, d. h. der vom ersten Körper in jeder Minute zurückgelegte Weg größer als der des zweiten, die beiden Körper entfernen sich also, statt zusammenzutreffen, immer weiter voneinander und das negative Resultat erhält den Sinn, daß die Begegnung um die entsprechende Anzahl von Minuten vor dem Abgange des zweiten stattgefunden haben würde, wenn beide Körper schon vor diesem Zeitpunkte in denselben Bewegungen gewesen wären. Ist endlich $an = bm$, so wird $x = \infty$; in diesem Fall behalten beide Körper bei ihrer Bewegung immer denselben Abstand voneinander. Wird t negativ, so gibt die Formel die Auflösung für den Fall, daß der zweite Körper um t Minuten früher als der andre abgeht, und kann für diesen Fall in entsprechender Weise weiter diskutiert werden. Wird d negativ, so lag der Ausgangspunkt des zweiten Körpers von dem des ersten aus nach vorwärts; ist $d = 0$, so gingen beide Körper von demselben Punkte aus, ist $t = 0$, so fingen sie ihre Bewegungen zu gleicher Zeit an u. s. w.

§ 20. Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.

1. Eine geordnete Gleichung zweiten Grades mit einer Unbekannten x muß nach § 17 Nr. 4 stets ein Glied mit x^2 und kann außerdem ein solches mit der ersten Potenz der Unbekannten und ein Absolutglied enthalten. Sie hat also die Form

$$1) \qquad a x^2 + b x + c = 0 \quad ,$$

in der b oder c gleich Null zu setzen sind, wenn das zweite oder das dritte Glied fehlt. Der Koeffizient a kann immer als positiv angenommen und die drei Koeffizienten a, b, c werden als reell vorausgesetzt.

Ist in der vorstehenden Form keiner der Koeffizienten b, c gleich Null, enthält also die Gleichung alle drei Glieder, so ist sie eine vollständige. Fehlt das Glied mit der ersten Potenz der Unbekannten, so heißt sie rein quadratisch.

Die rein quadratische Gleichung

$$2) \qquad a x^2 + c = 0$$

wird gelöst, indem man zunächst x^2 als Unbekannte betrachtet, für die man

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

erhält. Hieraus ergibt sich durch Ausziehen der Quadratwurzel, wenn man beachtet, daß diese ebenso mit positiven wie mit negativen Vorzeichen genommen werden kann

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad ,$$

d. h. die Gleichung hat zwei Wurzeln

$$x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad ,$$

von gleichem absoluten Wert aber entgegengesetztem Vorzeichen. Der absolute Wert ist reell oder imaginär, je nachdem $c \lessgtr 0$ ist. Für $c = 0$ werden beide Wurzeln $x_1 = x_2 = 0$.

Die vollständige quadratische Gleichung wird gelöst, indem man sie zunächst durch den Koeffizienten a von x^2 dividiert. Sie erhält dadurch die Normalform:

$$3) \qquad x^2 + p x + q = 0 \quad .$$

Nun bringt man das Absolutglied q auf die rechte Seite und ergänzt die linke Seite

$$x^2 + p x = x^2 + 2 x \cdot \tfrac{1}{2} p$$

zu einem vollständigen Quadrat, indem man auf beiden Seiten $(\frac{1}{2}p)^2$ addiert. Man erhält so:

$$x^2 + 2 x \cdot \tfrac{1}{2} p + (\tfrac{1}{2} p)^2 = (\tfrac{1}{2} p)^2 - q$$

oder

$$(x + \tfrac{1}{2} p)^2 = (\tfrac{1}{2} p)^2 - q \quad .$$

Damit hat man die vollständige quadratische Gleichung 3) auf eine rein quadratische mit der Unbekannten $x + \frac{1}{2}p$ zurückgeführt. Die Auflösung dieser Gleichung gibt

$$x + \tfrac{1}{2} p = \pm\sqrt{(\tfrac{1}{2} p)^2 - q}$$

also

$$4) \qquad x = -\tfrac{1}{2} p \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2} p)^2 - q} \quad .$$

Mithin hat die Gleichung 3) die beiden Wurzeln:

$$x_1 = -\tfrac{1}{2} p + \sqrt{(\tfrac{1}{2} p)^2 - q}, \qquad x_2 = -\tfrac{1}{2} p - \sqrt{(\tfrac{1}{2} p)^2 - q} \quad .$$

Der Anfänger übe sich, aus einfachen quadratischen Gleichungen die Lösung 4) sofort hinzuschreiben. Bei numerischen Gleichungen ist darauf zu achten, ob p gerade oder ungerade ist. Im letztern Fall ist q unter der Quadratwurzel mit auf den Nenner 4 zu bringen. Z. B. erhält man aus

$$x^2 + 10x - 24 = 0 \quad ,$$

$$x = -5 \pm \sqrt{25 + 24} = -5 \pm 7 ; \quad x_1 = 2 , \quad x_2 = -12 \quad .$$

Die quadratische Gleichung:

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

gibt

$$x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{48}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2} ; \quad x_1 = 4 , \quad x_2 = 3 \quad .$$

Die allgemeine Gleichung 1) muß zunächst auf die Normalform

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

gebracht werden und hat die Wurzeln

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad .$$

So erhält man z. B. aus

$$3x^2 - 22x + 35 = 0$$

$$x = \frac{11}{3} \pm \sqrt{\frac{121}{9} - \frac{35}{3}} = \frac{11}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{11}{3} \pm \frac{4}{3} ; \quad x_1 = 5 , \quad x_2 = 2\frac{1}{3} \quad .$$

Die Gleichung:

$$6x^2 + 5x - 56 = 0$$

hat die Wurzeln

$$x = -\frac{5}{12} \pm \sqrt{\frac{25}{144} + \frac{56}{6}} = -\frac{5}{12} \pm \sqrt{\frac{1369}{144}} = -\frac{5}{12} \pm \frac{37}{12} \quad ;$$

$$x_1 = 2\frac{2}{3} , \quad x_2 = -3\frac{1}{2} \quad .$$

In den hier behandelten Beispielen sind die Wurzeln der quadratischen Gleichungen rational. Im allgemeinen werden beide Wurzeln irrational sein. Bei quadratischen Gleichungen mit allgemeinen Zahlen als Koeffizienten werden die Wurzeln unter irrationaler Form erscheinen, wenn der Ausdruck unter der Quadratwurzel nicht ein vollständiges Quadrat ist, was man nach § 14 Nr. 3 zu untersuchen hat.

2. Da eine quadratische Gleichung mit einer Unbekannten zwei Wurzeln hat, so kann eine eingekleidete Aufgabe, die auf eine solche Gleichung führt, zwei im allgemeinen verschiedene Lösungen haben.

Die Beschaffenheit der Wurzeln 4) der Gleichung 3) hängt ab von dem Vorzeichen des Radikanden der Quadratwurzel. Man nennt daher diesen Radikanden

$$(\tfrac{1}{2}p)^2 - q$$

die Diskriminante der quadratischen Gleichung. Je nachdem

$$(\tfrac{1}{2}p)^2 - q \gtrless 0$$

ausfällt, ist die Quadratwurzel reell oder gleich Null oder imaginär. Sind p und q

reelle Zahlen, so sind die beiden Wurzeln im ersten Fall reell und von verschiedenem Werte, im zweiten reell und einander gleich, im dritten konjugiert komplex. Bei einer eingekleideten Aufgabe, gibt der zweite als besonderer Fall nur eine Lösung der Aufgabe; der dritte zeigt gewöhnlich die Unlösbarkeit der Aufgabe im allgemeinen oder bei gewissen Werten der Bekannten an.

Der erste Fall tritt immer ein, wenn das Absolutglied q negativ ist; denn dann ist die Diskriminante unzweifelhaft positiv, welches Vorzeichen auch p haben möge. Eine Aufgabe erfordert daher immer eine Determination, wenn das Absolutglied der quadratischen Gleichung, auf die die Aufgabe führt, positiv ist oder positiv werden kann.

3. Aus den beiden durch 4) gegebenen Wurzeln der quadratischen Gleichung 3), nämlich

$$x_1 = -\tfrac{1}{2}p + \sqrt{(\tfrac{1}{2}p)^2 - q}, \quad x_2 = -\tfrac{1}{2}p - \sqrt{(\tfrac{1}{2}p)^2 - q}$$

ergeben sich folgende Beziehungen zwischen diesen Wurzeln und den Koeffizienten p, q der Gleichung. Es ist

$$5) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = -p \ , \\ x_1 \cdot x_2 = (\tfrac{1}{2}p)^2 - (\tfrac{1}{2}p)^2 + q = q \ ; \end{cases}$$

d. h. die Summe der Wurzeln einer quadratischen Gleichung in der Normalform ist gleich dem negativen Koeffizienten der ersten Potenz der Unbekannten und das Produkt der Wurzeln ist gleich dem Absolutglied. Hieraus folgt:

Ist q negativ, so haben die beiden reellen verschiedenen Wurzeln der Gleichung entgegengesetzte, ist q positiv, so haben sie gleiche Vorzeichen. Welche Vorzeichen dies sind, läßt sich aus dem Vorzeichen von p ermitteln, denn die größere Wurzel muß notwendig das entgegengesetzte Vorzeichen wie p haben. Man erhält hiernach folgende vier Hauptfälle:

Ist q negativ und p negativ, so ist die größere Wurzel positiv, die kleinere negativ.

Ist q negativ und p positiv, so ist die größere Wurzel negativ, die kleinere positiv.

Ist q positiv und p negativ, so sind beide Wurzeln positiv.

Ist q positiv und p positiv, so sind beide Wurzeln negativ. In den beiden letzten Fällen ist vorausgesetzt, daß q nicht größer als $\frac{1}{4}p^2$ ist, da sonst beide Wurzeln komplexe Werte erhalten.

4. Ist $x = x_1$ eine Wurzel der quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0 \ ,$$

so läßt sich die linke Seite ohne Rest durch $x - x_1$ dividieren. Denn es muß

$$x_1^2 + px_1 + q = 0$$

sein, und durch Subtraktion der beiden Gleichungen erhält man

$$(x^2 - x_1^2) + p(x - x_1) = 0$$

oder

$$(x - x_1) \cdot [(x + x_1) + p] = 0 \ .$$

Das gleiche ergibt sich, wenn man die Division nach § 5 Nr. 5 ausführt; man erhält zum Quotienten $x + x_1 + p$, zum Rest $x_1^2 + px_1 + q$ und dieser Rest muß der Voraussetzung zufolge gleich Null sein.

Sind $x = x_1$, $x = x_2$ die beiden Wurzeln der obigen quadratischen Gleichung, so muß demnach die linke Seite sowohl durch $x - x_1$ als durch $x - x_2$ teilbar sein. Hieraus ergibt sich, daß die Gleichung in der Form

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

geschrieben werden kann. Die Ausführung der Multiplikation ergibt hieraus

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

und führt somit auf die Sätze 5) über die Beziehungen zwischen den Koeffizienten und den Wurzeln einer quadratischen Gleichung in Nr. 3.

Umgekehrt ist es selbstverständlich, daß jede Gleichung von der Form

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

die beiden Wurzeln $x = x_1$, $x = x_2$ haben muß, denn ein Produkt kann dadurch gleich Null werden, daß jeder seiner Faktoren gleich Null wird.

In dem besondern Falle, daß das Absolutglied der quadratischen Gleichung $q = 0$ ist, also die Gleichung

$$x^2 + px = 0$$

heißt, sieht man, daß der Gleichung genügt wird, wenn man $x = 0$ setzt. In der Tat kann man die Gleichung schreiben:

$$x(x + p) = 0 \quad ,$$

so daß sie in die beiden Gleichungen

$$x = 0 , \quad x + p = 0$$

zerfällt und man erhält die Wurzeln

$$x_1 = 0 , \quad x_2 = -p \quad ,$$

die auch den Beziehungen

$$x_1 + x_2 = -p , \quad x_1 x_2 = 0$$

genügen.

Allgemeiner wird jede Gleichung von der Form

$$k(ax + b)(cx + d) = 0$$

sowohl durch $ax + b = 0$, als durch $cx + d = 0$ erfüllt, hat also die beiden Wurzeln

$$x_1 = -\frac{b}{a} , \quad x_2 = -\frac{d}{c} \quad .$$

Es ist hiernach möglich, eine Gleichung zu bilden, die zwei im voraus gegebene Wurzeln hat. Sind x_1, x_2 diese Wurzeln, so ist

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0 \quad ,$$

oder

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

diese Gleichung. So heißt die Gleichung, deren Wurzeln 5 und -3 sind:

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \quad ;$$

sind die Wurzeln $2 \pm 3i$, so muß die Gleichung

$$x^2 - 4x + 13 = 0$$

sein; die Wurzeln $3\frac{1}{2}$ und $2\frac{1}{2}$ hat die Gleichung:

$$4x^2 - 24x + 35 = 0 \quad ;$$

die Wurzeln $3a + 2b$ und $a - 4b$ die Gleichung:

$$x^2 - 2(2a - b)x + 3a^2 - 10ab - 8b^2 = 0 \quad .$$

Es geht ferner aus dem vorstehenden hervor, daß die Aufgabe, eine gegebene quadratische Gleichung aufzulösen, als identisch betrachtet werden kann mit der Aufgabe, zwei Zahlen zu finden, deren Summe und deren Produkt gegeben ist, sowie auch als übereinstimmend mit der Aufgabe, einen Ausdruck von der Form $x^2 + px + q$ in zwei lineare Faktoren zu zerlegen.

§ 21. Gleichungen höheren Grades, die sich auf quadratische zurückführen lassen.

1. Es gibt Gleichungen höheren Grades, die sich mit Hilfe quadratischer Gleichungen lösen lassen. Dazu gehören zunächst biquadratische Gleichungen, die nur x^4 und x^2 aber nicht x^3 und x enthalten, also die Form haben

$$x^4 + a x^2 + b = 0 \quad .$$

Betrachtet man hier x^2 als Unbekannte, so ist die Gleichung in Bezug auf diese quadratisch. Man erhält also zwei Werte für x^2 und aus jedem für x zwei absolut gleiche Werte mit entgegengesetztem Vorzeichen. Die biquadratische Gleichung hat also vier Wurzeln.

Läßt sich eine biquadratische Gleichung auf die Form

$$(x^2 + p x)^2 + a(x^2 + p x) + b = 0$$

bringen, so ist sie durch Einführung einer neuen Unbekannten $y = x^2 + p x$ als quadratische Gleichung für y zu lösen. Aus beiden Wurzelwerten für y hat man durch Auflösen von noch zwei quadratischen Gleichungen x zu bestimmen. Es ergeben sich vier Wurzeln.

Z. B. läßt sich die Gleichung

$$x^4 - 6 x^3 + 7 x^2 + 6 x - 8 = 0 \quad ,$$

indem man die beiden ersten Glieder zu einem vollständigen Quadrat ergänzt, schreiben:

$$(x^2 - 3 x)^2 - 2 (x^2 - 3 x) - 8 = 0 \quad .$$

Diese Gleichung zerfällt durch Auflösung auf die Unbekannte $x^2 - 3 x$ in

$$x^2 - 3 x = 4 ; \quad x^2 - 3 x = -2 \quad ,$$

so daß man die vier Wurzeln

$$x_1 = 4 , \quad x_2 = -1 ; \quad x_3 = 2 , \quad x_4 = 1$$

erhält.

Die biquadratische Gleichung:

$$x^4 + a x^3 + b x^2 + c x + d = 0$$

läßt sich auf diese Weise mit Hilfe von quadratischen Gleichungen lösen, wenn

$$c = -\tfrac{1}{2} a (\tfrac{1}{4} a^2 - b)$$

ist. Man kann sie dann auf die Form bringen:

$$(x^2 + \tfrac{1}{2} a x)^2 - (\tfrac{1}{4} a^2 - b)(x^2 + \tfrac{1}{2} a x) + d = 0 \quad .$$

Die biquadratische Gleichung:

$$x^4 - 1 = 0$$

läßt sich schreiben

$$(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0 \quad ,$$

zerfällt also in die beiden rein quadratischen Gleichungen

$$x^2 - 1 = 0 , \quad x_2 + 1 = 0$$

und ergibt die vier Wurzeln $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm i$. Es gibt also vier Zahlen, die mit 4 potenziert 1 geben oder die Aufgabe, die vierte Wurzel aus 1 zu ziehen ist vierdeutig.

2. Eine geordnete Gleichung mit einer Unbekannten heißt **symmetrisch**, wenn das erste und letzte, das zweite und vorletzte u. s. f. Glied gleiche Koeffizienten haben. Eine symmetrische Gleichung zweiten Grades ist

$$x^2 + a x + 1 = 0 \quad .$$

Da das Produkt beider Wurzeln gleich 1 ist (§ 20 Nr. 3), so sind sie reziprok. Hat die Gleichung also eine Wurzel x_1, so hat sie die andre $1 : x_1$.

Eine symmetrische Gleichung vierten Grades muß nach Division mit dem Koeffizienten von x^4 die Form haben:

$$x^4 + a x^3 + b x^2 + a x + 1 = 0 \quad .$$

Dividiert man sie durch x^2 und faßt die Glieder mit gleichen Koeffizienten zusammen, so erhält man

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0 \quad .$$

Führt man als neue Unbekannte

$$x + \frac{1}{x} = y$$

ein, so erhält man durch Quadrieren

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2 , \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2 \quad .$$

Damit nimmt die gegebene Gleichung die Gestalt an:

$$y^2 + a y + b - 2 = 0 \quad ,$$

die quadratisch in Beziehung auf y, zwei Wurzeln y_1 und y_2 liefert. Die Substitutionsgleichung macht nun die Lösung der beiden quadratischen Gleichungen:

$$x^2 - y_1 x + 1 = 0 , \quad x^2 - y_2 x + 1 = 0$$

nötig. Beide sind symmetrisch und geben vier paarweis reziproke Wurzeln. Diese Eigenschaft der Wurzeln geht auch aus der gegebenen Gleichung selbst hervor, da sie sich nicht ändert, wenn man $1 : x$ an Stelle von x setzt. Hat also eine symmetrische Gleichung vierten Grades die nicht reziproken Wurzeln x_1 und x_2, so hat sie auch die Wurzeln $1 : x_1$ und $1 : x_2$.

Hiernach läßt sich die Gleichung

$$x^4 + 1 = 0$$

lösen; man erhält:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 0 , \quad y^2 - 2 = 0 , \quad y = \pm\sqrt{2}$$

und aus

$$x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1 = 0 , \quad x^2 + \sqrt{2} \cdot x + 1 = 0$$

ergeben sich die Wurzeln

$$x_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{1}{2}}} , \quad x_{3,4} = -\sqrt{\frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{1}{2}}} \quad .$$

Diese sind die vier Zahlen, die mit 4 potenziert -1 ergeben, also die vier Werte der vierten Wurzel aus -1. Sie sind paarweis konjugiert komplex.

Die Gleichung:

$$x^4 + a x^3 + b x^2 - a x + 1 = 0$$

ist im strengen Sinne nicht symmetrisch, läßt sich aber nach demselben Verfahren lösen. Man erhält zunächst

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a\left(x - \frac{1}{x}\right) + b = 0 \quad .$$

Setzt man nun

$$x - \frac{1}{x} = y \quad ,$$

so wird

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$$

und man erhält die quadratische Gleichung für y:

$$y^2 + ay + b + 2 = 0 \quad ,$$

aus deren beiden Wurzeln y_1 und y_2 die quadratischen Gleichungen für x:

$$x^2 - y_1 x - 1 = 0 \, , \quad x^2 - y_2 x - 1 = 0$$

gebildet werden. Die biquadratische Gleichung für x hat vier Wurzeln, die paarweis reziprok aber von entgegengesetztem Vorzeichen sind.

3. Eine geordnete Gleichung n-ten Grades hat die Normalform:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad ,$$

wobei die a bekannte Koeffizienten sind. Hat die Gleichung eine Wurzel x_1, so muß identisch:

$$x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + a_2 x_2^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x_1 + a_n = 0$$

sein. Die Subtraktion beider Gleichungen gibt:

$$(x^n - x_1^n) + a_1 (x^{n-1} - x_1^{n-1}) + a_2 (x^{n-2} - x_1^{n-2}) + \ldots + a_{n-1}(x - x_1) = 0 \, ,$$

wobei die linke Seite denselben Wert hat wie die der gegebenen Gleichung. Diese läßt sich aber durch $x - x_1$ ohne Rest dividieren, sie ist also ein Produkt mit dem einen Faktor $x - x_1$. Der andre Faktor ergibt sich durch Division mit $x - x_1$ und die Division läßt sich ohne Rest ausführen. Da nun ein Produkt gleich Null wird, wenn ein Faktor gleich Null wird, so kann man $x - x_1 = 0$ setzen, wodurch man die bekannte Wurzel $x = x_1$ erhält. Der andre Faktor gleich Null gesetzt, gibt aber eine Gleichung, deren Grad um 1 niedriger ist. Läßt sich diese Gleichung mit Hilfe von quadratischen Gleichungen lösen, so hat man die vorgelegte Gleichung gelöst. Dieses Verfahren nennt man das Abtrennen einer bekannten Wurzel einer Gleichung. Ein besonders einfacher Fall dieser Art liegt vor, wenn das Absolutglied einer Gleichung gleich Null ist. Eine solche Gleichung hat immer die Wurzel $x = 0$.

Eine Wurzel einer Gleichung kann man häufig durch Probieren oder Erraten finden. So hat die kubische Gleichung

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

die leicht zu erratende Wurzel $x = 1$; folglich muß die linke Seite der Gleichung den Faktor $x - 1$ haben. In der Tat findet man durch Partialdivision

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6) \quad .$$

Somit zerfällt die kubische Gleichung in die beiden:

$$x - 1 = 0 \, , \quad x^2 - 5x + 6 = 0 \quad .$$

Die erste gibt die bekannte Wurzel $x_1 = 1$, die zweite quadratische die Wurzeln $x_2 = 3$, $x_3 = 2$. Damit ist auch gezeigt, daß die linke Seite der gegebenen Gleichung ein Produkt aus drei linearen Faktoren ist; nämlich:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3) \quad .$$

Eine symmetrische Gleichung dritten oder fünften Grades hat die Form:

$$x^3 + ax^2 + ax + 1 = 0 \quad ,$$

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0 \quad .$$

Jede dieser Gleichungen hat die Wurzel $x = -1$, wodurch man sich durch Zusammenfassen der symmetrischen Glieder überzeugen kann. Dasselbe gilt allgemein für jede symmetrische Gleichung ungeraden Grades. Die erste Gleichung läßt sich durch Abtrennung dieser Wurzel auf die quadratische Gleichung

$$x^2 + (a - 1)x + 1 = 0$$

zurückführen, die wieder symmetrisch ist und zwei reziproke Wurzeln hat. Die symmetrische Gleichung fünften Grades wird durch dasselbe Verfahren auf die symmetrische Gleichung vierten Grades:

$$x^4 + (a - 1)x^3 + (b - a + 1)x^2 + (a - 1)x + 1 = 0$$

zurückgeführt.

Ist eine Gleichung ungeraden Grades insofern nicht in strengem Sinne symmetrisch, als die symmetrischen Glieder Koeffizienten von gleichem absoluten Wert aber entgegengesetzten Vorzeichen haben, so genügt ihr die Wurzel $x = 1$ und durch deren Abtrennung entsteht wieder eine symmetrische Gleichung, deren Grad um 1 niedriger ist.

Hiernach erhält man für die Gleichung

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

die Wurzeln

$$x_1 = 1, \quad x_{2,3} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2} i\sqrt{3} \quad .$$

Die Kubikwurzel aus 1 hat also außer dem bekannten Wert 1 noch zwei konjugiert komplexe Werte.

Ebenso hat die Gleichung

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

die drei Wurzeln

$$x_1 = -1, \quad x_{2,3} = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2} i\sqrt{3} \quad ,$$

die die Werte der Kubikwurzel aus -1 angeben.

Die Gleichung

$$x^5 - 1 = 0$$

zerfällt in $x - 1 = 0$, welche Gleichung die selbstverständliche Wurzel $x_1 = 1$ liefert und die symmetrische Gleichung vierten Grades

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \quad ,$$

deren Wurzeln sind:

$$x_{2,3} = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) \pm \tfrac{1}{4} i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, \quad x_{4,5} = -\tfrac{1}{4}(\sqrt{5} + 1) \pm \tfrac{1}{4} i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \quad .$$

Auf demselben Wege lassen sich die fünf Wurzeln der Gleichung

$$x^5 + 1 = 0$$

bestimmen:

$$x_1 = -1, \; x_{2,3} = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} + 1) \pm \tfrac{1}{4} i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \; x_{4,5} = -\tfrac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) \pm \tfrac{1}{4} i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \; .$$

§ 22. Quadratische Systeme.

1. Eine Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten kann durch Ordnen auf die Form

$$a x^2 + b xy + c y^2 + d x + e y + f = 0$$

gebracht werden und ist vollständig, wenn keiner, dagegen unvollständig, wenn einer oder mehrere der Koeffizienten a, b, c, d, e, f gleich Null sind; doch dürfen selbstverständlich nicht a, b und c gleichzeitig gleich Null sein.

Verbindet man mit einer solchen Gleichung eine zweite

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0 \quad ,$$

so kann man aus beiden zunächst y^2 eliminieren, wodurch eine für y lineare Gleichung entsteht, aus der man y durch x ausdrücken kann. Substituiert man diesen Ausdruck in eine der gegebenen Gleichungen, so erhält man im allgemeinen eine Eliminationsgleichung vierten Grades. Es kann jedoch bei besondern Werten der Koeffizienten die Eliminationsgleichung quadratisch werden oder wenigstens auf quadratische Gleichungen zurückführbar sein. Ebenso können in gewissen Fällen durch Verbindung zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten von höherem Grade als den zweiten, Gleichungen hergestellt werden, die sich auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen.

Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten bilden ein quadratisches System, wenn dieses mit Hilfe quadratischer Gleichungen gelöst werden kann.

Ein allgemeines Kriterium dafür, daß ein gegebenes System quadratisch sei, kann nicht gegeben werden; erst der Erfolg der Auflösung entscheidet. Ebensowenig gibt es ein allgemeines Verfahren der Auflösung quadratischer Systeme. Aber es gibt eine Anzahl typischer Fälle, in denen man ein System von vornherein als quadratisch erkennt und die man nach gewissen Regeln lösen kann.

Die Lösung eines quadratischen Systems ergibt mehr als ein Paar zusammengehöriger Wurzeln. Die Bestimmung der Zahl der Wurzelpaare erfordert in jedem Fall eine besondere Untersuchung.

2. Der Fall eines quadratischen Systems liegt zunächst vor, wenn eine Gleichung des Systems linear und die andre quadratisch ist. Hier führt die Elimination einer Unbekannten durch Substitution zu einer quadratischen Eliminationsgleichung. Ist die zweite Gleichung von höherem Grade, so kann sich die Eliminationsgleichung nach § 21 auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen. Ebenso kann man zuweilen aus einer Gleichung oder durch Verbindung beider Gleichungen eine lineare Gleichung erhalten und diese zur Substitution benutzen.

Beispiele:

1. Die Gleichungen

$$x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \quad ,$$
$$x^2 + y^2 + a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

geben durch Subtraktion eine lineare Gleichung. Man erhält zwei Wurzelpaare.

2. Die Gleichungen

$$x^2 - y^2 + x + y = a \quad ,$$
$$x^2 - y^2 - x + y = b$$

geben durch Subtraktion

$$2x = a - b \, , \quad x = \tfrac{1}{2}(a - b) \quad .$$

Zu diesem Werte von x erhält man zwei Werte von y. Die Lösung ergibt also zwei Wurzelpaare, bei denen der Wert von x derselbe ist.

3. Das System

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y + 2 = 0 \quad ,$$
$$3x^2 - 4y^2 + 5x - 6y + 46 = 0$$

ist quadratisch, weil sich die erste Gleichung schreiben läßt:

$$(2x - y)^2 - 3(2x - y) + 2 = 0 \quad ,$$

also in die linearen Gleichungen

$$2x - y = 2 \, , \quad 2x - y = 1$$

zerfällt. Durch Substitution des Wertes von y ausgedrückt durch x in die zweite

Gleichung, erhält man zwei quadratische Gleichungen für x. Das System hat vier Wurzelpaare.

Das einfachste System dieser Art und überhaupt das einfachste quadratische System gibt die Aufgabe, zwei Zahlen x, y zu bestimmen, deren Produkt p und deren Summe s gegeben ist. Die zweite Gleichung des Systems

$$xy = p \quad ,$$
$$x + y = s \quad ,$$

ließe sich zur Substitution benutzen. Eleganter gestaltet sich die Auflösung, wenn man aus beiden Gleichungen $x - y$ herstellt. Es ist

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = s^2 - 4p \quad ;$$

mithin

$$x - y = \pm\sqrt{s^2 - 4p} \quad .$$

Nun erhält man

$$x_1 = \tfrac{1}{2}\left(s + \sqrt{s^2 - 4p}\right) = y_2 \quad ,$$
$$y_1 = \tfrac{1}{2}\left(s - \sqrt{s^2 - 4p}\right) = x_2 \quad .$$

Man erhält also zwei Wurzelpaare; die Werte für x und y sind vertauscht. Dies sieht man an dem Bau der gegebenen Gleichungen, die sich nicht ändern, wenn man y an die Stelle von x setzt. Bei eingekleideten Aufgaben würden beide Wurzelpaare meist nur eine Lösung geben. Sind z. B. die Seiten x, y eines Rechtecks gesucht, von dem Inhalt und Umfang gegeben ist, so kann man die Zweideutigkeit von vornherein ausschließen, wenn man $x > y$ voraussetzt, dann kann für $x - y$ nur der positive Wert genommen werden.

Ebenso kann das System

$$xy = p$$
$$x - y = d$$

gelöst werden. Es ergibt sich hier:

$$x + y = \pm\sqrt{d^2 + 4p} \quad ,$$

also

$$x_1 = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{d^2 + 4p} + d\right) = -y_2 \quad ,$$
$$y_1 = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{d^2 + 4p} - d\right) = -x_2 \quad .$$

Auf diese einfachsten Systeme lassen sich viele kompliziertere zurückführen. Wenn $x + y$ oder $x - y$ gegeben oder berechnet ist, so sucht man xy und umgekehrt. So kommt man in dem System

$$x^2 + y^2 = a \quad ,$$
$$x + y = b$$

durch Quadrieren der zweiten, wenn man die erste subtrahiert, auf

$$2xy = b^2 - a$$

und findet durch Subtraktion von der ersten

$$(x - y)^2 = 2a - b^2 \quad .$$

Aus

$$x^2 + y^2 = a$$
$$xy = b$$

kommt man leicht zu $x + y$ und $x - y$. Das System hat vier Wurzelpaare, weil man jeden Wert von $x + y$ mit jedem von $x - y$ kombinieren kann.

In dem System

$$x^4 + y^4 = a$$
$$x + y = b$$

kann man die zweite Gleichung mit 4 potenzieren und von dem Resultat die erste subtrahieren; es ist dann

$$4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 = b^4 - a\,, \quad 2x^2 + 3xy + 2y^2 = \frac{b^4 - a}{2xy}\,.$$

Erhebt man nun die zweite Gleichung des Systems ins Quadrat, multipliziert mit 2 und subtrahiert davon die letzte, so ergibt sich:

$$xy = 2b^2 - \frac{b^4 - a}{2xy}\,, \quad x^2y^2 - 2b^2xy + \tfrac{1}{2}(b^4 - a) = 0\,.$$

Aus dieser quadratischen Gleichung für xy ergeben sich die Wurzeln

$$xy = b^2 \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}(a + b^4)} = b^2 + r\,, \quad r = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(a + b^4)}\,.$$

Die Abkürzung r für eine Quadratwurzel, die sich bei Auflösung einer quadratischen Gleichung ergibt, erleichtert die weitere Rechnung. Es ergibt sich zunächst

$$(x - y)^2 = -4r - 3b^2\,,$$

welche Gleichung mit $x + y = b$ auf zwei Wurzelpaare führt. Die beiden andern kann man hinschreiben, indem man r mit $-r$ vertauscht.

3. Sind beide Gleichungen eines Systems rein quadratisch in Bezug auf die Unbekannten x und y, so löst man das System wie ein lineares mit den Unbekannten x^2 und y^2. Man erhält vier Wurzelpaare, weil man jeden Wert von x mit jedem von y zusammenstellen kann.

Eine quadratische Gleichung mit zwei Unbekannten ist homogen, wenn sie nur Glieder von der zweiten Dimension enthält, also die Form hat:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0\,.$$

Dividiert man diese Gleichung durch y^2, so erhält man

$$a\left(\frac{x}{y}\right)^2 + b\frac{x}{y} + c = 0\,,$$

also eine quadratische Gleichung für $x : y$. Aus einer homogenen Gleichung läßt sich also das Verhältnis der Unbekannten bestimmen. Ist ein Wert dieses Verhältnisses

$$\frac{x}{y} = \frac{p}{q}\,,$$

worin p und q Bekannte sind, so drückt man beide Unbekannte durch eine neue aus, indem man

$$x = pu\,, \quad y = qu$$

setzt und diese Werte in die zweite Gleichung des Systems substituiert.

Enthalten zwei Gleichungen eines Systems außer Gliedern zweiter Dimension nur noch ein Absolutglied, so kann man durch Elimination dieses Absolutgliedes eine homogene Gleichung zweiten Grades herstellen. Aus

$$a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1 = 0\,,$$
$$a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2 = 0$$

erhält man

$$(a_1d_2 - a_2d_1)x^2 + (b_1d_2 - b_2d_1)xy + (c_1d_2 - c_2d_1)y^2 = 0\,.$$

Auch aus Ausdrücken wie

$$\frac{x+y}{x-y}, \quad \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}, \quad \frac{x^2+y^2}{xy} \text{ u. dgl.}$$

kann man auf das Verhältnis der Unbekannten kommen. Hat man nämlich die Proportion

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} ,$$

so kann man bilden:

$$\frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1 , \quad \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d} , \quad \frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c} , \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} .$$

Da auch

$$\frac{ma}{nb} = \frac{mc}{nd}$$

ist, so erhält man noch

$$\frac{ma+nb}{ma-nb} = \frac{mc+nd}{mc-nd} .$$

Das Verfahren, eine Proportion dergestalt umzuändern, heißt korrespondierende Addition und Subtraktion. So hat man z. B. aus

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{a}{b} , \quad \frac{2x}{2y} = \frac{x}{y} = \frac{a+b}{a-b} ;$$

aus

$$\frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{a}{b} , \quad \frac{x^2+y^2}{2xy} = \frac{a}{2b} , \quad \frac{(x+y)^2}{(x-y)^2} = \frac{a+2b}{a-2b} , \quad \frac{x+y}{x-y} = \frac{\sqrt{a+2b}}{\pm\sqrt{a-2b}}$$

und daraus

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{a+2b} \pm \sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b} \mp \sqrt{a-2b}} .$$

Dieses Verfahren ist auch sonst zuweilen von Vorteil, weil es Ausdrücke von einem symmetrischen Bau liefert. Hat man z. B. das System

$$\frac{x+y}{1+xy} = a ,$$

$$\frac{x-y}{1-xy} = b ,$$

so kann man zunächst die Nenner beseitigen und die dadurch entstehenden Gleichungen addieren und subtrahieren. Dadurch erhält man:

$$2x = (a+b) + (a-b)xy , \quad 2y = (a-b) + (a+b)xy .$$

Durch Multiplikation dieser beiden Gleichungen ergibt sich die symmetrische Gleichung zweiten Grades für xy:

$$(a^2 - b^2)x^2y^2 + 2(a^2 + b^2 - 2)xy + (a^2 - b^2) = 0 ,$$

die zwei Wurzeln hat, aus denen sich dann x und y ergeben. Bequemer schreibt man die quadratische Gleichung:

$$\frac{1+x^2y^2}{2xy} = \frac{2-a^2-b^2}{a^2-b^2}$$

und wendet darauf korrespondierende Addition und Subtraktion an:

$$\frac{1+xy}{1-xy} = \frac{\sqrt{1-b^2}}{\pm\sqrt{1-a^2}}, \quad xy = \frac{\sqrt{1-b^2} \mp \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-b^2} \pm \sqrt{1-a^2}} .$$

Hieraus ergeben sich die Werte:

$$x = \frac{a\sqrt{1-b^2} \pm b\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-b^2} \pm \sqrt{1-a^2}}, \quad y = \frac{a\sqrt{1-b^2} \mp b\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-b^2} \pm \sqrt{1-a^2}} .$$

Noch bequemer wendet man das Verfahren auf die gegebenen Gleichungen selbst an und erhält;

$$\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} = \frac{1+a}{1-a}, \quad \frac{(1+x)(1-y)}{(1-x)(1+y)} = \frac{1+b}{1-b} .$$

Die Multiplikation und Division beider Gleichungen liefert:

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{\sqrt{(1+a)(1+b)}}{\pm\sqrt{(1-a)(1-b)}}, \quad \frac{1+y}{1-y} = \frac{\sqrt{(1+a)(1-b)}}{\pm\sqrt{(1-a)(1+b)}}$$

und nun erhält man direkt

$$x = \frac{\sqrt{(1+a)(1+b)} \mp \sqrt{(1-a)(1-b)}}{\sqrt{(1+a)(1+b)} \pm \sqrt{(1-a)(1-b)}} ,$$

$$y = \frac{\sqrt{(1+a)(1-b)} \mp \sqrt{(1-a)(1+b)}}{\sqrt{(1+a)(1-b)} \pm \sqrt{(1-a)(1+b)}} .$$

Diese Werte weichen in der Form von den vorher gefundenen und von den durch Lösung der symmetrischen Gleichung für xy sich ergebenden Werten ab. Dies begegnet oft, wenn bei komplizierteren Systemen mit allgemeinen Zahlen die Lösung in irrationaler Form erscheint. Es läßt sich aber die Identität der Ausdrücke nachweisen, z. B. wenn man in beiden die Nenner rational macht (§ 12 Nr. 1) erhält man jedesmal

$$x = \frac{1+ab \mp \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}}{a+b} .$$

4. Systeme von mehr als drei Gleichungen sind ebenfalls quadratische Systeme, wenn sie mit Hilfe von quadratischen Gleichungen gelöst werden können. Die im vorhergehenden angedeuteten Methoden sind auch hier bei einfacheren Fällen anzuwenden. Namentlich hat man durch Herstellung neuer Gleichungen aus den gegebenen und durch Einführung andrer Unbekannten zu versuchen, Systeme mit einer geringeren Zahl von Unbekannten herzustellen. Dies gelingt meist, wenn nur eine Gleichung des Systems nicht linear ist oder wenn die Gleichungen einen symmetrischen Bau haben. Im allgemeinen sind die Formen weit vielgestaltiger als bei Systemen von zwei Gleichungen und die Lösung ist zuweilen nur durch Anwendung besonderer Kunstgriffe möglich.

Die Lösung wird gegeben durch eine Anzahl von Wurzelsystemen.

Beispiele. 1. Sind in einem System von drei Gleichungen zwei linear, so kann man aus ihnen zwei Unbekannte durch die dritte ausdrücken und diese Ausdrücke in die erste substituieren. Läßt sich die entstehende Gleichung durch quadratische Gleichungen lösen, so ist das System gelöst.

2. Die Gleichungen des Systems

$$x^2 - yz = a$$
$$y^2 - xz = b$$
$$z^2 - xy = c$$

lassen sich schreiben:

$$x(x+y+z) - (xy+xz+yz) = a$$
$$y(x+y+z) - (xy+xz+yz) = b$$
$$z(x+y+z) - (xy+xz+yz) = c \quad .$$

Führt man nun die neuen Unbekannten

$$x+y+z = u\,, \quad xy+xz+yz = v$$

ein, so heißen die Gleichungen

$$xu - v = a$$
$$yu - v = b$$
$$zu - v = c \quad ,$$

deren Addition

$$u^2 - 3v = a+b+c$$

ergibt. Nun folgen auch

$$x = \frac{a+v}{u}\,, \quad y = \frac{b+v}{u}\,, \quad z = \frac{c+v}{u} \quad .$$

Multipliziert man je zwei dieser Werte und addiert die Produkte, so erhält man eine zweite Gleichung für u und v. Man erhält

$$v = -\frac{ab+ac+bc}{a+b+c}\,, \quad u = \pm\frac{\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}}{a+b+c} \quad ,$$

womit x, y, z bestimmt sind.

3. Ist das System

$$x^2 + y^2 = a$$
$$u^2 + v^2 = b$$
$$xy + uv = c$$
$$xu + yv = d$$

gegeben, so führe man die neue Unbekannte

$$xy - uv = t$$

ein. Hieraus und aus der dritten Gleichung des Systems hat man

$$2xy = c+t\,, \quad 2uv = c-t$$

und aus den beiden ersten:

$$(x+y)^2 = a+c+t\,, \quad (x-y)^2 = a-c-t \quad ,$$
$$(u+v)^2 = b+c+t\,, \quad (u-v)^2 = b-c+t \quad .$$

Somit kann man x, y, u, v durch t ausdrücken. Setzt man die sich ergebenden Werte in die vierte Gleichung des Systems ein, so erhält man eine quadratische Gleichung für t.

§ 23. Diophantische Gleichungen.

1. Die Aufgabe, aus einem System von n Gleichungen m Unbekannte zu bestimmen, ist in dem gewöhnlichen Sinne unlösbar. Ist $n < m$, so ist die Aufgabe unbestimmt, denn man kann $m - n$ Unbekannten beliebige Werte beilegen und dann aus dem System die n übrigen Unbekannten finden. Die unendlich große Zahl der Werte der Unbekannten, die dem gegebenen System genügen, kann bei praktisch vorkommenden Aufgaben durch gewisse Bedingungen, die entweder willkürlich dazu gebracht werden oder in der Natur der Aufgaben liegen, beschränkt werden. So kann bei numerischen linearen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten die Bedingung zu erfüllen sein, daß für die Unbekannten natürliche oder wenigstens ganze Zahlen gefunden werden sollen. Bei quadratischen Gleichungen kann man die Bedingung stellen, daß die Werte der Unbekannten rational sein sollen. Gleichungen dieser Art nennt man diophantische Gleichungen.

Ist z. B. von zwei Unbekannten x und y nur das Verhältnis gegeben, also die Gleichung

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \quad ,$$

so wird dieser Gleichung genügt durch die unendlich vielen Werte

$$x = an \, , \quad y = bn \quad ,$$

wobei n eine willkürliche Zahl ist. Die Gleichung wird eine diophantische, wenn a und b ganze Zahlen sind und die Werte von x und y ebenfalls ganze Zahlen sein sollen. Es ist dann n eine willkürliche ganze Zahl und es gibt für x und y unendlich viel Werte in ganzen Zahlen, nämlich die entsprechenden Glieder von zwei arithmetischen Reihen (§ 32) mit den Anfangsgliedern a und b und den Differenzen a und b.

Für die diophantische Gleichung

$$x + y = a \quad ,$$

worin a eine ganze Zahl ist, hat man die ganzzahligen Lösungen

$$x = n \, , \quad y = a - n \quad ,$$

wobei n eine willkürliche ganze Zahl sein kann. Ist a eine natürliche Zahl und sollen x und y ebenfalls natürliche Zahlen sein, so ist die Zahl der Lösungen endlich; es kann n nur 1, 2, 3 . . . $a - 1$ sein. Es gibt also nur $a - 1$ Lösungen.

Die diophantische Gleichung

$$x - y = a$$

hat die Lösungen

$$x = n \, , \quad y = -a + n \quad .$$

Ist a eine natürliche Zahl, so gibt es unendlich viele Lösungen in natürlichen Zahlen, nur muß die willkürliche Zahl $n > a$ sein.

Die lineare Gleichung mit zwei Unbekannten

$$1) \qquad ax + by = c$$

ist diophantisch, wenn a, b, c ganze Zahlen sind und für x und y ganzzahlige Werte gefunden werden sollen. Haben a, b, c einen gemeinsamen Teiler, so kann die Gleichung durch diesen gekürzt werden. Haben nur a und b einen gemeinsamen Teiler, etwa f, der in c nicht enthalten ist, so daß

$$a = pf \, , \quad b = qf$$

ist, so würde also

$$pfx + qfy = c \, , \quad px + qy = \frac{c}{f}$$

sein müssen. Sollen aber x und y ganze Zahlen sein, so müßte auch $px + qy$

also $c:f$ eine ganze Zahl sein. Man kann demnach immer voraussetzen, daß die Koeffizienten a, b, c von 1) relativ prim sind.

In einfachen Fällen kann man eine Lösung der diophantischen Gleichung 1) durch Erraten finden. Sind zwei ganzzahlige Werte von x und y, die 1) genügen x_1 und y_1, so muß identisch

$$a x_1 + b y_1 = c$$

sein. Subtrahiert man diese Identität von 1), so ergibt sich die einfachere Gleichung

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0 , \quad \frac{x - x_1}{y - y_1} = -\frac{b}{a} ,$$

der genügt wird, wenn man

$$x - x_1 = b n , \quad y - y_1 = -a n$$

setzt, wobei n eine willkürliche ganze Zahl ist. Man hat also aus der besonderen Lösung x_1, y_1 die allgemeine

$$x = x_1 + b n , \quad y = y_1 - a n$$

gefunden. Die allgemeine Lösung der diophantischen Gleichung 1) muß also eine willkürliche ganze Zahl enthalten. Die besonderen Lösungen sind entsprechende Glieder zweier arithmetischer Reihen, deren Anfangsglieder x_1, y_1 und deren Differenzen b und $-a$ sind.

Durch zwei besondere Lösungen x_1, y_1 und x_2, y_2 der diophantischen Gleichung

$$a x + b y = c$$

sind die Koeffizienten bestimmt. Durch Subtraktion der Identitäten

$$a x_1 + b y_1 = c , \quad a x_2 + b y_2 = c$$

erhält man

$$a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0 , \quad \frac{a}{b} = -\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} .$$

Durch die kleinsten Zahlen, die dieser diophantischen Gleichung für a und b genügen, sind a und b und damit c bestimmt. So sind z. B. $x_1 = 7$, $y_1 = 13$; $x_2 = 12$, $y_2 = 5$ besondere Lösungen der diophantischen Gleichung

$$8 x + 5 y = 121 .$$

2. Ein Verfahren, um von einer diophantischen linearen Gleichung mit zwei Unbekannten eine besondere Lösung zu finden, geben die folgenden Beispiele. Man drückt immer die Unbekannte, die den kleineren Koeffizienten hat, durch die andre aus. Dies gibt einen Bruch, den man in eine möglichst große ganze Zahl und einen Bruch, dessen Zähler in kleineren Zahlen ausgedrückt ist, zerlegt. Es sei z. B. die diophantische Gleichung

$$25 x + 6 y = 449$$

gegeben. Hier kann man

$$y = \frac{449 - 25 x}{6} = 75 - 4 x - \frac{1 + x}{6}$$

setzen. Soll nun y eine ganze Zahl werden, so muß $1 + x$ durch 6 ohne Rest teilbar sein. Man sieht, daß dieser Forderung genügt wird, durch den Wert $x = 5$, aus dem sich nun $y = 54$ ergibt. Aus der besondern Lösung erhält man nach Nr. 1 die allgemeine:

$$x = 5 + 6 n , \quad y = 54 - 25 n .$$

Da man hieraus außer für $n = 0$ noch für $n = 1$ und $n = 2$ positive Zahlen erhält, so hat die Gleichung drei Lösungen in natürlichen Zahlen.

Wendet man dasselbe Verfahren auf die Gleichung

$$17x - 13y = 5$$

an, so erhält man zunächst

$$y = \frac{17x - 5}{13} = x + \frac{4x - 5}{13} .$$

Da man hier nicht sofort erraten kann, welcher Wert für x den Bruch zu einer ganzen Zahl p macht, so wiederholt man das Verfahren, indem man

$$\frac{4x - 5}{13} = p , \quad x = \frac{13p + 5}{4} = 3p + 1 + \frac{p + 1}{4}$$

setzt. Nun sieht man, daß $p = 3$ genommen werden kann, woraus sich $x = 11$, $y = 14$ ergibt. Die Gleichung hat also die allgemeine Lösung

$$x = 11 - 13n , \quad y = 14 - 17n ,$$

oder, da man für die willkürliche ganze Zahl n auch $-n$ setzen kann,

$$x = 13n + 11 , \quad y = 17n + 14 .$$

Für x können also alle ganzen Zahlen gesetzt werden, die durch 13 dividiert den Rest 11 und für y alle ganzen Zahlen, die durch 17 dividiert den Rest 14 geben.

Dieses Verfahren muß, wenn man es genügend oft wiederholt, immer zum Ziele führen. Ein andres Verfahren beruht auf der Anwendung der Kettenbrüche und wird in § 36 Nr. 5 gezeigt.

Sind zwei lineare Gleichungen mit drei Unbekannten gegeben, so kann man durch Elimination einer Unbekannten eine Gleichung mit zwei Unbekannten herstellen und diese als diophantische lösen. Setzt man die Werte der allgemeinen Lösung, die eine willkürliche ganze Zahl m enthalten, ein, so ergibt sich eine zweite diophantische Gleichung mit der dritten Unbekannten und der Zahl m. Durch Auflösung wird nun die dritte Unbekannte und m durch eine neue willkürliche Zahl n ausgedrückt.

Soll z. B die Zahl 17 in drei ganze Zahlen so zerlegt werden, daß die Summe des fünffachen der ersten, des vierfachen der zweiten und des siebenfachen der dritten 80 ist, so hat man die beiden Gleichungen:

$$x + y + z = 17 ,$$
$$5x + 4y + 7z = 80 ,$$

aus denen durch Elimination von y folgt:

$$x + 3z = 12 , \quad x = 12 - 3z$$

und nunmehr aus der ersten Gleichung

$$y = 5 + 2z .$$

Dabei ist z selbst die willkürliche ganze Zahl. Schließt man den Wert Null und negative Werte der drei Teile aus, so sind diese 9, 7, 1; 6, 9, 2; 3, 11, 3.

Sind die Zahlen zu suchen, die durch 9, 13, 17 dividiert die Reste 7, 11, 15 geben, so muß eine dieser Zahlen

$$x = 9u + 7 = 13v + 11 = 17w + 15$$

sein. Man findet zunächst aus

$$9u - 13v = 4 , \quad u = \frac{4 + 13v}{9} = v + \frac{4(1 + v)}{9} .$$

Der Bruch verschwindet für $v = -1$, wozu $u = -1$ gehört, so daß die allgemeine Lösung

$$u = 13m - 1 , \quad v = 9m - 1$$

ist. Setzt man den Wert von u in die Gleichung

$$9u - 17w = 8$$

ein, so ergibt sich die Gleichung zwischen m und w:

$$117m - 17w = 17 ,$$

von der man die besondere Lösung $m = 0$, $w = -1$ erraten kann. Die allgemeine Lösung ist also

$$m = 17n , \quad w = 117n - 1 ,$$

woraus man nun

$$u = 221n - 1 , \quad v = 153n - 1 , \quad x = 1989n - 2$$

erhält. Die kleinste positive der verlangten Zahlen ist demnach 1987.

Ist eine lineare Gleichung mit drei Unbekannten gegeben, z. B.

$$7x - 9y + 17z = 46 ,$$

so drückt man die Unbekannte x, die den kleinsten Koeffizienten hat, zunächst durch die beiden andern Unbekannten aus und verwandelt den Bruch in eine ganze Zahl und einen Bruch mit möglichst kleinen Zahlen. Hier hat man also

$$x = \frac{46 + 9y - 17z}{7} = 6 + y - 2z + \frac{4 + 2y - 3z}{7} .$$

Damit x eine ganze Zahl werde, muß nun

$$4 + 2y - 3z = 7m$$

sein, wobei m eine willkürliche ganze Zahl ist. Daraus erhält man wieder:

$$y = \frac{7m - 4 + 3z}{2} = 3m - 2 + z + \frac{m + z}{2}$$

und nun wird y eine ganze Zahl, wenn

$$m + z = 2n$$

gesetzt wird, worin n eine zweite willkürliche ganze Zahl sein kann. So erhält man die allgemeine Lösung

$$z = -m + 2n , \quad y = 2m + 3n - 2 , \quad x = 5m - n + 4$$

ausgedrückt durch zwei willkürliche ganze Zahlen m und n.

Damit ist nun gezeigt, wie man allgemein aus einem System von linearen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, deren Anzahl geringer ist als die der zu bestimmenden Unbekannten ganzzahlige Werte dieser Unbekannten finden kann. Die allgemeine Lösung gibt die Werte der Unbekannten, wenn n die Anzahl der Gleichungen und m die der Unbekannten ist, durch $m - n$ willkürliche ganze Zahlen ausgedrückt.

3. Bei der Auflösung einer diophantischen Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten und ganzzahligen oder rationalen Koeffizienten handelt es sich im allgemeinen darum, rationale Werte und nur in besonders einfachen Fällen ganzzahlige Werte der Unbekannten zu finden.

Die einfachste diophantische Gleichung zweiten Grades ist die, in der als Glied zweiter Dimension nur das Produkt der Unbekannten vorkommt, also

$$axy + bx + cy + d = 0 ,$$

in der die Koeffizienten ganzzahlig anzunehmen sind. Hier gehört zu jedem

rationalen Werte von x ein rationaler Wert von y. Man kann aber ganzzahlige Lösungen finden, wenn man y durch x ausdrückt; es ergibt sich

$$y = -\frac{bx+d}{ax+c}$$

oder

$$ay = -\frac{abx+ad}{ax+c} = -b - \frac{ad-bc}{ax+c} \quad ,$$

woraus man

$$(ax+c)(ay+b) = bc - ad$$

erhält. Zerlegt man nun die ganze Zahl $bc - ad$ auf alle möglichen Arten in das Produkt zweier Faktoren, so kann man die Faktoren der linken und rechten Seite der Gleichung einander gleich setzen. Ist eine solche Zerlegung z. B.

$$bc - ad = pq \quad ,$$

so hat man

$$ax + c = p, \quad ay + d = q$$

zu setzen und zu probieren, ob

$$x = \frac{p-c}{a}, \quad y = \frac{q-d}{a}$$

ganze Zahlen werden, was der Fall ist, wenn $p - c$ und $q - d$ gleichzeitig durch a teilbar sind. So kann man z. B. die Gleichung

$$5xy - 2x - 3y - 18 = 0$$

auf die Form

$$(5x - 3)(5y - 2) = 96$$

bringen. Nun hat man die Faktoren p, q von 96 so zu bestimmen, daß $p + 3$ und $q + 2$ gleichzeitig durch 5 teilbar sind. Dieser Bedingung genügen die Zerlegungen:

$$96 = 2 \cdot 48 = 32 \cdot 3 = 12 \cdot 8 = (-48)(-2) = (-3)(-32) = (-8)(-12) \quad ,$$

so daß man die sechs ganzzahligen Lösungen: 1, 10; 7, 1; 3, 2; —9, 0; 0, —6; —1, —2 erhält.

Auch die quadratische Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten, in der nur noch das Quadrat der einen Unbekannten vorkommt:

$$ax^2 + bxy + cx + dy + e = 0$$

kann man nach demselben Verfahren auf die Form bringen:

$$(bx + d)(b^2y + abx + bc - ad) = b^2e - (bc - ad)d$$

und durch Faktorenzerlegung der ganzen Zahl rechts ganzzahlige Werte von x und y finden. Z. B.

$$x^2 - 2xy - 3x + 5y + 20 = 0$$

gibt

$$(2x - 5)(4y - 2x + 1) = 75 \quad .$$

Ist nun $75 = p \cdot q$, so muß

$$x = \frac{p+5}{2}, \quad 4y - (p+5) + 1 = q, \quad y = \frac{p+q+6}{4}$$

sein. Da p und q beide ungerade sind, so gibt jede mögliche Zerlegung in positive Faktoren, zwei ganzzahlige Lösungen.

Die Aufgabe, eine quadratische Funktion einer Variabeln x mit rationalen Koeffizienten zu einem vollständigen Quadrat zu machen, d. h. der Gleichung

$$Ax^2 + Bx + C = y^2$$

durch rationale Werte von x und y zu genügen, ist zu lösen, wenn entweder A oder C Quadrate rationaler Zahlen sind. Die Gleichung

$$a^2x^2 + bx + c = y^2$$

wird gelöst, indem man

$$y = ax + u\,, \quad a^2x^2 + bx + c = (ax + u)^2$$

setzt. Dadurch erhält man

$$x = \frac{c - u^2}{2au - b}\,, \quad y = \frac{au^2 - bu + ac}{2au - b}\,,$$

wobei u eine willkürliche rationale Zahl bedeutet.

Ähnlich setzt man zur Lösung der Gleichung:

$$ax^2 + bx + c^2 = y^2$$

$$y = ux + c\,, \quad ax^2 + bx + c^2 = (ux + c)^2$$

und erhält außer der selbstverständlichen Lösung $x = 0$:

$$x = \frac{2cu - b}{a - u^2}\,, \quad y = \frac{cu^2 - bu + ac}{a - u^2}\,,$$

worin wieder für u eine willkürliche rationale Zahl gesetzt werden kann.

Hat die Gleichung mit rationalen Koeffizienten:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

zwei rationale Wurzeln, so läßt sich die Gleichung

$$ax^2 + bx + c = y^2$$

auf die Form bringen

$$a(x - \alpha)(x - \beta) = y^2\,,$$

worin α und β rational sind. Setzt man nun

$$a(x - \alpha) = \frac{u}{v}y\,, \quad x - \beta = \frac{v}{u}y\,,$$

so bestimmen sich aus diesen beiden Gleichungen x und y, ausgedrückt durch zwei willkürliche rationale Zahlen u und v.

Von den diophantischen quadratischen Gleichungen mit drei Unbekannten ist von besonderer Wichtigkeit die homogene Gleichung mit rationalen Koeffizienten:

$$ax^2 + bxy + y^2 = z^2\,.$$

Bringt man diese auf die Form

$$z^2 - y^2 = (z + y)(z - y) = x(ax + by)\,,$$

so wird ihr genügt, wenn man

$$z + y = \frac{u}{v}x\,, \quad z - y = \frac{v}{u}(ax + by)$$

setzt. Daraus findet man

$$y = \frac{u^2 - av^2}{2uv + bv^2}x\,, \quad z = \frac{u^2 + buv + av^2}{2uv + bv^2}x\,,$$

worin für x, u, v willkürliche rationale Werte zu nehmen sind. Bei ganzzahligen

Koeffizienten a und b kann man auch u und v ganzzahlig annehmen und setzt man dann

$$x = 2uv + bv^2 \quad ,$$

so erhält man für y und z die ebenfalls ganzzahligen Lösungen

$$y = u^2 - av^2 , \quad z = u^2 + buv + av^2 \quad .$$

Ein besonderer Fall hiervon ist die pythagoreische Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad ,$$

deren ganzzahlige Lösungen aus der allgemeinen für $a = 1$, $b = 0$:

$$x = 2uv , \quad y = u^2 - v^2 , \quad z = u^2 + v^2$$

hervorgehen. Man erhält alle möglichen besonderen Lösungen in Zahlen, die relativ prim sind, wenn man für u und v Zahlen setzt, die relativ prim und nicht beide ungerade sind.

Vierter Abschnitt.

Gleichungen höheren Grades.

§ 24. Kubische Gleichungen.

1. Jede geordnete Gleichung dritten Grades mit einer Unbekannten hat die Form

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \quad ,$$

wobei jeder der Koeffizienten B, C, D, nicht aber A, gleich Null sein kann. Durch Division mit A erhält man die Normalform:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad .$$

Ist $c = 0$, so läßt sich auf der linken Seite dieser Gleichung der Faktor x absondern, und der Gleichung

$$x(x^2 + ax + b) = 0$$

wird sowohl durch $x = 0$ als auch durch jede der beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0$$

genügt. (Vgl. § 21 Nr. 3.) Die Gleichung hat also drei Wurzeln.

Ist c nicht gleich Null, aber sowohl a als b gleich Null, so ist die Gleichung rein kubisch. Schreibt man sie in der Form

$$x^3 - a^3 = 0 \quad ,$$

so sieht man, daß $x = a$ eine Wurzel ist, wobei $a = \sqrt[3]{a^3}$ als reelle Zahl betrachtet werden darf.

Die Gleichung kann also auf die Form

$$(x - a)(x^2 + ax + a^2) = 0$$

gebracht werden, und hieraus folgt, daß ihr nicht nur dadurch genügt werden kann, daß der eine Faktor $x - a = 0$, also $x_1 = a$ gesetzt wird, sondern auch dadurch, daß der andre Faktor $x^2 + ax + a^2 = 0$ wird. Diese quadratische Gleichung liefert noch die beiden Wurzeln

$$x_{2,3} = a\left(-\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}\right) \quad .$$

Eine rein kubische Gleichung hat also drei Wurzeln, von denen eine reell ist und die beiden andern konjugiert komplex sind.

Schreibt man die drei Wurzeln in der Form

$$x_1 = a \cdot 1 , \quad x_2 = a\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} i\sqrt{3}\right), \quad x_3 = a\left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} i\sqrt{3}\right) ,$$

so sind die Faktoren von a nach § 21 Nr. 3 die drei Werte der Kubikwurzel aus 1 und a der aus der Arithmetik bekannte reelle Wert der Kubikwurzel aus dem negativen Absolutglied der rein kubischen Gleichung. Daraus folgt, daß die Kubikwurzel aus einer reellen Zahl dreideutig ist und zwar einen reellen und zwei konjugiert komplexe Werte hat. Da

$$\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} i\sqrt{3}\right)\left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} i\sqrt{3}\right) = 1 ,$$
$$\left(-\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2} i\sqrt{3}\right)^2 = \left(-\tfrac{1}{2} \mp \tfrac{1}{2} i\sqrt{3}\right)$$

ist, so folgt allgemeiner, daß, wenn $\sqrt[3]{a}$ irgend einen der drei Werte der Kubikwurzel aus a bezeichnet, die andern beiden Werte

$$\sqrt[3]{a}\left(-\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2} i\sqrt{3}\right)$$

sind.

2. Ist in der allgemeinen kubischen Gleichung der Koeffizient a der zweiten Potenz der Unbekannten gleich Null, so heißt die Gleichung **reduziert**; ist keiner der Koeffizienten gleich Null, so ist sie eine **vollständige**.

Setzt man in der vollständigen kubischen Gleichung $x = y + a$, so erhält man

$$\left.\begin{array}{llll} y^3 + 3ay^2 + 3a^2 y & + a^3 \\ + ay^2 & + 2aay & + aa^2 \\ & + by & + ba \\ & & + c \end{array}\right\} = 0 .$$

Bestimmt man nun a so, daß

$$3a + a = 0$$

ist, setzt also

$$a = -\tfrac{1}{3} a ,$$

so erhält man durch Substitution dieses Wertes von a eine reduzierte Gleichung für die neue Unbekannte y.

Ist in der vollständigen Gleichung $b = 0$, also die kubische Gleichung von der Form

$$x^3 + ax^2 + c = 0 ,$$

so kann man sie reduzieren, wenn man setzt:

$$x = \frac{1}{y} .$$

Man kann also eine vollständige kubische Gleichung reduzieren und die Aufgabe der Auflösung kubischer Gleichungen kann an einer reduzierten Gleichung gezeigt werden.

Die aus einer vollständigen kubischen Gleichung durch das vorstehende Verfahren entwickelte, oder auch unmittelbar gegebene reduzierte Gleichung möge durch

$$1) \qquad x^3 + px + q = 0$$

dargestellt werden.

Setzt man $x = u + v$, wo u und v zwei neue Unbekannte bezeichnen, so erhält man

$$u^3 + 3u^2 v + 3uv^2 + v^3 + p(u + v) + q = 0 ,$$

oder

$$u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u + v) = 0 \quad .$$

Bestimmt man nun v so, daß

$$2) \qquad 3uv + p = 0$$

wird, so geht diese Gleichung über in

$$3) \qquad u^3 + v^3 + q = 0$$

oder, wenn man den aus 2) resultierenden Wert

$$v = -\frac{p}{3u}$$

einsetzt,

$$u^3 - \frac{p^3}{27u^3} + q = 0 \quad ,$$

oder

$$u^6 + qu^3 - (\tfrac{1}{3}p)^3 = 0 \quad .$$

Diese Gleichung ist in Beziehung auf die Unbekannte u^3 vom zweiten Grade und führt durch Auflösung zu

$$u^3 = -\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3} \quad .$$

Die Gleichung 3) liefert dann hierzu

$$v^3 = -\tfrac{1}{2}q \mp \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3} \quad .$$

Man hat also für u und v je eine rein kubische Gleichung und erhält durch Auflösen dieser Gleichung, wie in Nr. 1 gezeigt, für jede Unbekannte drei Werte. Setzen wir der Kürze halber die reellen Werte der Kubikwurzeln

$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3}} = \alpha \, , \quad \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3}} = \beta$$

und beachten, daß das doppelte Vorzeichen vor der Quadratwurzel überflüssig ist, da die Werte von u^3 und v^3 einander wechselweise gleich sein würden, so hat man

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha & v_1 &= \beta \\ u_2 &= \alpha\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}\right) \, , & v_2 &= \beta\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}\right) \, , \\ u_3 &= \alpha\left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}\right) \, , & v_3 &= \beta\left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}\right) \, . \end{aligned}$$

Da nun $x = u + v$ und man jeden der drei Werte von u mit jedem der drei Werte von v verbinden kann, so erhält man anscheinend für x neun Werte. Von diesen sind jedoch zufolge der Gleichung 2) nur diejenigen gültig, deren Produkt den reellen Wert $-\frac{1}{3}p$ hat. Scheidet man alle übrigen aus, so behält man drei Wurzeln für die reduzierte kubische Gleichung übrig, nämlich

$$x_1 = u_1 + v_1 \, , \quad x_2 = u_2 + v_3 \, , \quad x_3 = u_3 + v_2$$

oder

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha + \beta \quad , \\ x_2 &= -\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) + \tfrac{1}{2}i(\alpha - \beta)\sqrt{3} \quad , \\ x_3 &= -\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) - \tfrac{1}{2}i(\alpha - \beta)\sqrt{3} \quad . \end{aligned}$$

Von diesen drei Wurzeln wird die erste, also in vollständiger Schreibweise die Formel

$$x_1 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3}}$$

die Cardanische Formel genannt.

3. Der Radikand der Quadratwurzel

$$(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3$$

heißt die Diskriminante der kubischen Gleichung, weil man für den Charakter der drei Wurzeln zu unterscheiden hat, ob

$$(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3 \gtreqless 0$$

ausfällt.

Ist die Diskriminante positiv, so ist die Quadratwurzel reell und folglich muß auch x_1 reell werden, während x_2 und x_3 konjugiert komplexe Werte erhalten. In diesem Fall hat also die kubische Gleichung eine reelle und zwei konjugiert komplexe Wurzeln.

In dem besonderen Fall, daß die Diskriminante gleich Null ist, wird $\alpha = \beta$, folglich $x_1 = 2\alpha$, $x_2 = x_3 = -\alpha$; die kubische Gleichung hat also drei reelle Wurzeln, von denen zwei einander gleich sind. Die gleichen Wurzeln haben das entgegengesetzte Vorzeichen der dritten und ihr absoluter Wert ist die Hälfte desjenigen der dritten. Insbesondere ist also das Verschwinden der Diskriminante ein Kennzeichen dafür, daß die kubische Gleichung zwei reelle gleiche Wurzeln hat.

Ist dagegen die Diskriminante negativ, so erscheinen alle drei Wurzeln unter komplexer Form. Dieser Fall tritt ein, wenn p negativ und der absolute Wert von $(\frac{1}{3}p)^3$ größer als $(\frac{1}{2}q)^2$ ist. Man darf jedoch hieraus nicht schließen, daß die drei Wurzeln der Gleichung selbst komplex seien, denn da die komplexe Zahl unter jedem der beiden Kubikwurzelzeichen vorkommt, so ist es denkbar, daß die imaginären Teile sich gegenseitig aufheben.

In der Tat läßt sich zeigen, daß in dem vorliegenden Fall sämtliche drei Wurzeln der Gleichung reell und verschieden sind; da dies jedoch, sowie die Bestimmung der drei reellen Wurzelwerte mit den bisherigen Hilfsmitteln der elementaren Arithmetik nicht ausführbar ist, so hat man diesen Fall den irreducibeln (casus irreducibilis) genannt.

Der Beweis der vorstehenden Behauptung und die Auflösung der kubischen Gleichungen für den irreducibeln Fall gelingen mit Hilfe der Trigonometrie. Da dieser Fall nur bei negativen Werten von p eintreten kann, so soll die aufzulösende reduzierte Gleichung in der Form

$$x^3 - px \pm q = 0$$

geschrieben werden, wobei p und q im absoluten Sinne genommen sind. Setzt man

$$x = r\sin\varphi \quad ,$$

wo r und φ unbekannt sind, so geht die Gleichung nach Division mit r^3 über in

$$\sin^3\varphi - \frac{p}{r^2}\sin\varphi \pm \frac{q}{r^3} = 0 \quad .$$

Vergleicht man hiermit die goniometrische Formel

$$\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi \quad ,$$

oder

$$\sin^3\varphi - \tfrac{3}{4}\sin\varphi + \tfrac{1}{4}\sin 3\varphi = 0 \quad ,$$

so sieht man, daß beide Gleichungen identisch werden, wenn man r und φ so bestimmt, daß

$$\frac{p}{r^2} = \frac{3}{4}, \quad \pm\frac{q}{r^3} = \frac{1}{4}\sin 3\varphi$$

wird. Hieraus folgt

$$r = \sqrt{\frac{4}{3}p} \quad ,$$

wobei das Wurzelzeichen im absoluten Sinne genommen wird, und

$$\sin 3\varphi = \pm\frac{4q}{r^3} = \pm\sqrt{\frac{27q^2}{4p^3}} \quad .$$

Da nun in dem irreducibeln Fall $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}q^2$, also $4p^3 > 27q^2$ ist, so gibt es stets einen Winkel 3φ, dessen Sinus den vorstehenden Wert besitzt. Durch den Winkel 3φ erhält man auch den Winkel φ, und da r ebenfalls bestimmt ist, auch $x = r\sin\varphi$.

Hierbei ist jedoch zu beachten, daß zu jedem Sinus unendlich viele Winkel gehören. Es sei zunächst die Gleichung

$$x^3 - px + q = 0$$

vorausgesetzt, so liefert die Gleichung

$$\sin 3\varphi = +\sqrt{\frac{27q^2}{4p^3}}$$

zunächst für 3φ einen spitzen Winkel ϑ und außerdem die Winkel

$$2R - \vartheta\,, \quad 4R + \vartheta\,, \quad 6R - \vartheta\,, \quad 8R + \vartheta\,, \quad \text{u. s. w.}$$

und demnach erhält man für $x = r\sin\varphi$ anscheinend unendlich viele Werte, nämlich

$$r\sin\tfrac{1}{3}\vartheta\,, \quad r\sin(60^0 - \tfrac{1}{3}\vartheta)\,, \quad r\sin(120^0 + \tfrac{1}{3}\vartheta)\,,$$
$$r\sin(180^0 - \tfrac{1}{3}\vartheta)\,, \quad r\sin(240^0 + \tfrac{1}{3}\vartheta)\,, \quad \text{u. s. w.}$$

Mit Hilfe der Formeln

$$\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha\,; \quad \sin(180^0 + \alpha) = -\sin\alpha$$

findet man aber, daß

$$\sin(120^0 + \tfrac{1}{3}\vartheta) = \sin(60^0 - \tfrac{1}{3}\vartheta)\,, \quad \sin(180^0 - \tfrac{1}{3}\vartheta) = \sin\tfrac{1}{3}\vartheta\,, \quad \text{u. s. w.,}$$

und daß somit die obigen Werte von x sich auf nur drei verschiedene, nämlich

$$r\sin\tfrac{1}{3}\vartheta\,, \quad r\sin(60^0 - \tfrac{1}{3}\vartheta)\,, \quad r\sin(240^0 + \tfrac{1}{3}\vartheta) = -r\sin(60^0 + \tfrac{1}{3}\vartheta)$$

reduzieren.

Für die Gleichung

$$x^3 - px - q = 0$$

ergibt sich dasselbe, nur ist

$$\sin 3\varphi = -\sqrt{\frac{27q^2}{4p^3}} \quad ,$$

mithin kann man 3φ und φ als negative Winkel ansehen, und die drei Wurzeln sind den vorigen drei dem absoluten Werte nach gleich, aber von entgegengesetzten Vorzeichen.

Man hat also für den irreducibeln Fall folgende Auflösung der Gleichung

$$x^3 - px \pm q = 0 \quad :$$

man setze

$$r = \sqrt{\frac{4}{3}p}\,, \quad \sin 3\varphi = \frac{4q}{r^3} \quad ,$$

so ist

$$x_1 = \pm r\sin\varphi\,, \quad x_2 = \pm r\sin(60^0 - \varphi)\,, \quad x_3 = \mp r\sin(60^0 + \varphi) \quad .$$

Die kubische Gleichung hat also im irreducibeln Falle drei reelle verschiedene Wurzeln und zwar haben immer zwei davon das Vorzeichen des Absolutglieds.

Beispiele. 1. $x^3 - 19x + 30 = 0$

$$r = \sqrt{\frac{76}{3}}, \quad \sin 3\varphi = \frac{120}{r^3}, \quad 3\varphi = 70^0\,14'\,15'',$$
$$\varphi = 23^0\,24'\,45'',$$
$$60^0 - \varphi = 36^0\,35'\,15'',$$
$$60^0 + \varphi = 83^0\,24'\,45'';$$
$$x_1 = r\sin\varphi = 2, \quad x_2 = r\sin(60^0 - \varphi) = 3, \quad x_3 = -r\sin(60^0 + \varphi) = -5.$$

Die Rechnung mit 5-stelligen Logarithmen gibt diese rationalen Werte nicht vollkommen genau, man erhält

$$\log x_1 = 0{,}30\,102, \quad \log x_2 = 0{,}47\,713, \quad \log(-x_3) = 0{,}69\,898.$$

Durch Einsetzung der abgerundeten Werte überzeugt man sich aber, daß sie die genauen Wurzeln der Gleichung sind.

2. Es ist eine Halbkugel durch einen der Grundfläche parallelen Schnitt zu halbieren. Es sei der Radius der Halbkugel 1 und der parallele Schnitt habe den Abstand x von der Grundfläche. Dieser ist zu finden aus der kubischen Gleichung:

$$x^3 - 3x + 1 = 0.$$

Hier liegt der casus irreducibilis vor, weil der Koeffizient von x negativ und

$$(\tfrac{1}{2})^2 < 1^3$$

ist. Da das Absolutglied positiv ist, so ist eine Wurzel negativ, also für die Aufgabe nicht brauchbar. Nun ist

$$r = 2, \quad \sin 3\varphi = \tfrac{1}{2}, \quad 3\varphi = 30^0, \quad \varphi = 10^0, \quad 60^0 - \varphi = 50^0.$$

Hieraus findet sich, da $r\sin(60^0 - \varphi) > 1$ wird, nur die eine brauchbare Wurzel

$$x = r\sin\varphi = 0{,}3473.$$

4. Eine kubische Gleichung, die die Wurzeln x_1, x_2, x_3 hat, muß sein:

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0.$$

Die Entwicklung der linken Seite ergibt

$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 = 0.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der Normalform

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

so ergeben sich die Beziehungen der Wurzeln zu den Koeffizienten:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a,$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b,$$
$$x_1x_2x_3 = -c.$$

Die Lösung einer kubischen Gleichung ist also identisch mit der Lösung der Aufgabe drei Unbekannte zu bestimmen, von denen die Summe, die Summe der Produkte von je zweien und das Produkt gegeben sind. Ein System von drei Gleichungen, aus denen diese drei Ausdrücke der Unbekannten bestimmt werden können, ist ein kubisches System.

Ist z. B. von einem rechtwinkligen Parallelepiped gegeben: die Summe s der drei anstoßenden Kanten, die Diagonalachse d und das Volumen V, so ergibt sich für die anstoßenden Kanten u, v, w das System

$$u + v + w = s,$$
$$u^2 + v^2 + w^2 = d^2,$$
$$uvw = V.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen erhält man

$$uv + uw + vw = \tfrac{1}{2}(s^2 - d^2) \quad ,$$

folglich sind u, v, w die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$x^3 - sx^2 + \tfrac{1}{2}(s^2 - d^2)x + V = 0 \quad .$$

Ist eine kubische Gleichung reduziert und hat sie die Wurzeln x_1, x_2, x_3, so muß

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

sein, d. h. eine Wurzel ist gleich der negativen Summe der beiden andern. Kann die Gleichung durch die CARDANische Formel gelöst werden, so sieht man die Richtigkeit der Beziehung (Nr. 2) ohne weiteres; muß die trigonometrische Lösung angewendet werden, so ist

$$\sin\varphi + \sin(60^0 - \varphi) - \sin(60^0 + \varphi) = \sin\varphi - 2\cos 60^0 \sin\varphi = 0 \quad .$$

§ 25. Biquadratische Gleichungen.

1. Jede geordnete Gleichung vierten Grades mit einer Unbekannten hat die Form

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

und kann durch Division mit A auf die Normalform

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

gebracht werden. Ist $d = 0$, so hat man, entsprechend wie bei den Gleichungen zweiten und dritten Grades, zunächst die Wurzel $x = 0$, und außerdem ist die kubische Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

aufzulösen. Sind a, b und c gleichzeitig gleich Null, so hat man die rein biquadratische Gleichung

$$x^4 + d = 0 \quad .$$

Je nachdem d negativ oder positiv ist, läßt sich diese Gleichung schreiben:

$$x^4 \mp a^4 = 0 \quad .$$

Nun läßt sich jedenfalls durch zweimaliges Ausziehen der Quadratwurzel aus dem absoluten Werte von d ein Wert von a bestimmen. Hiernach sind in

$$x = a \cdot \sqrt[4]{\pm 1}$$

vier Wurzelwerte für x enthalten, wenn man für $\sqrt[4]{\pm 1}$ die in § 21 Nr. 1 und 2 berechneten Werte setzt.

Ist $a = 0$, so ist die Gleichung reduziert. Eine vollständige biquadratische Gleichung läßt sich mittels der Substitution $x = y + a$ und geeignete Bestimmung von a durch eine reduzierte ersetzen. Es ergibt sich hierbei $a = -\frac{1}{4}a$.

Wir dürfen daher im folgenden voraussetzen, daß die aufzulösende Gleichung reduziert und für sie die Form

$$1) \qquad x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

annehmen.

Setzt man

$$2) \qquad x = u + v + w \quad ,$$

so wird

$$x^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + uw + vw) \quad ,$$

$$[x^2 - (u^2 + v^2 + w^2)]^2 = 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) + 8uvw(u + v + w) \quad ,$$

woraus man durch weitere Entwicklung

$$x^4 - 2(u^2 + v^2 + w^2)x^2 - 8uvw \cdot x + [(u^2 + v^2 + w^2)^2 - 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2)] = 0$$

erhält. Diese Gleichung wird mit 1) identisch, wenn man

$$4(u^2 + v^2 + w^2) = -2p \quad ,$$
$$8uvw = -q \quad ,$$
$$16(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) = p^2 - 4r$$

setzt. Man hat also aus diesen drei Gleichungen die Werte von u, v, w zu bestimmen, um mittels 2) x finden zu können. Setzt man zur Abkürzung

$$4u^2 = z_1 \ , \quad 4v^2 = z_2 \ , \quad 4w^2 = z_3 \quad ,$$

so gehen die vorstehenden Gleichungen über in

$$z_1 + z_2 + z_3 = -2p \quad ,$$
$$z_1 z_2 z_3 = +q^2 \quad ,$$
$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = p^2 - 4r \quad ,$$

und aus dem in § 24 Nr. 4 angegebenen Satze folgt, daß z_1, z_2, z_3 die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$3) \qquad z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0$$

sind. Damit ist die Auflösung der biquadratischen Gleichung auf die Auflösung einer kubischen Gleichung zurückgeführt. Man nennt daher die Gleichung 3) die Resolvente der biquadratischen Gleichung. Hat man durch Auflösung dieser Resolvente die Wurzeln z_1, z_2, z_3 gefunden, so ergibt sich

$$u = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{z_1}, \quad v = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{z_2}, \quad w = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{z_3} \quad .$$

Da man jeden der beiden Werte von u mit jedem der Werte von v und von w kombinieren kann, so erhält man aus 2) anscheinend acht verschiedene Werte von x. Zufolge der Bedingung $8uvw = -q$ verringert sich jedoch diese Zahl auf vier, wie folgende Untersuchung zeigt:

Die drei Wurzeln z_1, z_2, z_3 der Gleichung 3) sind entweder sämtlich reell, oder eine ist reell und die beiden andern sind konjugiert komplex. Die letzteren haben dann die Formen

$$z_2 = \xi + \eta i, \quad z_3 = \xi - \eta i$$

und ihr Produkt $z_2 z_3 = \xi^2 + \eta^2$ ist stets positiv. Da nun $z_1 z_2 z_3 = q^2$ immer positiv sein muß, so folgt, daß unter allen Umständen eine der Wurzeln der Gleichung 3) reell und positiv ist. Als diese Wurzel möge die mit z_1 bezeichnete angenommen werden.

Sind nun alle drei Wurzeln reell, so sind z_2 und z_3 entweder beide positiv, oder beide negativ. Die Betrachtung der hiernach möglichen Fälle ergibt nun folgendes:

a) Sind z_2 und z_3 positiv, so folgt aus $8uvw = -q$, daß für positives q unter den Größen u, v, w entweder zwei positiv und eine negativ, oder daß alle drei negativ sein müssen, und daß daher nur die vier Kombinationen

$$4) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \tfrac{1}{2}(+\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}) \\ x_2 = \tfrac{1}{2}(+\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}) \\ x_3 = \tfrac{1}{2}(-\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}) \\ x_4 = \tfrac{1}{2}(-\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} z_2 > 0 \ , \ z_3 > 0 \\ q > 0 \end{array}$$

statthaft sind. Ist dagegen q negativ, so hat das Produkt uvw entweder einen positiven und zwei negative oder drei positive Faktoren, und man erhält:

$$5)\quad \left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2}\left(+\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}\right) \\ x_2 = \frac{1}{2}\left(+\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3}\right) \\ x_3 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3}\right) \\ x_4 + \frac{1}{2}\left(-\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}\right) \end{array}\right\} \begin{array}{l} z_2>0\,,\ z_3>0 \\ q<0 \end{array}$$

b) Sind z_2 und z_3 negativ, so kann man

$$v = \pm\tfrac{1}{2}\,i\sqrt{\zeta_2}\,,\quad w = \pm\tfrac{1}{2}\,i\sqrt{\zeta_3}$$

setzen, und es wird dann

$$8\,uvw = \pm\sqrt{z_1\,\zeta_2\,\zeta_3}\cdot i^2 = \mp\sqrt{z_1\,\zeta_2\,\zeta_3}\quad .$$

Es erhält also dieses Produkt das entgegengesetzte Vorzeichen, wie vorhin, und man hat daher für positives q die Formeln 5), für negatives die Formeln 4) zu nehmen; es gelten also 4) auch für

$$z_2<0\,,\quad z_3<0\,,\quad q<0\,,\quad \text{und 5) für } z_2<0\,,\quad z_3<0\,,\quad q>0\quad .$$

c) Sind endlich z_2 und z_3 konjugiert komplex, so hat man

$$8\,uvw = \pm\sqrt{z_1\,(\xi+\eta\,i)\,(\xi-\eta\,i)} = \pm\sqrt{z_1\,(\xi^2+\eta^2)}\quad ,$$

und hiernach hat das Produkt $8\,uvw$ dasselbe Vorzeichen, als wenn z_2 und z_3 positiv reell wären; es gelten also in diesem Falle dieselben Formeln wie unter a).

2. Aus der vorstehenden Untersuchung geht noch hervor, daß alle vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung reell sind, wenn die Wurzeln der kubischen Resolvente sämtlich reell sind. Sind dagegen z_2 und z_3 negativ, also im obigen Falle b), so erhält man, wenn $z_2 = z_3$ ist, zwei einander gleiche reelle und zwei konjugiert komplexe Wurzeln, andernfalls sind die vier Wurzeln paarweis konjugiert komplex. Sind endlich z_2 und z_3, wie im Falle c), konjugiert komplex, so kann man, da

$$(a \pm b\,i)^2 = a^2 - b^2 \pm 2\,a\,b\,i\ .$$

ist, wenn man $a^2 - b^2 = \xi$, $2\,a\,b = \eta$ setzt und diese Gleichungen auf a und b auflöst,

$$\sqrt{\xi \pm \eta\,i} = \sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\xi}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi}{2}}$$

setzen, und die Anwendung dieser Umformung auf die betreffenden Auflösungsformeln ergibt in diesem Falle zwei reelle und zwei konjugiert komplexe Wurzeln.

Es sei beispielsweise die Gleichung

$$x^4 - 7\,x^2 - 12\,x + 18 = 0$$

aufzulösen, so ist $p = -7$, $q = -12$, $r = +18$, also die Resolvente:

$$z^3 - 14\,z^2 - 23\,z - 144 = 0\quad ,$$

deren Auflösung ergibt

$$z_1 = 16\,,\quad z_2 = -1 + i\sqrt{8}\,,\quad z_3 = -1 - i\sqrt{8}\quad .$$

Da hier $\xi = -1$, $\eta = \sqrt{8}$ ist, so ergeben die vorstehenden Formeln

$$\sqrt{z_2} = 1 + i\sqrt{2}\,,\quad \sqrt{z_3} = 1 - i\sqrt{2}$$

und da q negativ ist, so sind weiterhin die Formeln 5) anzuwenden, und man erhält

$$x_1 = \tfrac{1}{2}(+4+1+i\sqrt{2}+1-i\sqrt{2}) = +3$$
$$x_2 = \tfrac{1}{2}(+4-1-i\sqrt{2}-1+i\sqrt{2}) = +1$$
$$x_3 = \tfrac{1}{2}(-4+1+i\sqrt{2}-1+i\sqrt{2}) = -2+i\sqrt{2}$$
$$x_4 = \tfrac{1}{2}(-4-1-i\sqrt{2}+1-i\sqrt{2}) = -2-i\sqrt{2}$$

3. Die im vorstehenden entwickelte Methode der Auflösung biquadratischer Gleichungen heißt die Eulersche oder Cartesiussche. Man hat noch verschiedene andre Methoden, unter denen die von Ampère besonders bemerkenswert ist. Man kann ihre Schlußformeln aus den obigen Eulerschen ableiten, indem man z_2 und z_3 durch z_1 ausdrückt, wobei z_1 wieder die positive Wurzel der Resolvente bezeichnen soll. Löst man nämlich die im vorhergehenden abgeleiteten Gleichungen

$$z_2 + z_3 = -2p - z_1 \quad ,$$
$$\pm 2\sqrt{z_2 z_3} = \frac{2q}{\sqrt{z_1}}$$

wobei $\sqrt{z_1}$ im absoluten Sinn und demnach links das Zeichen $+$ oder $-$ gewählt werden soll, je nachdem q positiv oder negativ ist, auf $\sqrt{z_2}$ und $\sqrt{z_3}$ auf, so erhält man bei positivem q

$$\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3} = \sqrt{-2p - z_1 + \frac{2q}{\sqrt{z_1}}} \quad ,$$
$$\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3} = \sqrt{-2p - z_1 - \frac{2q}{\sqrt{z_1}}} \quad ;$$

dagegen bei negativem q

$$\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3} = \sqrt{-2p - z_1 - \frac{2q}{\sqrt{z_1}}} \quad ,$$
$$\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3} = \sqrt{-2p - z_1 + \frac{2q}{\sqrt{z_1}}} \quad .$$

Setzt man das erste dieser Paare von Werten in die Formelgruppe 4), das zweite in 5) ein, so werden beide Gruppen identisch. Man gewinnt also den Vorteil, daß die Unterscheidung positiver und negativer q nicht mehr nötig ist und daß man nur die eine positive Wurzel der Resolvente zu berechnen braucht. Man hat so für alle Fälle, wenn man zur Abkürzung

$$\sqrt{z_1} = y$$

setzt, die Formeln:

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left\{y \pm \sqrt{-y^2 - 2\left(p + \frac{q}{y}\right)}\right\}$$
$$\left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2}\left\{y \mp \sqrt{-y^2 - 2\left(p - \frac{q}{y}\right)}\right\}$$

Für das obige Beispiel hat man hiernach, da $y = 4$ war,

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left(4 \pm \sqrt{4}\right) = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{matrix} +3 \\ +1 \end{matrix}$$
$$\left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2}\left(4 \mp i\sqrt{8}\right) = -2 \pm i\sqrt{2} \quad .$$

4. Eine Gleichung, die die vier Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 hat, ist die biquadratische

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0 \quad .$$

Entwickelt man die linke Seite und vergleicht sie mit der Normalform

$$x^4 + a x^3 + b x^2 + c x + d = 0 \quad ,$$

so ergeben sich die Beziehungen der Wurzeln zu den Koeffizienten:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= -a \quad , \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 &= b \quad , \\ x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 &= -c \quad , \\ x_1 x_2 x_3 x_4 &= d \quad . \end{aligned}$$

§ 26. Gleichungen höheren Grades.

1. Der Ausdruck

1) $$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \quad ,$$

worin n eine natürliche Zahl, a_1, $a_2 \ldots a_n$ beliebige, im allgemeinen komplexe, Zahlen sind, heißt eine ganze Funktion n-ten Grades der Variabeln x. Setzt man für x eine beliebige Zahl a, so daß

$$f(a) = a^n + a_1 a^{n-1} + a_2 a^{n-2} + \ldots + a_{n-1} a + a_n$$

wird, so ist

$$f(x) - f(a) = (x^n - a^n) + a_1 (x^{n-1} - a^{n-1}) + \ldots + a_{n-1}(x - a)$$

durch $x - a$ ohne Rest teilbar und

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ist eine ganze Funktion n — 1-ten Grades von x.

Es ist von GAUSS bewiesen worden, daß ein Wert der Variabeln x existieren muß, für den $f(x) = 0$ wird. Es gibt daher eine Wurzel der algebraischen Gleichung n-ten Grades mit der Unbekannten x:

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad .$$

Ist diese Wurzel x_1, so ist $f(x_1) = 0$ eine Identität und

$$\frac{f(x)}{x - x_1} = \varphi(x)$$

ist eine ganze Funktion n — 1-ten Grades der Variabeln x. Dann muß es einen zweiten Wert x_2 von x geben, für den $\varphi(x)$ verschwindet oder x_2 ist eine Wurzel der Gleichung n — 1-ten Grades $\varphi(x) = 0$. Da nun

$$f(x) = (x - x_1)\varphi(x)$$

gesetzt werden kann, so muß auch $f(x)$ verschwinden für $x = x_2$ oder x_2 ist eine zweite Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$.

Durch weitere Verfolgung dieses Gedankenganges erhält man den Fundamentalsatz der Algebra:

Eine algebraische Gleichung n-ten Grades mit einer Unbekannten hat n Wurzeln.

Sind diese Wurzeln x_1, $x_2 \ldots x_n$, so folgt, daß sich eine ganze Funktion n-ten Grades der Variabeln x in ein Produkt von n linearen Faktoren zerlegen lassen muß, daß also die Identität besteht:

2) $$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n) \quad .$$

Führt man das Produkt aus, indem man es nach fallenden Potenzen von x ordnet und vergleicht die Koeffizienten gleich hoher Potenzen mit der gegebenen Form 1) von $f(x)$, so erhält man Beziehungen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung zu ihren Koeffizienten. Bezeichnet man die Summe aller Wurzeln mit $[x_1]$, die Summe der Produkte von je zwei, drei u. s. f. durch $[x_1 x_2]$, $[x_1 x_2 x_3] \ldots$, so kann man diese Beziehungen ausdrücken:

$$[x_1] = -a_1 , \quad [x_1 x_2] = a_2 , \quad [x_1 x_2 x_3] = -a_3 ,$$
$$\ldots [x_1 x_2 x_3 \ldots x_n] = (-1)^n a_n ,$$

oder allgemein:

$$[x_1 x_2 x_3 \ldots x_k] = (-1)^k a_k , \quad k = 1, 2, 3, \ldots n .$$

Insbesondere ist das Produkt aller Wurzeln gleich dem Absolutglied mit demselben oder entgegengesetzten Zeichen, je nachdem die Gleichung von geradem oder ungeradem Grade ist.

Von diesen Beziehungen sind die für die Wurzeln der Gleichungen zweiten (§ 20 Nr. 3), dritten (§ 24 Nr. 4), vierten Grades (§ 25 Nr. 4) angegebenen, besondere Fälle.

Sind die Koeffizienten a der algebraischen Gleichung sämtlich reell, so müssen die komplexen Wurzeln paarweis konjugiert vorkommen. Ist z. B. eine Wurzel

$$x_1 = p + q i ,$$

so muß eine zweite Wurzel

$$x_2 = p - q i$$

existieren, damit das Produkt

$$(x - x_1)(x - x_2) = (x - p - q i)(x - p + q i) = (x - p)^2 + q^2$$

in reeller Form erscheint. Daraus folgt, daß eine Gleichung ungeraden Grades mindestens eine reelle Wurzel hat und daß eine Gleichung geraden Grades, die eine reelle Wurzel besitzt, jedenfalls eine zweite reelle Wurzel haben muß.

2. Ein allgemeines Verfahren zur Auflösung einer Gleichung n-ten Grades kann zunächst nur in dem Fall gegeben werden, daß sämtliche Koeffizienten mit Ausnahme des Absolutgliedes verschwinden. Da dieses komplex sein kann, so hat man dann die Gleichung

$$x^n - (a + b i) = 0 ,$$

eine binomische Gleichung (reine Gleichung n-ten Grades).

Setzt man $a = r \cos\varphi$, $b = r \sin\varphi$, so kann man die komplexe Zahl

$$a + b i = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

setzen, wobei $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, d. i. der absolute Wert der Quadratwurzel aus der Norm von $a + b i$, der Modulus dieser komplexen Zahl heißt. Der Winkel φ, das Argument ist unzweideutig bestimmt aus

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} , \quad \sin\varphi = \frac{b}{r} , \quad \tan\varphi = \frac{b}{a} ,$$

wenn man a und b mit ihrem Vorzeichen und r absolut nimmt.

Die konjugierte Zahl ist dann

$$a - b i = r(\cos\varphi - i \sin\varphi) .$$

Nun ist

$$(\cos\varphi + i \sin\varphi)(\cos\psi + i \sin\psi) = \cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi) ,$$

mithin für $\varphi = \psi$

$$(\cos\varphi + i \sin\varphi)^2 = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi .$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel ergibt sich, wenn n eine natürliche Zahl bedeutet:

$$(\cos\varphi + i \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi ,$$

die den Satz von Moivre ausdrückt. Umgekehrt ergibt sich:

$$\sqrt[n]{\cos n\varphi + i \sin n\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad ,$$

oder wenn man φ für $n\varphi$, also $\varphi : n$ für φ setzt:

$$\sqrt[n]{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n} \quad .$$

Die linke Seite dieser Gleichung ändert sich nicht, wenn man φ um ein Vielfaches von 360^0 oder in Bogenmaß von 2π vermehrt. Es ist also, wenn k eine natürliche Zahl bedeutet

$$\sqrt[n]{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2\frac{k}{n}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + 2\frac{k}{n}\pi\right) \quad .$$

Legt man der Zahl k die Werte $0, 1, 2 \ldots n-1$ bei, so erhält man n verschiedene komplexe Zahlen; für irgend welche andre Werte von k kommt man immer auf diese n Zahlen zurück. Daher sind die Wurzeln der binomischen Gleichung oder die Werte von $\sqrt[n]{a+bi}$ die n komplexen Zahlen:

$$\sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2\frac{k}{n}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + 2\frac{k}{n}\pi\right)\right] \quad ,$$

$$k = 0, 1, 2 \ldots n-1 \quad ,$$

wobei $\sqrt[n]{r}$ der absolute Wert der arithmetischen n-ten Wurzel aus der reellen positiven Zahl r ist. Die n-te Wurzel aus einer Zahl hat also n verschiedene Werte. Insbesondere ist:

$$\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos 2\frac{k}{n}\pi + i\sin 2\frac{k}{n}\pi, \quad k = 0, 1, 2 \ldots n-1 \quad ;$$

$$\sqrt[n]{-1} = \sqrt[n]{\cos\pi + i\sin\pi} = \cos\frac{2k+1}{n}\pi + i\sin\frac{2k+1}{n}\pi, \quad k = 0, 1, 2 \ldots n-1 \, .$$

Berechnet man hiernach $\sqrt[n]{1}$ und $\sqrt[n]{-1}$ für $n = 3, 4, 5$, so kommt man auf die in § 21 gefundenen Werte zurück.

Man kann den vorstehenden Satz auch anwenden, um die Lösung einer kubischen Gleichung für den irreducibeln Fall (§ 24 Nr. 3) aus der Cardan ischen Formel (§ 24 Nr. 3) herzuleiten. Da

$$\sqrt[n]{a+bi} + \sqrt[n]{a-bi}$$

reell sein muß, so sieht man, daß die kubische Gleichung in dem irreducibeln Fall drei reelle Wurzeln hat.

3. Es ist von Abel bewiesen worden, daß es unmöglich ist, die Lösung einer allgemeinen Gleichung von höheren als dem vierten Grade auf die Lösung von Gleichungen niederer Grade (Resolventen) und binomischer Gleichungen zurückzuführen. Die eigentliche algebraische Auflösung ist überhaupt nur bei linearen oder quadratischen Gleichungen mit reellen Koeffizienten möglich. Bei Anwendung der Gleichungen zur Bestimmung von Unbekannten hat man es nur mit numerischen Gleichungen, in denen die reellen Koeffizienten gemeine Zahlen sind, zu tun. Die Auflösung solcher Gleichungen ist bis zu jeder verlangten Genauigkeit möglich, wenn es sich um die Bestimmung der reellen Wurzeln handelt. Das Verfahren, das zur Feststellung der reellen Wurzeln bis zu einem gewissen Grade der Genauigkeit führt, wendet man zweckmäßig schon bei kubischen und biquadratischen numerischen Gleichungen an, auf die geometrische oder physikalische Aufgaben führen. Die in §§ 24, 25 angegebenen allgemeinen Methoden

der Lösung sind, wenn es sich nicht um zurecht gemachte Übungsbeispiele handelt, bei nicht ganz bequemen Werten der Koeffizienten, mühsam und weitläufig.

Sind die Koeffizienten der numerischen Gleichung

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

ganze Zahlen und hat die Gleichung eine reelle und rationale Wurzel, so kann diese nur eine ganze Zahl sein. Denn nimmt man an, die rationale Wurzel sei $x = p : q$, wobei p und q ganze Zahlen und relativ prim zueinander sind, so müßte

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + a_2\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\cdot\frac{p}{q} + a_n \quad ,$$

also

$$q^{n-1}\cdot f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p^n}{q} + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} q + \ldots + a_{n-1} p\, q^{n-2} + a_n q^{n-1} = 0$$

eine Identität sein, was nicht möglich ist, da $p^n : q$ keine ganze Zahl ist.

Nun ist nach Nr. 1 der absolute Wert des Produkts aller Wurzeln der Gleichung gleich dem absoluten Wert des Absolutglieds. Hat also eine Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten eine rationale Wurzel, so kann diese nur ein Teiler des Absolutglieds sein. Hiernach ist eine ganzzahlige Wurzel einer solchen Gleichung durch Probieren zu bestimmen. Ist sie gefunden, so erhält man durch Abtrennung der Wurzel eine Gleichung, deren Grad um 1 niedriger ist und von der wieder, wenn möglich, eine ganzzahlige Wurzel zu bestimmen ist.

Beispiele:

1. Die Gleichung

$$x^3 + x^2 - 47x + 30 = 0$$

könnte als rationale Wurzeln die Teiler von 30: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 haben. Da das negative Glied $-47x$ überwiegt, sieht man sofort, daß 1, 2, 3 nicht genügen können. Die weitere Probe gibt die Wurzel $x_1 = 6$. Die Abtrennung dieser Wurzel führt auf die quadratische Gleichung

$$x^2 + 7x - 5 = 0 \quad .$$

2. Die Gleichung

$$x^4 + 12x^3 + 55x^2 + 124x + 120 = 0$$

kann keine positive ganzzahlige Wurzel haben; eine ganzzahlige Wurzel müßte ein negativer Teiler von 120 sein. Schreibt man die Gleichung

$$x^4 + 55x^2 + 120 = -12x^3 - 124x \quad ,$$

so werden beide Seiten für eine negative Wurzel positiv. Man sieht nun, daß von den vielen Teilern der Zahl 120 einer mit größerem Wert nicht genügen kann. Beginnt man die Probe mit -1, $-2 \ldots$, so findet man die Wurzel $x_1 = -3$. Durch Abtrennung dieser Wurzel ergibt sich die kubische Gleichung

$$x^3 + 9x^2 + 28x + 40 = 0 \quad ,$$

die ebenso behandelt die Wurzel $x_2 = -5$ liefert.

Sind die rationalen Koeffizienten einer numerischen Gleichung nicht sämtlich ganze Zahlen, so kann man durch Einführung einer neuen Unbekannten für diese eine Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten erhalten und diese nach dem vorigen behandeln. Z. B. die Gleichung

$$36x^3 - 48x^2 + 19x - 2 = 0\,, \quad x^3 - \tfrac{4}{3}x + \tfrac{19}{36}x - \tfrac{1}{18} = 0$$

läßt sich durch die Substitution

$$x = \tfrac{1}{6}y$$

in die Gleichung für y mit ganzzahligen Koeffizienten

$$y^3 - 8y^2 + 19y - 12 = 0$$

verwandeln, die die Wurzel $y_1 = 3$ hat; folglich ist $x_1 = \frac{1}{2}$ eine Wurzel der gegebenen Gleichung.

Hiernach kann man annehmen, daß von einer numerischen Gleichung die etwa vorhandenen ganzzahligen Wurzeln abgetrennt sind. Hat dann die Gleichung noch andre reelle Wurzeln, so müssen diese irrational sein. Es kann sich also nur noch darum handeln, die reellen irrationalen Wurzeln einer numerischen Gleichung mit beliebigen Koeffizienten zu bestimmen.

4. Läßt man in der ganzen Funktion mit reellen Koeffizienten

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

die Variable x um h wachsen, so ist nach Nr. 1

$$f(x + h) - f(x) = h\varphi(x) \quad ,$$

wobei $\varphi(x)$ eine ganze Funktion vom $n - 1$-ten Grade ist. Hiernach kann man, wenn man h klein genug wählt, $f(x + h) - f(x)$ beliebig klein machen. Folglich kann man sagen, daß sich $f(x)$ mit stetiger Änderung der Variabeln ebenfalls stetig ändert. Ergibt sich also, daß für zwei Werte $x = a$ und $x = b$, $f(a)$ und $f(b)$ Werte von verschiedenen Vorzeichen erhalten, so muß, wenn man x von a bis b sich stetig ändern läßt, auch $f(x)$ von $f(a)$ bis $f(b)$ sich stetig ändern, also von positiven zu negativen Werten oder umgekehrt durch Null hindurchgehen. Daraus ergibt sich der Satz:

Erhält die ganze Funktion $f(x)$ für die Werte $x = a$ und $x = b$, Werte von entgegengesetzten Vorzeichen, so liegt zwischen a und b eine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$.

Auf Grund dieses Satzes kann man eine reelle Wurzel einer numerischen Gleichung in immer engere Grenzen einschließen. Man bestimmt zunächst zwei aufeinander folgende ganze Zahlen, zwischen denen die Wurzel liegt, dann zwei Zahlen, die sich um 0,1, 0,01 ... unterscheiden und von denen eine größer, die andre kleiner als die Wurzel ist, bis man diese mit der verlangten Genauigkeit bestimmt hat.

Die Begrenzung einer Wurzel wird erleichtert durch folgende Betrachtung. Hat man die beiden Grenzen a und b, zwischen denen die reelle Wurzel liegt, so nahe aneinander gebracht, daß der Unterschied $a - b$ sehr klein ist, so kann man annehmen, daß $f(a) - f(b)$ diesem Unterschied nahe proportional ist (Interpolationsverfahren) oder daß

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

nahezu konstant ist. Liegt nun zwischen a und b die Wurzel

$$x = a - h \quad ,$$

wobei h die Verbesserung ist, die man an dem Wert a anzubringen hat, um die Wurzel genau zu erhalten, so ist auch nahezu

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{f(a) - f(x)}{a - x}$$

oder da $f(x) = 0$ sein soll und $a - x = h$ ist

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{f(a)}{h} \quad ,$$

woraus

$$h = \frac{(a - b)f(a)}{f(a) - f(b)} \quad .$$

Durch Anwendung dieser regula falsi erhält man rasch immer genauere Werte der reellen Wurzel.

Auf diesem Wege erhält man auch Wurzeln von transcendenten numerischen Gleichungen.

5. Zur Auflösung numerischer algebraischer Gleichungen ist meist am bequemsten die Methode von NEWTON. Ist x_1 ein Näherungswert einer reellen Wurzel der Gleichung

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad ,$$

der nach dem vorigen Verfahren bestimmt ist, so wird der genaue Wert

$$x = x_1 + h$$

sein, wobei h die anzubringende Verbesserung ist. Dann muß

$$f(x_1 + h) = (x_1 + h)^n + a_1(x_1 + h)^{n-1} + a_2 (x_1 + h)^{n-2} + \ldots + a_{n-1}(x_1 + h) + a_n = 0$$

sein, während

$$f(x_1) = x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + a_2 x_1^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x_1 + a_n$$

noch etwas verschieden von Null ist. Entwickelt man die Potenzen von $x_1 + h$ nach dem binomischen Satze (§ 31), vernachlässigt aber wegen der Kleinheit von h die Potenzen von h, die höher als die erste sind, so ist angenähert

$$f(x_1 + h) - f(x_1) = h f'(x_1) \quad ,$$

wobei

$$f'(x_1) = n x_1^{n-1} + a_1 (n-1) x_1^{n-2} + a_2 (n-2) x_1^{n-3} + \ldots + a_{n-2} \cdot 2 x_1 + a_{n-1}$$

eine nach leicht erkennbarem Gesetz aus $f(x_1)$ abzuleitende ganze Funktion ist. Daraus ergibt sich

$$h = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \quad x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad .$$

Dieser Wert von x wird nun noch nicht der bis zur erforderlichen Genauigkeit genügende Wert der Wurzel, sondern ein zweiter Näherungswert x_2 sein, aus dem durch dasselbe Verfahren ein dritter u. s. f. gefunden werden kann.

Beispiel: Die Gleichung

$$x^3 - 4x + 1 = 0$$

hat eine Wurzel zwischen 1 und 2, näher an 2. Setzt man daher

$$x = 2 + h \quad ,$$

so erhält man, da

$$f(x) = x^3 - 4x + 1 \, , \quad f'(x) = 3x^2 - 4$$

ist,

$$h = -\frac{f(2)}{f'(2)} = -\tfrac{1}{8} \quad .$$

Damit erhält man genauer

$$x = 1{,}875 \, , \quad f(1{,}875) = 0{,}0917 \, , \quad f'(1{,}875) = 6{,}5468 \, , \quad h = -0{,}01401 \quad ,$$

$$x = 1{,}86099 \, , \quad f(1{,}86099) = 0{,}00134 \, , \quad f'(1{,}86099) = 6{,}3900 \, , \quad h = -0{,}00021 \, ,$$

$$x = 1{,}86078 \, , \quad f(1{,}86078) = 0 \quad ,$$

womit die reelle Wurzel bis auf fünf Dezimalen genau bestimmt ist.

§ 27. Maxima und Minima.

1. Nach § 26 Nr. 4 ändert sich die ganze Funktion $f(x)$ stetig, wenn sich x stetig ändert. Denkt man sich der Variabeln x alle möglichen reellen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ in stetiger Reihenfolge beigelegt, so nimmt $f(x)$ alle möglichen reellen Werte an. Dabei ändert sich also x immer in demselben Sinne: es wächst beständig. Es ist aber nicht notwendig, daß auch $f(x)$ sich immer in demselben Sinne ändert, also immer wächst oder immer abnimmt. Gibt es nun einen Wert von x, für den $f(x)$ aus dem Wachsen stetig ins Abnehmen übergeht, so nennt man den zugehörigen Wert von $f(x)$ ein **Maximum**; geht $f(x)$ für einen gewissen Wert von x aus dem Abnehmen ins Wachsen über, so nennt man den zugehörigen Wert von $f(x)$ ein **Minimum**.

Z. B. die Funktion

$$f(x) = x^2 + a^2$$

nimmt ab, wenn x stetig die Werte von $-\infty$ bis 0 annimmt, läßt man x nun weiter wachsen von 0 bis $+\infty$, so wächst $f(x)$. Bei $x = 0$ geht also $f(x)$ aus dem Abnehmen ins Wachsen über und der Wert $x = 0$ entspricht dem Minimum der Funktion $f(x)$, dessen Wert a^2 ist.

Dagegen hat die Funktion

$$f(x) = a^2 - x^2$$

ein Maximum für $x = 0$ und der Maximalwert von $f(x)$ ist a^2.

Haben zwei Zahlen x und y die Summe s, so ist

$$4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2 = s^2 - (x-y)^2 \quad .$$

Hiernach ist $4xy$, also auch xy, eine ganze Funktion von $x - y$ und man sieht, daß xy ein Maximum wird für $x - y = 0$, also $x = y = \frac{1}{2}s$. Haben zwei Zahlen eine konstante Summe, so ist ihr Produkt ein Maximum, wenn die Zahlen einander gleich sind.

Von allen Rechtecken gleichen Umfangs hat also das Quadrat den größten Inhalt.

Haben dagegen zwei Zahlen x und y das Produkt p, so ist

$$(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4p \quad .$$

$(x+y)^2$, also auch $x+y$, wird also ein Minimum für $x - y = 0$, d. h. $x = y = \sqrt{p}$. Haben zwei Zahlen ein konstantes Produkt, so ist ihre Summe ein Minimum, wenn die Zahlen einander gleich sind.

Von allen Rechtecken gleichen Inhalts hat daher das Quadrat den kleinsten Umfang.

Ist in der quadratischen Funktion

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$a > 0$, so kann man schreiben

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \quad :$$

für

$$x + \frac{b}{2a} = 0\,, \quad x = -\frac{b}{2a}$$

wird $f(x)$ ein Minimum, dessen Wert ist:

$$c - \frac{b^2}{4a} \quad .$$

Ist in der quadratischen Funktion

$$f(x) = -ax^2 + bx + c$$

wieder $a > 0$, so kann man umformen:

$$f(x) = c + \frac{b^2}{4a} - a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 .$$

Hier erhält man für

$$x - \frac{b}{2a} = 0 , \qquad x = \frac{b}{2a}$$

das Maximum von $f(x)$, dessen Wert ist:

$$c + \frac{b^2}{4a} .$$

2. Läßt man in der ganzen Funktion n-ten Grades

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

die Variable x um h wachsen, so ist nach § 26 Nr. 5, wenn h sehr klein ist, näherungsweise

$$f(x + h) - f(x) = h f'(x) ,$$

wobei

$$f'(x) + n x^{n-1} + a_1 (n - 1) x^{n-2} + \ldots + a_{n-2} \cdot 2 x + a_{n-1}$$

ist. $f'(x)$ ist eine ganze Funktion $n - 1$-ten Grades, die man die abgeleitete Funktion nennt. Aus dem Gliede

$$a_k x^{n-k}$$

ergibt sich das entsprechende Glied der abgeleiteten Funktion:

$$a_k (n - k) x^{n-k-1} .$$

Wenn nun $f(x)$ in dem sehr kleinen Intervall von x bis $x + h$ immer wächst, so wird $f'(x)$ positiv sein, wenn $f(x)$ in demselben Intervall immer abnimmt, so ist $f'(x)$ negativ. Geht dagegen in dem Intervall von x bis $x + h$ die Funktion $f(x)$ aus dem Wachsen ins Abnehmen oder aus dem Abnehmen ins Wachsen über, so wird $f'(x)$ aus dem Positiven ins Negative oder umgekehrt über-, also jedenfalls durch Null hindurchgehen. An der Stelle des Übergangs muß daher $f'(x) = 0$ sein. Die Funktion $f(x)$ wird mithin ein Maximum oder Minimum sein für den Wert von x, für den $f'(x) = 0$ ist.

Da $f'(x)$ eine ganze Funktion $n - 1$-ten Grades ist, so kann man von ihr wieder die abgeleitete Funktion $f''(x)$, die zweite abgeleitete Funktion von $f(x)$ bilden nach demselben Verfahren, so daß

$$f''(x) = n(n - 1) x^{n-1} + a_1 (n - 1)(n - 2) x^{n-3} + \ldots + a_{n-3} \cdot 3 \cdot 2 + a_{n-1} \cdot 2$$

wird. Es ist dann wieder um so genauer, je kleiner h ist:

$$f'(x + h) - f'(x) = h f''(x) ,$$

und für den Wert von x, für den $f(x)$ ein Maximum oder Minimum erreicht, wo also $f'(x) = 0$ ist, wird:

$$f'(x + h) = h f''(x) .$$

Ist nun $f(x)$ ein Maximum, also $f(x + h) < f(x)$, so geht $f'(x)$ durch Null ins Negative über, es ist also

$$f'(x + h) < 0 , \qquad f''(x) < 0$$

und für den Fall des Minimums, wo $f(x + h) > f(x)$ sein muß, geht $f'(x)$ durch Null ins Positive über, so daß

$$f'(x + h) > 0 , \qquad f''(x) > 0 .$$

Daher erhält man den Satz: Die ganze rationale Funktion $f(x)$ hat für

den Wert der Variabeln x ein Maximum oder Minimum, für den $f'(x) = 0$ und $f''(x) \lesseqgtr 0$ ist.

Es sei z. B.

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1 \quad ,$$

so ist

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 3 \, , \quad f''(x) = 6x - 10 \quad .$$

Die quadratische Gleichung

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 3 = 0$$

hat die Wurzeln

$$x_1 = 3 \, , \quad x_2 = \tfrac{1}{3}$$

und es ist

$$f''(x_1) = 8 \, , \quad f''(x_2) = -8 \quad .$$

Mithin hat $f(x)$ ein Minimum für $x = 8$ und ein Maximum für $x = \frac{1}{3}$ und es sind die Werte von $f(x)$ an der Stelle des Minimums und des Maximums

$$f(x_1) = -8 \, , \quad f(x_2) = 1\tfrac{1}{2}\tfrac{3}{7} \quad .$$

Man hat also den Verlauf der Werte von $f(x)$, wenn man x stetig die Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ beilegt: Die Funktion wächst zunächst von negativ unendlich großen Werten bis $x = \frac{1}{3}$, wo sie ihr Maximum $f(x) = 1\frac{1}{2}\frac{3}{7}$ erreicht, nimmt dann ab bis $x = 3$ und dem Minimum von $f(x) = -8$ und wächst von da bis zu unendlich großen positiven Werten. Da die kubische Gleichung $f(x) = 0$ die leicht zu erratende Wurzel $x = 1$ und außerdem die reellen Wurzeln $x = 2 \pm \sqrt{5}$ hat, so erhält $f(x)$, während x alle reellen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, dreimal, nämlich für $x = -\sqrt{5} + 2$, für $x = 1$ und für $x = \sqrt{5} + 2$ den Wert Null.

3. Den Verlauf der Werte einer Funktion $f(x)$ kann man sich am besten veranschaulichen, wenn man ihn graphisch darstellt. Trägt man nämlich die Werte von x nach einem beliebigen Maßstab auf einer Geraden von einem Nullpunkt aus als Abszissen auf, errichtet im Endpunkt jeder Abszisse eine Senkrechte, die Ordinate, die man gleich dem zu x gehörigen Wert von $f(x)$ macht und verbindet die Endpunkte der Ordinaten durch einen stetigen Zug, so entsteht eine Kurve, die den Verlauf der Funktionswerte um so genauer zeigt, je mehr man Punkte bestimmt hat. Die Stellen, an denen die Ordinaten aus dem Wachsen ins Abnehmen oder umgekehrt übergehen, sind die Maxima oder Minima der Funktion. Die Abszissen der Schnittpunkte der Kurve mit der Abszissenachse sind außerdem die reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$. Denkt man sich zwei sehr nahe liegende Kurvenpunkte, deren Abszissen x und $x + h$ sind, so ist um so genauer, je kleiner h ist

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

die Tangente des Winkels, den die Tangente an zwei in einem Punkt zusammenfallende Kurvenpunkte mit der positiven Richtung der Abszissenachse bildet. An den Stellen der Maxima oder Minima ist also die Tangente der Kurve der Abszissenachse parallel. Solange $f(x)$ wächst, ist dieser Winkel positiv; wenn $f(x)$ abnimmt, wird er negativ. An der Stelle eines Maximums geht die Tangente des Winkels aus positiven Werten durch Null ins Negative, an der Stelle eines Minimums aus negativen durch Null zu positiven Werten über.

Da man jede beliebige sich stetig ändernde Funktion $f(x)$ einer Variabeln x in derselben Weise graphisch darstellen kann und die daran geknüpften Bemerkungen über Maxima und Minima allgemein gelten müssen, so kann man unter der abgeleiteten Funktion den Grenzwert verstehen, der sich

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

bei unendlich abnehmenden h nähert.

Es sei zunächst

$$f(x) = x^n \quad ,$$

wobei n eine beliebige Zahl bedeutet, so ist

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = x^n \frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^n - 1}{h}$$

Nun gilt nach § 37 Nr. 2 die Binomialreihe für jedes Argument, dessen absoluter Wert kleiner als 1 ist. Da nun h als unendlich abnehmend zu denken ist, so ist für jedes beliebige x:

$$\left(1+\frac{h}{x}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{h}{x} + \binom{n}{2} \cdot \left(\frac{h}{x}\right)^2 + \dots \quad ,$$

folglich

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = x^n \left[\frac{n}{x} + \binom{n}{2} \cdot \frac{h}{x^2} + \dots\right] \quad .$$

Geht man also zur Grenze $h = 0$ über, so ist für

$$f(x) = x^n \, , \quad f'(x) = n\,x^{n-1}$$

zu setzen. Z. B. für $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ ist $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$; für $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ist $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ist allgemeiner

$$f(x) = A x^m + B x^n + C x^p + \dots \quad ,$$

worin m, n, p beliebige Exponenten, A, B, $C \dots$ konstante Koeffizienten sind, so bildet man die abgeleitete Funktion nach demselben Gesetze wie bei einer ganzen rationalen Funktion; es wird also

$$f'(x) = A m x^{m-1} + B n x^{n-1} + C p x^{p-1} + \dots$$

Für die trigonometrischen Funktionen eines in Bogenmaß ausgedrückten Winkels x hat man

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} h \cos(x + \frac{1}{2} h)}{h} = \frac{\sin \frac{1}{2} h}{\frac{1}{2} h} \cos(x + \tfrac{1}{2} h) \quad ,$$

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\frac{2 \sin \frac{1}{2} h \sin(x + \frac{1}{2} h)}{h} = -\frac{\sin \frac{1}{2} h}{\frac{1}{2} h} \sin(x + \tfrac{1}{2} h) \quad .$$

Läßt man h bis zu Null abnehmen, so ist der Sinus eines sehr kleinen Winkels um so genauer gleich dem Bogen, je kleiner der Winkel ist, folglich hat man für

$$f(x) = \sin x \, , \quad f'(x) = \cos x \quad ,$$

$$f(x) = \cos x \, , \quad f'(x) = -\sin x \quad ,$$

also auch für

$$f(x) = \sin x \, , \quad f''(x) = -\sin x \quad ,$$

$$f(x) = \cos x \, , \quad f''(x) = -\cos x \quad .$$

Um die abgeleitete Funktion der Exponentialfunktion

$$f(x) = e^x$$

zu finden, hat man

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} \quad .$$

Nun kann man nach § 37 Nr. 3, 7) die Exponentialfunktion für jedes Argument in eine konvergente Reihe entwickeln und es ist

$$\frac{e^h - 1}{h} = 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \cdots ,$$

mithin erhält man beim Übergang zur Grenze $h = 0$ für

$$f(x) = e^x , \quad f'(x) = e^x$$

und daher auch

$$f''(x) = e^x .$$

Ist $f(x) = \mathrm{l}\, x$, der natürliche Logarithmus von x, so ist

$$\frac{\mathrm{l}(x+h) - \mathrm{l}\, x}{h} = \frac{\mathrm{l}\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}$$

und wenn man nach § 37 Nr. 5, 11) entwickelt

$$\mathrm{l}\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{h}{x} - \tfrac{1}{2}\frac{h^2}{x^2} + \cdots ,$$

so ist für $h = 0$:

$$f(x) = \mathrm{l}\, x , \quad f'(x) = \frac{1}{x} , \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} .$$

Für alle diese Funktionen gilt in Beziehung auf das Maximum und Minimum derselbe Satz, der in Nr. 2 für eine ganze rationale Funktion abgeleitet worden ist.

4. Bei Anwendung der Lehre von den Maxima und Minima auf Geometrie und Physik geht häufig aus der Natur der Aufgabe selbst hervor, ob die Funktion ein Maximum oder ein Minimum hat, so daß die Untersuchung ihrer zweiten Ableitung unnötig ist.

1. Wird z. B. in eine Kugel vom Radius r ein gerader Kegel eingeschrieben, so ist dessen Volumen eine Funktion seiner Höhe x. Läßt man x von Null an zunehmen, so nimmt auch das Volumen von Null an zu; später muß es aber wieder abnehmen, denn für $x = 2r$ ist das Volumen wieder Null. Da also das Volumen des Kegels bei einem gewissen x aus dem Wachsen ins Abnehmen übergehen muß, so muß es ein Maximum haben und man kann die Aufgabe stellen: den größten in die Kugel eingeschriebenen Kegel zu bestimmen. Nun ist das Volumen des Kegels allgemein

$$V = \pi x^2 (2r - x) .$$

Es handelt sich also um das Maximum der ganzen rationalen Funktion

$$f(x) = 2rx^2 - x^3 .$$

Es ist demnach

$$f'(x) = 4rx - 3x^2 = 0$$

zu setzen, woraus für die Höhe des größten Kegels

$$x = \tfrac{4}{3} r$$

folgt. Das Volumen dieses größten eingeschriebenen Kegels ist

$$V = \tfrac{8}{81}\pi r^3 = \tfrac{8}{27} \cdot \tfrac{4}{3}\pi r^3 .$$

2. Ebenso gibt es einen, einer Kugel vom Radius r eingeschriebenen, geraden Cylinder mit größtem Mantel. Ist x die Höhe des Cylinders, so ist der Mantel

$$M = 2\pi x \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}x^2} .$$

Die ganze rationale Funktion

$$f(x) = x^2 (r^2 - \tfrac{1}{4} x^2) = r^2 x^2 - \tfrac{1}{4} x^4$$

hat ihr Maximum, wenn

$$f'(x) = 2 r^2 x - x^3 = 0 , \quad x = r\sqrt{2}$$

ist, für welchen Wert sich ergibt:

$$M = 2 \pi r^2 .$$

3. Aus einem Kreise vom Radius r ist der Sektor zu schneiden, der den Mantel eines Kegels von größtem Volumen bildet. Ist ω der Centriwinkel des Sektors, so ist

$$\omega = 360^0 \cdot x ,$$

wenn der Radius der Kegelgrundfläche $r x$ ist; mithin ist das Volumen des Kegels

$$V = \tfrac{1}{3} \pi r^3 x^2 \sqrt{1 - x^2} .$$

Es muß nun für

$$f(x) = x^4 - x^6 , \quad f'(x) = 4 x^3 - 6 x^5 = 0 , \quad x = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

sein. Das Volumen des größten Kegels ist

$$V = \frac{2\sqrt{3}}{27} \pi r^3 .$$

4. Von einem Rechteck mit den Seiten a und b soll an jeder Ecke ein Quadrat weggenommen werden, so daß die übrigbleibende Figur Grundfläche und Seitenflächen eines rechtwinkligen Parallelepipeds vom größten Volumen bildet. Ist x die Seite des Quadrats, so ist das Volumen des Parallelepipeds

$$V = (a - 2 x) (b - 2 x) x .$$

Es muß also

$$12 x^2 - 4 (a + b) x + a b = 0$$

sein. Dem Maximum entspricht, wegen $f''(x) < 0$ die Wurzel dieser quadratischen Gleichung

$$x = \tfrac{1}{6} \left(a + b - \sqrt{a^2 - a b + b^2}\right) .$$

5. Um eine Kugel vom Radius r ist der gerade Kegel vom kleinsten Volumen zu beschreiben. Ist x die Höhe des Kegels, so ist das Volumen

$$V = \pi r^2 \cdot \frac{x^2}{x - 2 r} .$$

Setzt man $x - 2 r = y$, $x = y + 2 r$, so ist

$$\frac{x^2}{x - 2 r} = y + 4 r + \frac{4 r^2}{y} .$$

Man hat also das Minimum von

$$f(y) = y + 4 r + \frac{4 r^2}{y}$$

zu bestimmen. Es ergibt sich aus

$$f'(y) = 1 - \frac{4 r^2}{y^2} , \quad y = 2 r , \quad x = 4 r , \quad V = 8 \pi r^3 .$$

6. Wie weit muß ein leuchtender Punkt L von einer Ebene entfernt sein, wenn der Punkt P der Ebene, der von dem Fußpunkt O der von L auf die Ebene gefällten Senkrechten den Abstand a hat, am stärksten beleuchtet sein

soll? Ist k die Intensität der Beleuchtung in der Entfernung 1 durch senkrecht auf ein Flächenelement fallende Lichtstrahlen, so ist die Intensität für das Flächenelement P:

$$I = k \cdot \frac{x}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}} \quad .$$

Setzt man

$$a^2 + x^2 = y \,, \quad x = \sqrt{y - a^2} \quad ,$$

so hat man das Maximum von

$$f(y) = \frac{y - a^2}{y^3} = \frac{1}{y^2} - \frac{a^2}{y^3}$$

zu bestimmen. Aus

$$f'(y) = -\frac{2}{y^3} + \frac{3a^2}{y^4} = 0$$

ergibt sich $y = \frac{3}{2} a^2$, $x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$ und das Maximum der Intensität $\frac{4\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{k}{a^2}$.

7. Durch die Ecke C des Dreiecks ABC ist eine Gerade so zu ziehen, daß die Summe der Abstände der Ecken A und B von ihr möglichst groß ist. Bildet die Gerade mit $BC = a$ den Winkel φ, so bildet sie mit der Seite $CA = b$ das Supplement von $\gamma + \varphi$, wenn $\angle BCA = \gamma$ ist. Es ist daher die Summe der Abstände

$$s = f(\varphi) = a \sin\varphi + b \sin(\gamma + \varphi) = (a + b\cos\gamma)\sin\varphi + b \sin\gamma \cos\varphi \quad .$$

Nun ist zu setzen:

$$f'(\varphi) = (a + b\cos\gamma)\cos\varphi - b\sin\gamma\sin\varphi = 0 \,, \quad \tan\varphi = \frac{a + b\cos\gamma}{b\sin\gamma} \quad .$$

Ergänzt man das Dreieck ACB zu dem Parallelogramm $ACBD$, so bildet CD mit a das Komplement des Winkels φ. Die gesuchte Gerade steht also auf der Mittellinie der Seite AB senkrecht.

8. Es ist das Maximum und Minimum von $\sin 2x - \sin^2 x$ zu bestimmen. Setzt man $2x = y$, $x = \frac{1}{2} y$, so hat man

$$\sin 2x - \sin^2 x = \tfrac{1}{2}(2\sin y + \cos y - 1) \quad ,$$

$$f(y) = 2\sin y + \cos y - 1, \quad f'(y) = 2\cos y - \sin y \,, \quad f''(y) = -2\sin y - \cos y.$$

Aus $f'(y) = 0$ ergibt sich

$$\tan y = 2 \,, \quad \cos y = \pm\sqrt{\tfrac{1}{5}} \,, \quad \sin y = \pm 2\sqrt{\tfrac{1}{5}} \quad .$$

Für den Winkel mit positiven Cosinus und Sinus erhält man das Maximum, für den mit den negativen Funktionen das Minimum.

III. Teil.

Niedere Analysis.

Fünfter Abschnitt.

Kombinatorik.

§ 28. Grundbegriffe. Permutationen.

1. Die Kombinatorik hat zum Gegenstand die Gesetze der Zusammenstellungen gegebener Dinge in bestimmten Ordnungsweisen. Fragt man z. B. auf wieviele verschiedene Arten (Reihenfolgen) zehn Personen an einem Tische sitzen können, so hat man eine Aufgabe der Kombinatorik. Die zusammenzustellenden Dinge nennt man Elemente und bezeichnet sie gewöhnlich durch Buchstaben oder Ziffern. Die Natur dieser Elemente und die Art ihrer Verbindung ist dabei gleichgültig. Eine einzelne Zusammenstellung gegebener Elemente heißt eine Komplexion dieser Elemente.

Man unterscheidet verschiedene Arten solcher Zusammenstellungen, die wir zunächst durch ein Beispiel erläutern wollen: Eine Gesellschaft bestehe aus zwölf Mitgliedern, ihre Namen sollen in einer Liste verzeichnet werden. Dies kann in verschiedener Reihenfolge geschehen, und jede derartige Zusammenstellung aller zwölf Namen heißt eine Permutation von zwölf Elementen. Sollen dagegen die zwölf Mitglieder aus ihrer Mitte drei Personen als Deputierte wählen, werden also auf verschiedene Weisen drei Namen ausgewählt und zusammengestellt, so heißt jede solche Zusammenstellung eine Kombination der zwölf Elemente, und zwar eine solche zur dritten Klasse. Sollen endlich dabei die drei Personen verschiedene Funktionen übernehmen, wie beispielsweise wenn bei einer Vorstandswahl die zuerst benannte Person die Stelle des Vorsitzenden, die zweite die Stelle des Schriftführers und die dritte die Stelle des Kassierers bekleiden soll, kommt also nicht bloß die Auswahl der drei Elemente, sondern auch ihre Aufeinanderfolge in Betracht, so heißen die so gebildeten Komplexionen Variationen der zwölf Elemente zur dritten Klasse.

In jedem derartigen Fall entsteht die Aufgabe, ein Verfahren anzugeben, nach dem man alle verlangten Komplexionen in einer geordneten Reihenfolge aufstellen kann, ohne daß eine Gefahr des Auslassens oder der Wiederholung einzelner stattfinde. Da ferner häufig nicht jede einzelne Komplexion selbst, sondern nur ihre Anzahl verlangt wird, so sind Formeln abzuleiten, die die Berechnung dieser Anzahl ermöglichen, ohne daß die Aufstellung und Abzählung der einzelnen Komplexionen selbst nötig ist. Mit Rücksicht auf diese Aufgabe kann man die Kombinatorik als abzählende Arithmetik bezeichnen.

Zu diesem Zwecke empfiehlt es sich, eine bestimmte Reihenfolge der Elemente als die ursprüngliche, gegebene anzunehmen und für diese bei der Bezeichnung durch Zahlen oder Buchstaben die natürliche oder alphabetische Reihenfolge zu wählen. Hierbei nennt man jedes Element, das in dieser ursprünglichen Reihenfolge später steht als ein andres, in Beziehung auf dieses das höhere.

2. Permutationen gegebener Elemente sind Komplexionen, die sämtliche Elemente in verschiedener Reihenfolge enthalten. Die Permutationen von a, b z. B. sind ab und ba, die Permutationen von 1, 2, 3 sind 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Um die Permutationen gegebener Elemente in geordneter Reihenfolge zu bilden, lasse man jedes der n Elemente nacheinander einmal die erste Stelle einnehmen, gehe jedoch niemals zum folgenden Element bei der Besetzung dieser ersten Stelle über, ehe alle auf dieselbe noch folgenden Elemente auf jede mögliche Weise versetzt worden sind. Man erhält also n Gruppen von Permutationen, die Permutationen der ersten Gruppe fangen sämtlich mit dem ersten, die der zweiten Gruppe sämtlich mit dem zweiten Elemente an u. s. w. Innerhalb jeder Gruppe besetze man nun wieder die zweite Stelle nach und nach mit jedem der $n - 1$ übrigen Elemente in ihrer natürlichen Reihenfolge, lasse in jeder dieser $n - 1$ Untergruppen jedesmal an dritter Stelle jedes der $n - 2$ noch übrigen Elemente der Reihe nach folgen und fahre so fort bis zur letzten Stelle.

So sind also z. B. die Permutationen von $abcd$ in dieser Ordnung

$abcd$	$bacd$	$cabd$	$dabc$
$abdc$	$badc$	$cadb$	$dacb$
$acbd$	$bcad$	$cbad$	$dbac$
$acdb$	$bcda$	$cbda$	$dbca$
$adbc$	$bdac$	$cdab$	$dcab$
$adcb$	$bdca$	$cdba$	$dcba$

Die erste Permutation enthält die Elemente in ihrer natürlichen Reihenfolge; jede folgende wird aus der vorhergehenden erhalten, indem man in dieser das erste Element, von rechts nach links gerechnet, das niedriger ist als ein folgendes, durch das nächst höhere der darauf rechts folgenden ersetzt, dann die noch übrigen rechts stehenden Elemente nach ihrer natürlichen Reihenfolge ordnet, während die links stehenden unverändert bleiben.

Um beispielsweise die auf 1432765 folgende Permutation zu erhalten, hat man die 2 durch die 5 zu ersetzen und dann die Elemente 2, 7, 6 in ihrer natürlichen Reihenfolge anzuschließen, während die vorhergehenden 1, 4, 3 ihre Stellungen behalten. Die gesuchte Permutation ist also 1435267.

Dieses Bildungsgesetz zeigt zugleich, daß die Anzahl der Permutationen von n Elementen n mal so groß ist, als die der Permutationen von $n - 1$ Elementen, denn jedes der n Elemente kann die erste Stelle so oft einnehmen, als die jedesmal übrigen $n - 1$ Elemente nach ihm Permutationen unter sich gestatten. Da nun ein Element nur eine einzige Stellung haben kann, so erhält man für zwei Elemente $1 \cdot 2$, für drei Elemente $1 \cdot 2 \cdot 3$ Permutationen, allgemein für n Elemente die Anzahl der Permutationen

$$p_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n - 1) \cdot n = n! \quad ,$$

wobei die Abkürzung $n!$ für das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis n gelesen wird »n-Fakultät«.

Wenn also beispielsweise zehn Personen an einem Mittagstische mit dem Wirte verabreden, ihm die Bezahlung schuldig zu bleiben, bis sie auf jede mögliche Art einmal die zehn Plätze besetzt haben, so muß der Wirt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3628800$ Tage oder über 9935 Jahre kreditieren. Um ferner die dreizehn Karten einer Farbe eines Kartenspiels auf alle möglichen Arten nebeneinander zu legen, hat man 6227020800 Versetzungen zu machen, wozu man, wenn in jeder Minute zehn verschiedene Permutationen gebildet würden, bei einer täglichen Arbeitszeit von zwölf Stunden, mehr als 2367 Jahre nötig haben würde.

Die Anzahl der Permutationen wächst mit der Anzahl der Elemente sehr rasch, und schon bei verhältnismäßig geringen Werten von n ist ihre wirkliche Aufstellung unmöglich.

Bei dieser Entwicklung ist vorausgesetzt worden, daß alle n Elemente voneinander verschieden seien. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so wird die Anzahl der Permutationen geringer. Denkt man sich nämlich sämtliche $n!$ Permutationen von n verschiedenen Elementen gebildet, und dann α von diesen Elementen einander gleich werdend, so wird jede einzelne der bisherigen Permutationen mit allen identisch, die sich vorher von ihr nur durch andre Stellungen der gleich gewordenen Elemente unterschieden. Es kommt daher jetzt jede Permutation so oft vor, als α Elemente unter sich Permutationen gestatten, und es ist daher $n!$ das $\alpha!$fache der Anzahl der noch voneinander verschiedenen Permutationen, diese Anzahl selbst also gleich

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{1 \cdot 2 \ldots \alpha} = \frac{n!}{\alpha!} = (\alpha + 1)(\alpha + 2) \ldots n \ .$$

Sind außer α gleichen Elementen einer Art noch β gleiche einer andern Art vorhanden, so ergibt die gleiche Schlußweise für die Anzahl der verschiedenen Permutationen $\frac{n!}{\alpha! \cdot \beta!}$. Sind noch γ gleiche Elemente einer dritten Art vorhanden, so ist diese Anzahl gleich $\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}$ u. s. w. Sind unter den n Elementen k einander gleich und die übrigen $n - k$ ebenfalls untereinander gleich, so erhält man für die Anzahl der Permutationen

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} \ .$$

Für diesen Ausdruck hat man das Zeichen $\binom{n}{k}$, gelesen »n über k« eingeführt. Derselbe Ausdruck ergibt sich, wenn man mit $k!$ kürzt, gleich

$$\frac{n(n-1)\ldots(k+1)}{1 \cdot 2 \ldots (n-k)} \ ,$$

so daß also

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

ist. Beispielsweise gestatten die Buchstaben des Wortes *Otto* nur $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2}$ $= 6$ Permutationen, nämlich

Otto, Otot, Oott, Toto, Toot, Ttoo.

3. Es entsteht ferner die Aufgabe, von den Permutationen gegebener Elemente eine durch Angabe ihrer Stellenzahl bestimmte zu finden, ohne daß man nötig hat, die vorhergehenden Permutationen aufzustellen. Es wird genügen, das hierzu dienliche Verfahren an einigen Beispielen zu erläutern. Es werde zu diesem Zwecke die 265 te Permutation von *darius* verlangt. Da hier sechs Elemente permutiert werden, so gibt es $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ Permutationen, die mit *d*, ebensoviele die mit *a* beginnen u. s. w. Da nun die Division von 265 durch 120 den Quotienten 2 und den Rest 25 ergibt, so gehen der verlangten Permutation zwei der Gruppen von je 120 Permutationen, also die mit *d* und die mit *a* beginnenden voraus, und sie selbst ist die 25 te der dritten Gruppe und beginnt also mit *r*. Nach Streichung dieses Buchstabens bleibt die Frage, welches die 25 te Permutation von *daius* sei, die in derselben Weise wie vorher behandelt wird. Man hat jetzt je nach dem Anfangselement fünf Gruppen von je

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ Elementen, es geht also der gesuchten Permutation eine solche Gruppe voraus, und sie selbst ist die erste der zweiten Gruppe. Mithin ist nun *a* als zweites Element nach dem obigen *r* bestimmt, und es ist die erste Permutation der noch übrigen Elemente *dius* zu bestimmen. So ergibt sich, daß die gesuchte Permutation *radius* ist.

Es sei ferner die 11186 te Permutation der acht Elemente *aegmnrsu* zu bestimmen. Nach dem entwickelten Verfahren rechnet man wie folgt: $11186 : 7! = 11186 : 5040 = 2$, Rest 1106; die Permutation beginnt mit dem dritten Buchstaben *g*. Nach Streichung von *g* hat man noch die Elemente *aemnrsu*, und es ist $1106 : 6! = 1106 : 720 = 1$, Rest 386; es folgt also der zweite Buchstabe *e*, der wieder gestrichen wird. Dann ist $386 : 120 = 3$, Rest 26, also das folgende Element *r*; ferner $26 : 24 = 1$, Rest 2, also *m*; $2 : 6 = 0$, also *a*; $2 : 2 = 1$, Rest 0, mithin ist jetzt die letzte, d. i. zweite Permutation der ersten Gruppe für *nsu*, also *nus* zu setzen, und die gesuchte Permutation ist *germanus*.

Kommen unter den *n* gegebenen Elementen gleiche vor, so ist das Verfahren entsprechend abzuändern, indem man berücksichtigt, daß nicht für alle Gruppen einer Art die Anzahl der Permutationen dieselbe ist. Um z. B. die 1252 te Permutation von *aabbbcccc* zu bilden, beachte man, daß man zunächst $\frac{8!}{3!\,4!} = 280$ mit *a* beginnende Permutationen hat, nach deren Abrechnung man noch die 972 te der folgenden suchen muß. Dagegen gibt es $\frac{8!}{2!\,2!\,4!} = 420$ mit *b* beginnende, und nach Abrechnung dieser ist noch die 552 te der folgenden, also der mit *c* beginnenden Permutationen zu ermitteln. Nach Streichung eines *c* hat man $\frac{7!}{3!\,3!} = 140$ mit *a* beginnende Permutationen abzuziehen, dann von den 412 folgenden $\frac{7!}{2!\,2!\,3!} = 210$ mit *b* beginnende, so daß nach Streichung eines weiteren *c* die 202 te Permutation der übrigen Elemente zu ermitteln ist. In gleicher Weise hat man nun $\frac{6!}{3!\,2!} = 60$; $202 - 60 = 142$; $\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 90$; $142 - 90 = 52$; ferner $\frac{5!}{3!} = 20$; $52 - 20 = 32$; $\frac{5!}{2!\,2!} = 30$; $32 - 30 = 2$. Die gesuchte Permutation ist also *ccccababb*.

Soll umgekehrt ermittelt werden, die wievielte Permutation eine gegebene ist, so hat man in umgekehrter Weise zu verfahren. Wird z. B. gefragt, die wievielte Permutation 4317562 von 1234567 sei, so gehen der gesuchten drei, bezüglich mit 1, 2, 3 beginnende Gruppen von je 6! Permutationen voraus. Nach Streichung der 4 gehen der Permutation 317562 von 123567 noch zwei Gruppen von je 5! Permutationen voraus. Ebenso erhält man weiterhin keine vorangehende Gruppe mit 4!, drei mit 3!, eine mit 2! Permutationen, und die gesuchte ist die zweite der folgenden, also im ganzen die $3 \cdot 6! + 2 \cdot 5! + 3 \cdot 3! + 2! + 2 = 2422$ te. Um ebenso zu bestimmen, die wievielte Permutation *cbabab* von *aabbbc* sei, hat man $\frac{5!}{3!}$ mit *a* und $\frac{5!}{2! \cdot 2!}$ mit *b* beginnende Permutationen vor den mit *c* anfangenden, dann nach Streichung des *c* noch $\frac{4!}{3!}$ mit *a* anfangende, weiterhin entsprechend $\frac{2!}{2!}$ vorhergehende, und die gesuchte ist also die $\frac{5!}{3!} + \frac{5!}{2! \cdot 2!} + \frac{4!}{3!} + \frac{2!}{2!} + 1 = 56$ te.

4. Außer der im vorstehenden angewandten Ordnungsweise der Permutationen ist noch eine andre von Interesse, bei der jede Permutation aus der ihr zunächst vorhergehenden durch Vertauschung der Stellen von nur zwei Elementen abgeleitet werden kann. Sind nämlich zwei Elemente *a*, *b* gegeben, so findet überhaupt nur

eine solche Vertauschung statt; bei drei Elementen bildet man aus der ersten Permutation abc zunächst die zweite durch Vertauschung der beiden letzten Elemente, läßt dann in dieser zweiten acb behufs Bildung der dritten das Anfangsglied a seine Stelle mit b tauschen und vertauscht darauf wieder in bca die beiden letzten Elemente. Endlich läßt man in der so gewonnenen Permutation bac wieder das jetzige Anfangsglied b mit c die Stelle wechseln und leitet aus cab durch Vertauschung der beiden letzten Elemente noch die letzte Permutation cba ab.

Bei vier Elementen $abcd$ läßt man zunächst die auf das Anfangsglied a folgenden drei Elemente auf die eben angegebene Weise alle möglichen Permutationen unter sich machen; in der letzten dieser Permutationen $adcb$ läßt man nun das Anfangselement a mit dem nächsten b der natürlichen Reihenfolge die Stelle tauschen und dann, indem man b als Anfangsglied beibehält, zunächst wieder die folgenden drei Elemente in der oben angegebenen Weise alle möglichen Versetzungen eingehen. Darauf vertauscht man in der letzten der bis dahin gebildeten Permutationen wieder b mit c und fährt in dieser Weise fort, bis jedes der vier Elemente auf alle möglichen Arten die erste Stelle eingenommen hat.

Man sieht nun, wie man in gleicher Weise die Permutationen von fünf Elementen mit Hilfe des Verfahrens bei vier Elementen und so allgemein die Permutationen von n Elementen bilden kann.

Je zwei beliebige Elemente, die aus einer Komplexion herausgenommen und in derselben Reihenfolge nebeneinander gestellt werden, in der sie in jener Komplexion aufeinander folgen, bilden ein Elementenpaar. Jedes Elementenpaar einer Komplexion, in dem ein höheres Element einem niedrigeren vorausgeht, bildet eine Inversion. So hat die Komplexion 53421 die Elementenpaare 53, 54, 52, 51, 34, 32, 31, 42, 41, 21; von diesen bilden 53, 54, 52, 51, 32, 31, 42, 41, 21 Inversionen. Dagegen hat die Komplexion 12453 nur die Inversionen 43, 53.

Vertauscht man in einer Komplexion zwei Elemente r, s miteinander und bezeichnet A die Gruppe der Elemente, die diesen beiden vorausgehen, B die Gruppe der zwischen ihnen stehenden und C die Gruppe der nachfolgenden Elemente, sind also

$$ArBsC \text{ und } AsBrC$$

die beiden Komplexionen und sei ferner s höher als r, so kann bei der Vertauschung von r und s nur die Gruppe B Anlaß zu einer Änderung der Anzahl der Inversionen geben, denn A und C bleiben sowohl zu r, als zu s in derselben Stellung in Betreff des Vorausgehens oder des Nachfolgens. Enthält nun die Gruppe B, α Elemente, die niedriger als r sind, β Elemente, die zwischen r und s in der natürlichen Reihenfolge stehen und γ Elemente, die höher als s sind, so fallen bei der Vertauschung von r und s zunächst $\alpha + \gamma$ Inversionen weg, dagegen entstehen dadurch, daß r hinter $\beta + \gamma$ höhere Elemente tritt, $\beta + \gamma$, und dadurch, daß s vor $\alpha + \beta$ niedrigere tritt, $\alpha + \beta$, endlich durch die Vertauschung von r und s selbst noch eine, im ganzen also $\alpha + 2\beta + \gamma + 1$ Inversionen mehr, und die Gesamtzahl der vorhandenen Inversionen ändert sich also um

$$\alpha + 2\beta + \gamma + 1 - (\alpha + \gamma) = 2\beta + 1 \quad ,$$

also um eine ungerade Zahl. Für diese ist es selbstverständlich gleichgülitg, welche der beiden Komplexionen als die ursprüngliche angenommen wird, und es gilt demnach der Satz:

Vertauscht man in einer Komplexion zwei Elemente miteinander, so ändert sich die Anzahl der Inversionen um eine ungerade Zahl.

Bildet man also die Permutationen gegebener Elemente auf die zweite angegebene Weise, so ist die Anzahl der Inversionen in ihnen abwechselnd gerade und ungerade.

Allgemeiner ergibt sich hieraus: Zwei Permutationen, die sich auseinander durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen je zweier Elemente ableiten lassen, haben entweder beide eine gerade oder beide eine ungerade Anzahl von Inversionen; von zwei Permutationen dagegen, die sich auseinander durch eine ungerade Anzahl von Vertauschungen je zweier Elemente ableiten lassen, hat stets die eine eine gerade, die andre eine ungerade Anzahl von Inversionen.

Man teilt die Permutationen gegebener Elemente in zwei Klassen und rechnet in die erste alle die Permutationen, die eine gerade, in die zweite alle die, die eine ungerade Anzahl von Inversionen haben.

Demnach gehören zwei Permutationen derselben Elemente, derselben Klasse oder verschiedenen Klassen an, je nachdem sie sich auseinander durch eine gerade oder durch eine ungerade Anzahl von Vertauschungen je zweier Elemente ableiten lassen. Die in der zweiten der oben angegebenen Weisen geordneten Permutationen gehören abwechselnd verschiedenen Klassen an. Beide Klassen enthalten jedesmal gleichviele Permutationen, nämlich $3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots n = \frac{1}{2} \cdot n!$

§ 29. Kombinationen und Variationen.

1. Wird von n gegebenen Elementen eine Anzahl k auf alle möglichen Arten herausgenommen und zusammengestellt, so jedoch, daß nur die verschiedene Auswahl der Elemente und nicht ihre Stellung gegeneinander in Betracht kommt, so heißen die entstehenden Komplexionen Kombinationen von n Elementen zur Klasse k.

Komplexionen, die dieselben ausgewählten k Elemente, jedoch in verschiedenen Reihenfolgen enthalten, gelten demnach nur als eine einzige Kombination. Da man hiernach bei Aufstellung der Kombinationen jedesmal die Wahl zwischen den verschiedenen möglichen Reihenfolgen hat, so pflegt man diejenige zu nehmen, welche die Elemente in ihrer natürlichen Reihenfolge enthält.

Wird dagegen nicht nur eine Anzahl k von n Elementen ausgewählt, sondern auch jede verschiedene Anordnung derselben ausgewählten Elemente als eine neue Komplexion betrachtet, so erhält man die Variationen von n Elementen zur Klasse k.

Man unterscheidet ferner Kombinationen und Variationen mit und ohne Wiederholung, je nachdem es gestattet oder verboten ist, ein und dasselbe Element in derselben Komplexion wiederholt zu setzen.

Beispielsweise sind von den vier Elementen $a\,b\,c\,d$
die Kombinationen ohne Wiederholungen zur dritten Klasse:

$a\,b\,c,\ a\,b\,d,\ a\,c\,d,\ b\,c\,d,$

die Kombinationen mit Wiederholungen zur dritten Klasse:

$a\,a\,a,\ a\,a\,b,\ a\,a\,c,\ a\,a\,d,\ a\,b\,b,\ a\,b\,c,\ a\,b\,d,\ a\,c\,c,\ a\,c\,d,\ a\,d\,d,$
$b\,b\,b,\ b\,b\,c,\ b\,b\,d,\ b\,c\,c,\ b\,c\,d,\ b\,d\,d,\ c\,c\,c,\ c\,c\,d,\ c\,d\,d,\ d\,d\,d,$

die Variationen ohne Wiederholungen zur dritten Klasse:

$a\,b\,c,\ a\,b\,d,\ a\,c\,b,\ a\,c\,d,\ a\,d\,b,\ a\,d\,c,\ b\,a\,c,\ b\,a\,d,\ b\,c\,a,\ b\,c\,d,\ b\,d\,a,\ b\,d\,c,$
$c\,a\,b,\ c\,a\,d,\ c\,b\,a,\ c\,b\,d,\ c\,d\,a,\ c\,d\,b,\ d\,a\,b,\ d\,a\,c,\ d\,b\,a,\ d\,b\,c,\ d\,c\,a,\ d\,c\,b,$

die Variationen mit Wiederholungen zur dritten Klasse:

$a\,a\,a,\ a\,a\,b,\ a\,a\,c,\ a\,a\,d,\ a\,b\,a,\ a\,b\,b,\ a\,b\,c,\ a\,b\,d,\ a\,c\,a,\ a\,c\,b,\ a\,c\,c,\ a\,c\,d,$
$a\,d\,a,\ a\,d\,b,\ a\,d\,c,\ a\,d\,d,\ b\,a\,a,\ b\,a\,b,\ b\,a\,c,\ b\,a\,d,\ b\,b\,a,\ b\,b\,b,\ b\,b\,c,\ b\,b\,d,$
$b\,c\,a,\ b\,c\,b,\ b\,c\,c,\ b\,c\,d,\ b\,d\,a,\ b\,d\,b,\ b\,d\,c,\ b\,d\,d,\ c\,a\,a,\ c\,a\,b,\ c\,a\,c,\ c\,a\,d,$
$c\,b\,a,\ c\,b\,b,\ c\,b\,c,\ c\,b\,d,\ c\,c\,a,\ c\,c\,b,\ c\,c\,c,\ c\,c\,d,\ c\,d\,a,\ c\,d\,b,\ c\,d\,c,\ c\,d\,d,$
$d\,a\,a,\ d\,a\,b,\ d\,a\,c,\ d\,a\,d,\ d\,b\,a,\ d\,b\,b,\ d\,b\,c,\ d\,b\,d,\ d\,c\,a,\ d\,c\,b,\ d\,c\,c,\ d\,c\,d,$
$d\,d\,a,\ d\,d\,b,\ d\,d\,c,\ d\,d\,d.$

Als Bildungsgesetze für diese vier Arten von Komplexionen kann man folgende aufstellen:

Für die Kombinationen von n Elementen zur Klasse k ohne Wiederholung beginne man mit den k ersten Elementen der natürlichen Reihenfolge und ersetze das am weitesten nach rechts stehende Element, das noch erhöht werden kann, nach und nach durch jedes der höheren Elemente und fahre nach dieser Regel fort, indem man bei jeder Erhöhung eines Elementes die links von ihm stehenden Elemente unverändert läßt und rechts die zunächst folgenden höheren Elemente in ihrer natürlichen Reihenfolge setzt. — Bei der Erhöhung eines Elementes ist zu beachten, daß eine hinreichende Anzahl höherer Elemente zur Besetzung der noch folgenden Stellen vorhanden bleiben muß.

Bei diesem Verfahren nimmt jedes der $n - k + 1$ ersten Elemente nach und nach die erste Stelle ein, in jedem dieser Fälle folgt dem zuerst gesetzten Elemente jedes der höheren Elemente, soweit ihre Anzahl zur Besetzung der Stellen hinreicht, an zweiter Stelle u. s. w.

Um die Kombinationen von n Elementen zur Klasse k mit Wiederholung zu bilden, beginne man damit, das erste Element k mal zu setzen und verfahre dann wie vorher, mit dem Unterschied, daß auf jedes Element nicht bloß ein höheres, sondern auch jenes selbst wiederholt folgen kann.

In Betreff der Variationen von n Elementen zur Klasse k kann man in ähnlicher Weise wie vorher verfahren, hat jedoch zu beachten, daß auf ein gesetztes Element auch jedes der niedrigern folgen kann. Man setzt also jedes der n Elemente einmal an die erste Stelle, darauf bei Variationen ohne Wiederholung jedes der $n - 1$ übrigen der Reihe nach, bei Variationen mit Wiederholung jedes der n Elemente überhaupt je einmal an die zweite Stelle, dann in jedem der so erhaltenen Fälle wieder jedes der $n - 2$ übrigen, weiter jedes der n Elemente der Reihe nach an die dritte Stelle u. s. f. bis zur k-ten Stelle.

Man sieht ein, daß man die Variationen von n Elementen mit oder ohne Wiederholung zur Klasse k auch aus den entsprechenden Kombinationen ableiten kann, indem man jede Kombination auf alle mögliche Arten permutiert. Die Variationen von n Elementen ohne Wiederholung zur Klasse n sind identisch mit den Permutationen dieser Elemente.

2. Die Anzahl der Komplexionen ergibt sich in den einzelnen Fällen wie folgt:

Da bei den Variationen mit Wiederholung jedes der n Elemente an erster Stelle, in jedem dieser n Fälle wieder jedes der n Elemente an zweiter Stelle stehen kann u. s. w., so ist die Anzahl der Variationen mit Wiederholung zur Klasse k gleich

$$n^k \quad .$$

Bei Variationen ohne Wiederholung kann auf das erste Element in jedem einzelnen Falle nur jedes der $n - 1$ übrigen an zweiter Stelle, dann entsprechend jedes der $n - 2$ übrigen an dritter Stelle, folgen, u. s. w. Daher ist ihre Anzahl zur Klasse k gleich

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad .$$

Die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur Klasse k ergibt sich aus der Anzahl der Variationen derselben Elemente zu derselben Klasse, indem man sie durch die Anzahl der Permutationen von k Elementen dividiert; also

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k} \quad .$$

Für die Kombinationen mit Wiederholung läßt sich das eben benutzte Verfahren nicht anwenden, da die Anzahl der Permutationen für jede nicht die

gleiche ist, sondern beispielsweise für aaa nur gleich 1, für aab gleich 3, für abc gleich 6. Man denke sich für diesen Fall die sämtlichen Kombinationen der Elemente 1, 2, 3 ..., deren Anzahl gesucht wird, der Reihe nach hingeschrieben, erhöhe sodann in jeder das an zweiter Stelle stehende Element um 1, das an dritter Stelle stehende um 2, u. s. f. bis zu dem an k-ter Stelle stehenden, das um $k-1$ erhöht wird. Man erhält so die gleiche Anzahl neuer Komplexionen und zwar von $n+k-1$ Elementen. Da nun jedes folgende Element in jeder einzelnen Kombination um mehr als das vorhergehende erhöht wurde, so kann in den neuen Komplexionen niemals ein niedrigeres Element auf ein höheres und es kann auch niemals dasselbe Element wiederholt vorkommen, denn andernfalls müßte die ursprüngliche Komplexion keine natürlich geordnete Kombination gewesen sein. Die neuen Komplexionen sind also Kombinationen der $n+k-1$ Elemente ohne Wiederholung. Endlich müssen diese vollständig vorhanden sein, denn fehlte eine, so denke man sich in dieser fehlenden Komplexion wieder die an zweiter, dritter, u. s. w. bis k-ter Stelle stehenden Elemente um 1, 2 ... bis $k-1$ erniedrigt; offenbar muß hierdurch umgekehrt eine der Kombinationen der gegebenen n Elemente ohne Wiederholung entstehen, und es müßte demnach diese auch ursprünglich gefehlt haben. Somit ergibt sich der Satz:

Die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur Klasse k mit Wiederholung ist gleich der Anzahl der Kombinationen von $n+k-1$ Elementen zur Klasse k ohne Wiederholung.

Bestimmt man diese nach der vorigen Formel, so erhält man auch für diese Anzahl

$$\frac{(n+k-1)(n+k-2)\ldots(n+k-1-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots k}$$

oder

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} .$$

Fragt man beispielsweise, auf wieviele Arten 52 Karten sich so unter vier Spieler verteilen lassen, daß jeder 13 Karten erhält, so hat man zunächst die Anzahl der Kombinationen von 52 Elementen zur 13 ten Klasse ohne Wiederholung zu bestimmen. Diese ergibt sich zu 635013 559600. Erhält der erste Spieler eine dieser Kombinationen, so kann der zweite jedesmal noch jede der Kombinationen der übrigen 39 Karten zur 13 ten Klasse ohne Wiederholung erhalten, deren Anzahl 8122 425444 beträgt. Ferner kann in jedem der hierbei möglichen Fälle der dritte Spieler jede der Kombinationen der 26 übrigen Elemente zur 13 ten Klasse ohne Wiederholung, deren Anzahl 10 400600 beträgt, erhalten. Der vierte Spieler erhält dann in jedem der möglichen Fälle die noch übrigen 13 Karten. Die Gesamtzahl aller möglichen Verteilungsweisen ist also gleich dem Produkt der vorstehend ermittelten drei Anzahlen, oder gleich

$$\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13} = 53644\,737765\,488792\,839237\,440000 .$$

Bei dem Morseschen elektrischen Telegraphen wird das ganze Alphabet durch Zusammenstellung von Strichen und Punkten gebildet. Fragt man nun, wieviele verschiedene Zeichen sich durch die Zusammenstellungen von höchstens vier Strichen und Punkten zu je einem Zeichen bilden lassen, so hat man die Anzahlen der Variationen von zwei Elementen mit Wiederholung zur ersten, zweiten, dritten und vierten Klasse zu addieren. Die gesuchte Zahl ist also gleich

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30 .$$

Es kann ferner bei den Kombinationen und Variationen gegebener Elemente festgesetzt werden, daß die einzelnen Elemente nicht unbeschränkt wiederholbar

sind, sondern daß für jedes nur eine bestimmte Anzahl, z. B. für das erste α, für das zweite β, u. s. w. Wiederholungen gestattet sein sollen. Es kann ferner vorgeschrieben werden, daß die zu bildenden Komplexionen der durch Zahlen dargestellten Elemente eine bestimmte Summe dieser Zahlen geben, oder daß die einzelnen Elemente mit gleichen Differenzen der aufeinander folgenden fortschreiten sollen u. dgl. m. In derartigen Fällen wird man leicht nach Analogie der im vorhergehenden entwickelten Methoden die einzelnen Komplexionen in gesetzmäßiger Weise aufstellen und abzählen können.

§ 30. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

1. Unter mathematischer Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses versteht man das Verhältnis der Anzahl aller diesem Ereignis günstigen zur Anzahl aller überhaupt möglichen Fälle.

So ist z. B. die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel einen bestimmten Wurf zu werfen, gleich $\frac{1}{6}$, denn unter den 6 überhaupt möglichen Würfen ist ein einziger dem Eintreffen des verlangten Ereignisses günstig. Die Wahrscheinlichkeit, aus einem Spiele von 52 Karten ein Aß zu ziehen, ist $\frac{1}{52} = \frac{1}{13}$, da unter 52 möglichen Fällen 4 günstige sind.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses wird hiernach durch einen echten Bruch angegeben. Ist kein Fall dem Ereignis günstig, das Ereignis also unmöglich, so erhält man für die Wahrscheinlichkeit den Wert Null, sind alle möglichen Fälle zugleich günstig, das Ereignis also gewiß, so wird die Wahrscheinlichkeit gleich 1. Sind ebensoviele Fälle einem Ereignis günstig als ungünstig, so ist seine Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{1}{2}$, in diesem Falle würde das Eintreffen des Ereignisses zweifelhaft sein. Ist die Wahrscheinlichkeit größer als $\frac{1}{2}$, so würde der gewöhnliche Sprachgebrauch das Eintreffen des Ereignisses als wahrscheinlich, ist sie kleiner als $\frac{1}{2}$, so würde man dieses Ereignis als unwahrscheinlich bezeichnen. Es kommt also jedem Ereignis und sei es noch so unwahrscheinlich, eine gewisse mathematische Wahrscheinlichkeit zu.

Entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses nennt man die Wahrscheinlichkeit für sein Nicht-Eintreten. Diese wird durch einen Bruch angegeben, dessen Zähler die Anzahl der ungünstigen, und dessen Nenner die Anzahl der möglichen Fälle ist. Ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich w, so ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit gleich $1 - w$. Zuweilen berechnet man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses am bequemsten aus der entgegengesetzten Wahrscheinlichkeit. Wird z. B. nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, bei dreimaligem Aufwerfen eine Münzstückes wenigstens einmal »Schrift« zu werfen, so sind, da jeder der beiden möglichen Fälle eines Wurfes mit jedem Fall der übrigen Würfe zusammentreffen kann, $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Fälle möglich. Unter diesen ist nur einer ungünstig, also ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$, und daher die gesuchte $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

2. Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses erfordert behufs der Bestimmung der Anzahl der möglichen und der günstigen Fälle meist die Anwendung der Kombinatorik. Sie kann bei zusammengesetzten Aufgaben nicht selten dadurch erleichtert werden, daß das Ereignis in mehrere einzelne Ereignisse zerlegt wird. Es seien zunächst unter n möglichen Fällen a einem Ereignis, b davon verschiedene einem zweiten Ereignis, wieder c andre einem dritten Ereignis u. s. w. günstig, also $w_1 = \frac{a}{n}$, $w_2 = \frac{b}{n}$, $w_3 = \frac{c}{n}$ u. s. w. die Wahrscheinlichkeiten dieser einzelnen Ereignisse, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß von den letzteren irgend eines, also entweder das eine oder das andre eintrete,

gleich $\frac{a+b+c+\cdots}{n}$, oder es ist die totale Wahrscheinlichkeit gleich $w_1 + w_2 + w_3 + \ldots$, gleich der Summe der partiellen Wahrscheinlichkeiten.

So ist z. B. die Wahrscheinlichkeit mit zwei Würfeln einen Pasch zu werfen, da unter $6 \cdot 6$ möglichen Fällen 6 günstige sind, $w_1 = \frac{1}{6}$; die Wahrscheinlichkeit mit derselben Anzahl von Würfeln zwei aufeinander folgende Zahlen zu werfen, ist $w_2 = \frac{5}{18}$, da die zehn Würfe 12, 23, 34, 45, 56, 21, 32, 43, 54, 65 günstig sind. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem Wurfe entweder einen Pasch oder zwei aufeinander folgende Zahlen zu werfen, ist also $w = \frac{1}{6} + \frac{5}{18} = \frac{4}{9}$.

Wird dagegen nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, mit zwei Würfeln entweder einen Pasch oder die Summe 8 zu werfen, so sind die partiellen Wahrscheinlichkeiten $w_1 = \frac{1}{6}$, $w_2 = \frac{5}{36}$, die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist jedoch nicht gleich $\frac{1}{6} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$, sondern nur gleich $\frac{10}{36}$, da der Wurf 44 beiden Ereignissen günstig ist und daher bei der ersten Rechnung doppelt gezählt sein würde.

Wird dagegen die Wahrscheinlichkeit gesucht, daß von zwei Ereignissen, deren Wahrscheinlichkeiten einzeln $w_1 = \frac{a}{b}$, $w_2 = \frac{c}{d}$ seien, sowohl das eine als auch das andre, daß also beide gleichzeitig oder auch in bestimmter Reihenfolge nacheinander eintreten, so sind $b \cdot d$ Fälle möglich, da jeder bei dem einen Ereignis mögliche Fall mit jedem von den bei dem andern möglichen zusammentreffen kann. Ebenso kann jeder der a günstigen Fälle des einen mit jedem der c günstigen des andern zusammentreffen; die Anzahl der überhaupt günstigen Fälle ist also bc, und mithin die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{ac}{bd}$ oder gleich $w_1 \cdot w_2$. Man kann diesen Schluß leicht auf drei oder mehr einzelne Ereignisse ausdehnen. Die so gefundene Wahrscheinlichkeit heißt aus den einzelnen Wahrscheinlichkeiten zusammengesetzt. Es gilt also der Satz: Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit mehrerer Ereignisse ist gleich dem Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeiten.

Wird z. B. nicht nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, mit zwei Würfeln entweder einen Pasch oder zwei aufeinander folgende Zahlen zu werfen, sondern nach der Wahrscheinlichkeit, mit dem ersten Wurf einen Pasch, und darauf noch mit dem zweiten Wurf zwei aufeinander folgende Zahlen zu werfen, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{18} = \frac{5}{108}$. Ist dabei die Reihenfolge der beiden Würfe nicht bestimmt, so ist die gefundene Zahl, da zwei verschiedene Reihenfolgen möglich sind, noch mit 2 zu multiplizieren.

Die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne, die drei weiße und vier schwarze Kugeln enthält, mit dem ersten Griff eine weiße und darauf, nachdem diese wieder hineingelegt worden ist, mit dem zweiten Griff eine schwarze Kugel zu ziehen, ist $\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{49}$. Dagegen ist die Wahrscheinlichkeit, wenn mit einem Griff zwei Kugeln zugleich herausgenommen werden, daß sie eine schwarze und eine weiße seien, gleich $\frac{4}{7}$, denn unter den möglichen 21 Kombinationen der sieben Kugeln zu zweien, sind zwölf Kombinationen günstig. Diese Wahrscheinlichkeit ist dieselbe wie die, daß bei zwei aufeinander folgenden Griffen eine weiße und eine schwarze Kugel gezogen werde, wenn die gezogene Kugel nicht wieder hineingelegt wird und die Reihenfolge der beiden Kugeln nicht bestimmt ist. Man kann in diesem Falle auch, wie folgt, rechnen: Die Wahrscheinlichkeit, zuerst eine schwarze Kugel zu ziehen, ist $\frac{4}{7}$; die Wahrscheinlichkeit, darauf eine weiße zu ziehen, ist, da die Anzahl der Kugeln jetzt nur noch sechs beträgt: $\frac{3}{6}$; die Wahrscheinlichkeit, daß beides geschehe, ist also $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$. Ferner ist die Wahrscheinlichkeit, beim erstenmal eine weiße und beim zweitenmal eine schwarze Kugel zu ziehen, entsprechend $\frac{3}{7} + \frac{4}{6} = \frac{2}{7}$. Die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis entweder in der einen oder in der andern Reihenfolge eintrete, ist also $\frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$.

Werden die sieben Kugeln in zwei Urnen verteilt, so daß die eine zwei weiße und zwei schwarze, die andre eine weiße und zwei schwarze Kugeln enthält, so ist die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen, nicht mehr wie vorher gleich $\frac{3}{7}$, sondern gleich $\frac{5}{12}$, denn die Wahrscheinlichkeit, in die erste Urne zu greifen, ist gleich $\frac{1}{2}$, die Wahrscheinlichkeit, aus dieser eine weiße Kugel zu ziehen, gleich $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, also die Wahrscheinlichkeit, in die erste Urne zu greifen und dann aus ihr eine weiße Kugel zu ziehen, gleich $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. In gleicher Weise ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, in die zweite Urne zu greifen und dann aus ihr eine weiße Kugel zu ziehen, gleich $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Die Wahrscheinlichkeit, daß entweder das eine oder das andre geschehe, ist also gleich $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$. Ebenso findet man für dieses Beispiel die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen, gleich $\frac{7}{12}$, und die Wahrscheinlichkeit mit zwei Griffen hintereinander zuerst eine weiße und, nachdem diese wieder in ihre Urne zurückgelegt worden, dann eine schwarze Kugel zu ziehen, gleich $\frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{35}{144}$.

Liegt in der einen Urne nur eine schwarze Kugel, liegen in der andern also drei weiße und drei schwarze, so hat die erste Kugel durch diese Verteilung für sich allein die gleiche Wahrscheinlichkeit, gezogen zu werden, wie die sechs andern zusammen; die Wahrscheinlichkeit, hier eine schwarze Kugel zu ziehen, ist daher $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$, die Wahrscheinlichkeit, eine weiße zu ziehen, nur $\frac{1}{4}$.

Es kann der Fall eintreten, daß umgekehrt die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Ereignisses mittels der bekannten totalen oder zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit, oder daß die Anzahl der einzelnen Ereignisse gesucht wird. Man hat in solchen Fällen nur die betreffende Gleichung auf die gesuchte Unbekannte aufzulösen.

Wird z. B. gefragt, wie oft mit zwei Würfeln geworfen werden müsse, damit die Wahrscheinlichkeit, zwei Sechsen zu werfen, größer werde, als die Wahrscheinlichkeit des Gegenteils, so hat man folgende Auflösung: Bei zwei Würfeln sind $6 \cdot 6$ Fälle möglich und dem verlangten Ereignis ist nur einer günstig. Die Wahrscheinlichkeit, daß dieses Ereignis in x Würfen wenigstens einmal eintrete, ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit dafür, daß x mal hintereinander das Gegenteil eintrete, also $\left(\frac{35}{36}\right)^x$. Diese Wahrscheinlichkeit soll kleiner sein als die erste, mithin auch $< \frac{1}{2}$ sein. Aus der Gleichung

$$\left(\frac{35}{36}\right)^x = \frac{1}{2}$$

würde folgen $x = 24{,}6$. Also muß $x > 24{,}6$, mithin mindestens gleich 25 sein.

Da die Wahrscheinlichkeiten echte Brüche sind, so folgt, daß jede zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit kleiner ist, als jede der einzelnen Wahrscheinlichkeiten und daß die erste überhaupt mit der zunehmenden Anzahl der Ereignisse abnimmt.

3. Schon in den vorhergehenden Beispielen sind einige besondere Fälle der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorgekommen:

So ist die Wahrscheinlichkeit, daß dasselbe Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit gleich w ist, n mal nacheinander eintreffe, falls die Anzahl der möglichen, sowie die der günstigen Fälle bei den Wiederholungen unverändert bleibt, gleich w^n.

Zuweilen tritt der Fall ein, daß die Anzahl der möglichen, sowie die der günstigen Fälle bei jeder Wiederholung sich um 1 vermindert. Ist $\frac{a}{b}$ die Wahrscheinlichkeit für das erste Eintreffen, so ist in diesem Falle die Wahrscheinlichkeit für ein n maliges Eintreffen gleich

$$\frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \ldots (a-n+1)}{b \cdot (b-1) \cdot (b-2) \ldots (b-n+1)}.$$

So ist z. B. die Wahrscheinlichkeit, aus einem Spiele von 52 Karten in dreizehn aufeinander folgenden Zügen sämtliche Coeur-Karten zu ziehen, wenn die gezogenen Karten nicht wieder ins Spiel gegeben werden, gleich

$$\frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \ldots 2 \cdot 1}{52 \cdot 51 \cdot 50 \ldots 41 \cdot 40} = \frac{1}{635013559600}.$$

Würde dagegen jede gezogene Karte wieder in das Spiel gemischt, so wäre die Wahrscheinlichkeit, dreizehnmal hintereinander eine Coeur-Karte, gleichviel welche, zu ziehen, gleich $\left(\frac{1}{4}\right)^{13}$. Sollen dagegen in diesem Falle alle gezogenen Karten auch voneinander verschieden sein, so ändert sich bloß die Anzahl der günstigen, nicht aber die der möglichen Fälle um je 1, und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dann

$$\frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \ldots 2 \cdot 1}{52 \cdot 52 \cdot 52 \ldots 52 \cdot 52}.$$

Sind w_1, w_2 die einzelnen Wahrscheinlichkeiten zweier voneinander unabhängigen Ereignisse A, B, so ist nach dem früheren 1) die Wahrscheinlichkeit, daß sowohl A als auch B eintreffe, gleich $w_1 \cdot w_2$; 2) die Wahrscheinlichkeit, daß A eintreffe und B nicht eintreffe, gleich $w_1 \cdot (1 - w_2)$; 3) die Wahrscheinlichkeit, daß A nicht eintreffe, dagegen B eintreffe, gleich $(1 - w_1) \cdot w_2$; 4) die Wahrscheinlichkeit, daß weder A noch B eintreffe, gleich $(1 - w_1)(1 - w_2)$. Ferner ist die Wahrscheinlichkeit, daß 5) nur eins der beiden Ereignisse eintreffe, gleichviel welches, gleich $w_1(1 - w_2) + w_2(1 - w_1) = w_1 + w_2 - 2 w_1 w_2$, 6) daß wenigstens eins eintreffe, in welchem Falle also auch das gleichzeitige Eintreffen beider günstig ist, gleich $w_1 + w_2 - w_1 w_2$. Es ist dies die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, von der unter 4) angegebenen, und sie kann daher auch aus $1 - (1 - w_1)(1 - w_2)$ gefunden werden. Endlich ist 7) die Wahrscheinlichkeit, daß nicht beide Ereignisse eintreffen, sondern höchstens eins, gleich $1 - w_1 w_2$.

Man kann auch nach der Wahrscheinlichkeit fragen, daß entweder das Ereignis A eintreffe, oder, falls dies nicht geschehe, dann doch das Ereignis B, indem man annimmt, daß im Falle des Eintreffens von A das Ereignis B überhaupt nicht mehr in Frage komme. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dann $w_1 + (1 - w_1) w_2$, also gleich der, daß wenigstens eins der beiden Ereignisse eintrete.

Unter den relativen Wahrscheinlichkeiten zweier Ereignisse versteht man die Wahrscheinlichkeiten, die man erhält, wenn nur die Fälle berücksichtigt werden, die einem der Ereignisse günstig sind, wenn also diejenigen, die keinem günstig sind, als nicht vorhanden betrachtet werden. Sind unter n überhaupt möglichen Fällen a dem ersten und b davon verschiedene dem zweiten Ereignis günstig, so sind die relativen Wahrscheinlichkeiten gleich $\frac{a}{a+b}$ und $\frac{b}{a+b}$, oder wenn w_1, w_2 die absoluten Wahrscheinlichkeiten $\frac{a}{n}$, $\frac{b}{n}$ der betreffenden Ereignisse sind, gleich

$$\frac{w_1}{w_1 + w_2} \text{ und } \frac{w_2}{w_1 + w_2}.$$

So ist z. B. die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne mit sieben weißen, fünf roten, neun schwarzen Kugeln eher eine weiße als eine schwarze Kugel zu ziehen, gleich $\frac{7}{21} = \frac{7}{21} : \left(\frac{7}{21} + \frac{9}{21}\right)$.

Ein besonderes Interesse bietet noch die Beantwortung der Frage nach der Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereignis bei n maliger Wiederholung des Versuches a mal eintreffe und $n - a$ mal nicht eintreffe, wenn die Wahrscheinlichkeit w für das Eintreffen bei jedem einzelnen Versuche dieselbe ist. Die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis a mal hintereinander oder sonst in einer bestimmten Reihenfolge eintreffe, ist w^a, und ebenso die für das $n - a$ malige Nichteintreffen $(1 - w)^{n-a}$, mithin die für beide Forderungen zugleich bei bestimmter Reihenfolge gleich $w^a \cdot (1 - w)^{n-a}$. Ist dagegen die Reihenfolge nicht bestimmt, so hat man diese Wahrscheinlichkeit so oft zu nehmen, als verschiedene Reihenfolgen möglich sind, also so oft als die Anzahl der Permutationen von $n - a$ Elementen beträgt, von denen a der einen Art und n der andern Art einander gleich sind. Man erhält also in diesem Falle

$$\binom{n}{a} w^a (1 - w)^{n-a} \quad .$$

In ähnlicher Weise kann die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, daß von drei oder mehr Ereignissen bei einer Reihe von Versuchen jedes einzelne eine bestimmte Anzahl mal eintreffe, sowie die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereignis unter n Versuchen wenigstens a mal eintreffe. In dem letzten Falle sind die Wahrscheinlichkeiten für das ein-, zwei- u. s. w. bis a malige Eintreffen zu addieren.

4. Die wiederholten Versuche führen zur Erkenntnis der eigentlichen Bedeutung und des praktischen Wertes der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ist beispielsweise die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich $\frac{1}{6}$, so sagt dies, daß man durchschnittlich für jede sechs Wiederholungen ein einmaliges Eintreffen, und also ein fünfmaliges Nichteintreffen des Ereignisses erwarten dürfe. Damit ist keineswegs behauptet, daß dieses Eintreffen jedesmal bei sechs wiederholten Versuchen genau einmal stattfinden müsse, vielmehr kann dies öfter, oder auch erst bei einer größeren Anzahl von Versuchen der Fall sein, und jede solche Möglichkeit hat nach dem vorstehenden ihre eigene Wahrscheinlichkeit. So ist z. B. die Wahrscheinlichkeit, unter sechs Würfen mit einem Würfel gerade einmal die 1 zu werfen, durchaus nicht gleich der Gewißheit, sondern gleich $(\frac{5}{6})^5 = 0{,}4018$. Macht man aber nicht bloß sechs, sondern eine erheblich größere Anzahl von Versuchen, vielleicht 600 oder 6000, so steht zu erwarten, und die Erfahrung bestätigt dies, daß diejenigen Versuchsreihen, bei denen das Ereignis öfter eintrat, als nach seiner Wahrscheinlichkeit anzunehmen war, sich mit denen, in welchen es seltner eintrat, mehr oder minder ausgleichen werden, und daß man also durchschnittlich der aus der Wahrscheinlichkeit sich ergebenden Anzahl von Fällen des Eintreffens bei einer sehr großen Anzahl von Versuchen entsprechend nahe kommen werde.

Hiermit ist keineswegs gesagt, daß z. B. die Wahrscheinlichkeit, unter 60 Würfen mit einem Würfel genau zehnmal eine bestimmte Nummer zu werfen, größer sei, als die Wahrscheinlichkeit, diese Nummer unter sechs Würfen genau einmal zu werfen; im Gegenteil ist die zweite gleich 0,401, während die erste nur gleich 0,137 ist. Dies erklärt sich leicht dadurch, daß im zweiten Falle nach der Wahrscheinlichkeit eines einzelnen von sechs möglichen, im ersten dagegen nur nach der Wahrscheinlichkeit eines einzelnen von 60 möglichen Fällen gefragt wird. Jenem einen Fall unter sechs Würfen müßte man also bei 60 Würfen, um das gleiche Verhältnis zu erhalten, nicht einen einzelnen, sondern zehn Fälle gegenüberstellen, und es läßt sich zeigen, daß, wenn diese zehn Fälle dem erwarteten möglichst nahe liegen, die Wahrscheinlichkeit, irgend einen davon zu werfen, erheblich größer ist, als die Wahrscheinlichkeit für den einen Fall unter nur sechs Würfen. Allgemein gilt zunächst der Satz, daß bei einer großen Anzahl wiederholter Versuche die Anzahl von Wiederholungen eines Ereignisses die

größte Wahrscheinlichkeit hat, deren Verhältnis zur Gesamtzahl der Versuche gleich der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist. Ist nämlich w die einfache Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, und also, wie oben gezeigt,

$$W = \binom{n}{a} w^a \cdot (1 - w)^{n-a}$$

die Wahrscheinlichkeit, daß dieses Ereignis unter n Versuchen a mal eintreffe, so erhält man nach demselben Gesetze die Wahrscheinlichkeit für ein $a - 1$-maliges Eintreffen, wenn man W mit $\frac{a}{n - a + 1} \cdot \frac{1 - w}{w}$, und die Wahrscheinlichkeit für ein $a + 1$ maliges Eintreffen, wenn man W mit $\frac{n - a}{a + 1} \cdot \frac{w}{1 - w}$ multipliziert. Soll nun W ein Maximum sein, so müssen beide so aus W berechnete Werte kleiner als W, oder es muß

$$\frac{a}{n - a + 1} \cdot \frac{1 - w}{w} < 1 , \quad \frac{n - a}{a + 1} \cdot \frac{w}{1 - w} < 1$$

sein. Hieraus folgt

$$w > \frac{a}{n + 1} \text{ und } w < \frac{a + 1}{n + 1} .$$

Je größere Zahlen nun n und a sind, desto geringer wird der Fehler, den man durch Weglassen von $+1$ begeht; in diesem Falle aber reduzieren sich beide Ausdrücke auf

$$w = \frac{a}{n} ,$$

was der obigen Behauptung entspricht.

Die Wahrscheinlichkeit, unter 60 Würfen mit einem Würfel, oder was auf dasselbe hinauskommt, in einem Wurf mit 60 Würfeln gerade zehnmal eine bestimmte Nummer zu werfen, ist also größer als die Wahrscheinlichkeit für jede andre Anzahl von Wiederholungen dieser Nummer in gleichem Fall.

Es ergibt sich ferner aus den obigen Formeln, daß jeder von diesem wahrscheinlichsten Erfolg verschiedene Erfolg eine desto geringere Wahrscheinlichkeit besitzt, je weiter er von dem wahrscheinlichsten entfernt ist.

Daher wird beispielsweise von den Wahrscheinlichkeiten, mit einem Würfel eine bestimmte Nummer in sechs Würfen einmal, oder in 60 Würfen diese Nummer oder eine von neun ihr möglichst nahe liegenden, oder in 600 Würfen diese Nummer oder eine von 99 ihr möglichst nahe liegenden u. s. w. zu werfen, jede folgende größer als die vorhergehende, und die Wahrscheinlichkeit, bei einer sehr großen Anzahl von Würfen die erwartete Nummer selbst zu treffen oder doch ihr sehr nahe zu kommen, wird immer größer.

Die vorstehenden Erörterungen geben den wesentlichen Inhalt des Gesetzes der großen Zahlen an.

Dieses Gesetz gestattet, bei Aufgaben, für die die nötigen Data zur Bestimmung der Anzahl der möglichen und günstigen Fälle nicht vorhanden sind, einen angenäherten Wert der Wahrscheinlichkeit aus den Resultaten einer Reihe von Versuchen zu bestimmen. Hat man bei n Versuchen a mal das Eintreffen eines bestimmten Ereignisses beobachtet, so ist, falls n eine sehr große Zahl ist, $\frac{a}{n}$ ein angenäherter Wert der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses.

Derartige Fälle finden z. B. statt, wenn nach der Wahrscheinlichkeit gefragt wird, daß eine in einem gewissen Alter stehende Person noch eine gewisse Anzahl von Jahren leben, oder daß ein versichertes Gebäude innerhalb einer be-

stimmten Frist abbrennen werde u. dgl. m. In solchen Fällen dienen statistische Ermittlungen zur Bestimmung einer angenäherten Wahrscheinlichkeit, und diese hat um so größeren Wert, je größer die Zahl der angestellten Beobachtungen ist. Hat man z. B. beobachtet, daß von 100 Personen, die 35 Jahre alt sind, nach zwölf Jahren noch 81 leben, so kann man für die Wahrscheinlichkeit eines jetzt 35 Jahre alten Menschen, daß er nach zwölf Jahren noch am Leben sei, $\frac{81}{100}$ setzen. Diese Wahrscheinlichkeit bietet, wenn wirklich nur 100 Menschen beobachtet sein sollten, jedoch nur sehr geringe Gewähr, der Wahrheit nahe zu kommen, da in diesem Falle die Wirkung zufälliger Ausnahmezustände nicht ausgeschlossen sein würde. Erstreckten sich dagegen die Beobachtungen auf die Bewohner eines ganzen Staates und ergab sich hier, daß durchschnittlich auf je 100 Menschen noch 81 am Leben waren, so hat man für die Wahrscheinlichkeit 0,81 eine viel größere Bürgschaft der Annäherung an die Wirklichkeit.

Die auf diese Weise bestimmte Wahrscheinlichkeit nennt man Wahrscheinlichkeit a posteriori im Gegensatz zu der aus der genauen Kenntnis der Anzahl der Fälle abgeleiteten Wahrscheinlichkeit a priori.

5. Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung finden zunächst statt bei Glücksspielen und Wetten. Hierbei gilt der Satz, daß die Einsätze der Spielenden sich verhalten müssen, wie ihre Wahrscheinlichkeiten, zu gewinnen.

Wettet z. B. jemand, daß er mit einem Würfel auf einen Wurf die Nummer 1 werfen werde, so hat er mit seinem Gegner nicht gleiche Chancen des Gewinnes. Es ist daher billig, daß dieser, der eine fünfmal so große Wahrscheinlichkeit hat zu gewinnen, auch einen fünfmal so hohen Einsatz biete als jener. Bei wiederholten Spielen steht dann zu erwarten, daß Verlust und Gewinn beider Spieler sich um so mehr — den betreffenden Wahrscheinlichkeiten entsprechend — ausgleichen werden, je größer die Anzahl der Spiele ist.

Ist überhaupt auf das Eintreffen eines Ereignisses ein Preis C gesetzt, so nennt man mathematische Hoffnung des Preises das Produkt aus diesem und der Wahrscheinlichkeit w, daß das Ereignis eintrete. Dieses Produkt $w \cdot C$ bestimmt die Größe des Einsatzes e, den der das Ereignis erwartende Spieler zu machen hat. Spielen also mehrere um denselben Preis C, und sind die betreffenden Wahrscheinlichkeiten zu gewinnen w_1, w_2, $w_3 \ldots$ und die bezüglichen Einsätze e_1, e_2, $e_3 \ldots$, so muß

$$e_1 : e_2 : e_3 : \ldots = w_1 C : w_2 C : w_3 C : \ldots = w_1 : w_2 : w_3 : \ldots$$

sein. Die Summe $e_1 + e_2 + e_3 + \ldots$ sämtlicher Einsätze muß den gesetzten Preis C ausmachen; dieser verteilt sich also auf die einzelnen Einsätze nach dem Verhältnis der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten.

Sind gleichzeitig auf das Eintreffen mehrerer voneinander unabhängiger Ereignisse Preise C_1, C_2, $C_3 \ldots$ gesetzt worden, so ist die mathematische Hoffnung für das Erlangen eines dieser Preise gleich der Summe der mathematischen Hoffnungen für die einzelnen Preise, und demnach der zu leistende Einsatz

$$e = w_1 C_1 + w_2 C_2 + w_3 C_3 + \ldots \quad ;$$

denn man kann diesen Fall ebenso ansehen, als wenn ebenso viele voneinander unabhängige Spiele gemacht würden als Preise vorhanden sind und deshalb ist der Gesamteinsatz auch gleich der Summe der Einsätze für diese einzelnen Spiele. Dabei kann es auch vorkommen, daß der eine oder der andre der Preise negativ ist, d. h. daß bei dem Eintreffen des bezüglichen Ereignisses von dem Spieler ein Betrag herausgezahlt werden soll.

Es seien z. B. in einer Lotterie von 1000 Nummern ein Preis von 10 000 ℳ, 10 Preise von 1000 ℳ und 100 Preise von 100 ℳ ausgesetzt, so ist der Wert eines einzelnen Loses gleich

$$\tfrac{1}{1000} \cdot 10000 + \tfrac{10}{1000} \cdot 1000 + \tfrac{100}{1000} \cdot 100 = 30 \text{ ℳ} \quad .$$

Soll ferner aus einer Urne mit sieben weißen und drei schwarzen Kugeln eine Kugel unter der Bedingung gezogen werden, daß, wer eine weiße Kugel zieht, 1 ℳ erhält, dagegen wer eine schwarze Kugel zieht, 1 ℳ zahlt, so beträgt der Einsatz für einen einzelnen Zug

$$\tfrac{7}{10} \cdot 1 - \tfrac{3}{10} \cdot 1 = \tfrac{2}{5} \text{ ℳ} .$$

Werden die ausgesetzten Preise erst in späteren Terminen fällig, so sind sie vor der Berechnung des Einsatzes auf ihren gegenwärtigen Wert zu diskontieren.

Von der mathematischen Hoffnung des Preises ist die des Gewinnes oder des Verlustes zu unterscheiden, die erst nach Berechnung des Einsatzes ermittelt werden kann. Der Gewinn des Spielers ist gleich dem Überschuß des Preises über den Einsatz, also gleich $c - e$, oder was dasselbe ist, gleich dem Einsatz des Gegners oder der Summe der Einsätze sämtlicher mitspielender Gegner. Die mathematische Hoffnung des Gewinnes, die das mathematische Risiko genannt wird, ist gleich dem Produkt aus dem zu erwartenden Gewinn und der Wahrscheinlichkeit zu gewinnen, also gleich $w \cdot (c - e)$, oder bei zwei Spielern, deren Einsätze e_1 und e_2 und deren Wahrscheinlichkeiten zu gewinnen w_1 und w_2 sind, $w_1 \cdot e_2$ und $w_2 \cdot e_1$.

Ist das mathematische Risiko auf beiden Seiten gleich groß, so verhalten sich ebenfalls die Einsätze, wie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten oder aus $w_1 e_2 = w_2 e_1$ folgt $w_1 : w_2 = e_1 : e_2$ und umgekehrt.

Eine weitere Anwendung findet die Wahrscheinlichkeitsrechnung in dem Versicherungswesen, also bei Feuerversicherungs-, Lebensversicherungs-, Witwenkassen, bei der Versicherung gegen Unfall, Krankheit, Invalidität u. s. w. Die hier den Berechnungen zu Grunde gelegten Wahrscheinlichkeiten sind solche *a posteriori*, die durch statistische Ermittelungen festgestellt werden.

§ 31. Der binomische Lehrsatz.

1. Die Aufgabe, die Potenz $(a \pm b)^n$ eines Binoms zu entwickeln, ist für eine natürliche Zahl n ein besonderer Fall der Aufgabe, ein Produkt von der Form

$$(a \pm b_1)(a \pm b_2)(a \pm b_3) \ldots (a \pm b_n)$$

zu entwickeln. Diese allgemeine Aufgabe kann mit Hilfe der Kombinatorik gelöst werden.

Durch Ausführung der Multiplikationen erhält man zunächst

$$(a + b_1)(a + b_2) = a^2 + a(b_1 + b_2) + b_1 b_2 ,$$

$$(a + b_1)(a + b_2)(a + b_3) = a^3 + a^2(b_1 + b_2 + b_3) + a(b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3) + b_1 b_2 b_3 ,$$

$$(a + b_1)(a + b_2)(a + b_3)(a + b_4) = a^4 + a^3(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) + a^2(b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_1 b_4 + b_2 b_3 + b_2 b_4 + b_3 b_4) + a(b_1 b_2 b_3 + b_1 b_2 b_4 + b_1 b_3 b_4 + b_2 b_3 b_4) + b_1 b_2 b_3 b_4$$

u. s. w.

Sucht man nach einem diesen einzelnen Entwicklungen gemeinsamen Bildungsgesetz, so fällt sofort in die Augen, daß die Entwicklungen aus Gliedern bestehen, die nach abnehmenden Potenzen von a fortschreiten. Das erste Glied ist jedesmal die Potenz von a, deren Exponent gleich der Anzahl der binomischen Faktoren auf der linken Seite ist; jedes folgende Glied enthält eine Potenz von a, deren Exponent um 1 kleiner ist als in dem vorhergehenden Gliede, multipliziert der Reihe nach mit der Summe der b, der Summe der Produkte von je 2, 3 u. s. w. b. Das letzte Glied ist demnach a^0, also ohne a, multipliziert mit

dem Produkte aller b. Bezeichnet man mit $[b_1 b_2 b_3 \dots b_k]$ die Summe der Produkte von je k der b, so hat man

$$(a+b_1)(a+b_2)(a+b_3)\dots(a+b_n)$$
$$= a^n + a^{n-1}[b_1] + a^{n-2}[b_1 b_2] + a^{n-3}[b_1 b_2 b_3] + \dots + a[b_1 b_2 b_3 \dots b_{n-1}] + b_1 b_2 b_3 \dots b_n .$$

Jedes Glied der Entwicklung außer dem ersten läßt sich also in der Form darstellen

$$a^{n-k}[b_1 b_2 b_3 \dots b_k] ,$$

wenn man für k der Reihe nach die natürlichen Zahlen von 1 bis n setzt.

Läßt man die b einander gleich werden, so wird das Produkt $b_1 b_2 b_3 \dots b_k = b^k$ und die Anzahl dieser Potenzen b^k ist die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur Klasse k also $\binom{n}{k}$. Daher wird das allgemeine Glied der vorigen Entwicklung

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

und da die linke Seite nunmehr $(a+b)^n$ ist, so erhält man:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n .$$

Die Entwicklung von $(a-b)^n$ erhält man hieraus, wenn man $-b$ an Stelle von b treten läßt und beachtet, daß

$$(-b)^1 = -b^1 , \quad (-b)^2 = +b^2 , \quad \dots (-b)^k = (-1)^k b^k$$

ist. Damit ergibt sich, wenn man beide Entwicklungen zusammenfaßt:

$$1) \qquad (a \pm b)^n = a^n \pm \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 \pm \dots + (-1)^n \binom{n}{n} b^n .$$

Diese Formel drückt den binomischen Lehrsatz aus. Nach ihm ist die Entwicklung der n-ten Potenz eines Binoms $a \pm b$ ein Ausdruck von $n+1$ Gliedern, deren jedes aus Faktoren a und b besteht, deren Anzahl zusammen n ist. Jedes folgende Glied wird aus dem vorhergehenden gebildet, indem man einen Faktor a weniger und einen Faktor b mehr nimmt. Außerdem enthält jedes Glied einen Koeffizienten, der die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur Klasse 1, 2 ... bis n ist. Der Koeffizient des ersten Gliedes a^n ist 1. Die Potenz einer Summe ist eine Summe, die Potenz einer Differenz ein Polynom, dessen Glieder alternierende Vorzeichen haben und zwar das erste stets $+$, das letzte $+$ oder $-$, je nachdem n gerade oder ungerade ist. So ist z. B.

$$(a \pm b)^{10} = a^{10} \pm \binom{10}{1} a^9 b + \binom{10}{2} a^8 b^2 \pm \binom{10}{3} a^7 b^3 + \dots \pm \binom{10}{9} a b^9 + \binom{10}{10} b^{10} .$$

Berechnet man die Koeffizienten nach § 29 Nr. 2 durch die Formel

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} ,$$

so erhält man die Binomialkoeffizienten zur n-ten Potenz. Z. B. für $n = 10$ ist:

$$(a \pm b)^{10} = a^{10} \pm 10 a^9 b + 45 a^8 b^2 \pm 120 a^7 b^3 + 210 a^6 b^4 \pm 252 a^5 b^5$$
$$+ 210 a^4 b^6 \pm 120 a^3 b^7 + 45 a^8 b^2 \pm 10 a b^9 + b^{10} .$$

Setzt man $a = 1$, $\pm b = x$, so erhält man den binomischen Lehrsatz in der einfacheren Form

$$2) \qquad (1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \dots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} + \binom{n}{n} x^n .$$

Das allgemeine Glied ist hier

$$\binom{n}{k} x^k \quad .$$

Diese Entwicklung gilt nach § 13 Nr. 4 auch, wenn x eine komplexe Zahl ist und das Resultat ist wieder eine komplexe Zahl.

2. Der Binomialkoeffizient der n-ten Potenz mit dem Zeiger k

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}$$

erscheint in Form eines Bruches, dessen Zähler und Nenner Produkte aus gleichviel, nämlich k, Faktoren sind. Der Zähler ist das Produkt der k natürlichen Zahlen absteigend von n, der Nenner das Produkt der k natürlichen Zahlen von 1 bis k. Nun ist immer eine von zwei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen gerade, also durch 2 teilbar, mithin ist ihr Produkt durch 2 teilbar. Ebenso muß das Produkt von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen durch 3, aber auch durch 2, mithin durch $2 \cdot 3$ teilbar sein. So weiter fortfahrend kommt man zu dem Schlusse, daß das Produkt von k aufeinander folgenden natürlichen Zahlen durch $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k = k!$ teilbar sein muß. Jeder Binomialkoeffizient muß also eine natürliche Zahl sein, was allerdings schon aus seiner Bedeutung als Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur Klasse k hervorgeht.

Da nach § 29 Nr. 2

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

ist, so folgt

$$3) \qquad \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k} \quad ,$$

d. h. Binomialkoeffizienten, deren Zeiger sich zum Exponenten n ergänzen, sind einander gleich. So hat man in dem Beispiel in Nr. 1

$$\binom{10}{1} = \binom{10}{9}, \quad \binom{10}{2} = \binom{10}{8}, \quad \binom{10}{3} = \binom{10}{7}, \quad \binom{10}{4} = \binom{10}{6} \quad .$$

Daraus folgt allgemein, daß in der Formel des binomischen Lehrsatzes, das zweite und vorletzte, das dritte und drittletzte u. s. f., also die symmetrisch stehenden Glieder gleiche Koeffizienten haben und daß man die Berechnung dieser Koeffizienten nur bis zum mittleren bei geradem, bis zu beiden mittleren bei ungeradem Exponenten fortzusetzen braucht. Da nun

$$\binom{n}{n} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} = 1$$

ist, so ist konsequent

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

zu setzen. In der Tat würde nach der Gesetzmäßigkeit das erste Glied in der Entwicklung des binomischen Satzes den Koeffizienten $\binom{n}{0}$ haben müssen.

Es ist

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k \cdot (k+1)} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1} \quad ,$$

also

$$4) \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \left(1 + \frac{n-k}{k+1}\right) = \binom{n}{k} \cdot \frac{n+1}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \quad .$$

Die Summe zweier aufeinander folgender Binomialkoeffizienten zur n-ten Potenz gibt also einen Binomialkoeffizienten zur $n+1$-ten Potenz.

Hiernach können die Binomialkoeffizienten für die aufeinander folgenden Exponenten von 0 und 1 an durch Addition berechnet werden. Man erhält so das sogenannte PASCALsche Dreieck:

$n = 0,$ 1
1, 1 1
2, 1 2 1
3, 1 3 3 1
4, 1 4 6 4 1
5, 1 5 10 10 5 1
6, 1 6 15 20 15 6 1
7, 1 7 21 35 35 21 7 1

u. s. w.

Der letzte Binomialkoeffizient ist $\binom{n}{n} = 1$; wollte man nach der Definition den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{n+r}$ entwickeln, so würden im Zähler nach dem Faktor 1 der Faktor 0 vorkommen; es ist also

$$5) \qquad \binom{n}{n+r} = 0 \quad ,$$

d. h. ein Binomialkoeffizient, dessen Zeiger größer als der Exponent ist, hat den Wert 0.

Nach 4) hat man auch

$$\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1} \quad .$$

Setzt man in dieser Formel an Stelle von n der Reihe nach $n-1$, $n-2$, $\ldots k$, so erhält man

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k} &= \binom{n}{k+1} - \binom{n-1}{k+1} \quad , \\
\binom{n-2}{k} &= \binom{n-1}{k+1} - \binom{n-2}{k+1} \quad , \\
&\vdots \\
\binom{k+1}{k} &= \binom{k+2}{k+1} - \binom{k+1}{k+1} \quad , \\
\binom{k}{k} &= \binom{k+1}{k+1} - \binom{k}{k+1} \quad .
\end{aligned}$$

Addiert man diese $n-k+1$ Gleichungen, so hebt sich auf der rechten Seite jeder Gleichung der Subtrahend gegen den Minuenden der folgenden und da der letzte Subtrahend nach 5)

$$\binom{k}{k+1} = 0$$

ist, so erhält man

$$6) \qquad \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \ldots + \binom{k}{k} = \binom{n+1}{k+1} \quad .$$

Setzt man in 2) $x = 1$ und für das erste Glied 1 auf der rechten Seite $\binom{n}{0}$, so ergibt sich

$$7) \qquad \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n \quad ,$$

d. h. die Summe aller Binomialkoeffizienten zu derselben Potenz ist 2^n.

Setzt man in 2) $x = -1$, so folgt

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0 \quad ,$$

also mit Berücksichtigung von 7)

$$8) \quad \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = 2^{n-1} \quad ,$$

d. h. die Summen der Binomialkoeffizienten mit geradem und ungeradem Zeiger sind gleich.

Sechster Abschnitt.

Die Reihen.

§ 32. Die arithmetische Reihe.

1. Eine Reihe besteht aus einer Anzahl von Gliedern, die nach demselben Gesetze gebildet sind. So sind

$$\frac{1}{1}, \ \frac{1}{1 \cdot 2}, \ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}, \ \ldots \ ;$$

$$a, \ 2a, \ 3a, \ 4a, \ 5a, \ \ldots ; \quad 1, \ 2x, \ 3x^2, \ 4x^3, \ \ldots$$

Reihen, deren Bildungsgesetze leicht ersichtlich sind.

Eine Reihe ist bestimmt durch das Anfangsglied, das Bildungsgesetz und die Anzahl der Glieder.

Das einfachste Beispiel einer Reihe ist die Reihe der natürlichen Zahlen. Das Anfangsglied ist 1 oder eine beliebige natürliche Zahl; jedes folgende Glied erhält man aus dem vorhergehenden, indem man um 1 weiter zählt. Die Anzahl der Glieder ist eine beliebige natürliche Zahl. Eine Erweiterung dieses einfachsten Begriffs einer Reihe erhält man, wenn man als Anfangsglied eine beliebige Zahl a nimmt und zu ihr eine beliebige Zahl d, zu der so erhaltenen wieder d addiert u. s. f., so daß man damit die Reihe

$$a, \ a + d, \ a + 2d, \ a + 3d, \ \ldots$$

erhält. Diese Reihe heißt eine arithmetische Reihe oder arithmetische Progession. Soll man umgekehrt feststellen, ob eine Anzahl von Zahlen eine solche Reihe bilden, so hat man von jeder Zahl die vorhergehende zu subtrahieren und es muß sich dann immer dieselbe Differenz ergeben. Daraus folgt die Definition: Eine arithmetische Reihe ist eine Reihe, bei der die Differenz zweier aufeinander folgenden Glieder konstant ist. Diese konstante Differenz heißt Differenz der Reihe.

Eine arithmetische Reihe ist demnach bestimmt durch das Anfangsglied a, die Differenz d und die Anzahl n der Glieder. Die Zahlen a und d können beliebige, im allgemeinen komplexe Zahlen, sein; n ist immer eine natürliche Zahl. Bei praktischen Anwendungen sind a und d gewöhnlich reell; ist dann $d > 0$, so ist die Reihe steigend, ist $d < 0$, so ist sie fallend. In dem besondern Falle $d = 0$ würden die Glieder alle einander gleich sein. Man kann jede Reihe als

steigend oder fallend ansehen, je nachdem man sie vorwärts oder rückwärts geschrieben denkt. Eine wird also in die andre verwandelt, indem man $-d$ an Stelle von d nimmt.

Nach der Definition der Reihe hat man nun das n-te Glied oder Endglied der Reihe:

$$1) \qquad t = a + (n-1)d \quad .$$

Gibt man n der Reihe nach die Werte der aufeinander folgenden natürlichen Zahlen $1, 2 \ldots n$, so erhält man alle Glieder der Reihe. Die Formel 1) gibt daher auch das allgemeine Glied der Reihe.

Es sei z. B. gefragt, welchen Weg ein frei fallender Körper in der achten Sekunde der Fallzeit zurücklegt, wenn bekannt ist, daß ein solcher, abgesehen von dem Widerstande der Luft, in der ersten Sekunde 4,904 m und in jeder folgenden Sekunde 9,808 m mehr als in der vorhergehenden durchfällt. Hier ist

$$t = 4{,}904 + 7 \cdot 9{,}808 = 73{,}560 \ m \quad .$$

Welches ist die n-te ungerade Zahl? Die ungeraden Zahlen $1, 3, 5 \ldots$ bilden eine arithmetische Reihe mit dem Anfangsglied 1 und der Differenz 2, folglich ist das n-te Glied der Reihe

$$t = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1 \quad .$$

2. Eine praktisch wichtige Aufgabe ist, die Summe beliebig vieler Glieder einer Reihe zu finden. Bei geringer Anzahl der Glieder hat das keine weitere Schwierigkeit, wird aber sehr umständlich, wenn sie groß ist. So wäre es weitläufig, die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 100 direkt zu berechnen. Man faßt daher die Aufgabe, die Summe einer Reihe zu bilden so: einen Ausdruck zu finden, der die Summe beliebig vieler Glieder einer Reihe angibt, ohne daß man nötig hat, die einzelnen Glieder zu berechnen und zu addieren.

Um die Summe s einer arithmetischen Reihe zu finden, schreibt man diese einmal von a anfangend mit der Differenz d und das andre Mal von t anfangend mit der Differenz $-d$, so daß man erhält:

$$s = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (a + \overline{n-1}\, d) \quad ,$$
$$s = t + (t-d) + (t-2d) + \ldots + (t - \overline{n-1}\, d) \quad .$$

Addiert man die beiden Gleichungen Glied für Glied und beachtet, daß jede n Glieder hat, so ergibt sich

$$2s = n(a+t) \quad ,$$

also

$$2) \qquad s = \tfrac{1}{2} n(a+t) \quad .$$

So ist z. B. die Summe der ersten 50 Zahlen der natürlichen Zahlenreihe gleich $\frac{1}{2}(1+50) \cdot 50 = 51 \cdot 25 = 1275$.

Der von einem frei fallenden Körper in 8 *sec* zurückgelegte Weg ist nach dem Beispiele in Nr. 1 gleich

$$\tfrac{1}{2}(4{,}904 + 73{,}560) \cdot 8 = 78{,}464 \cdot 4 = 313{,}856 \ m \quad .$$

Die Summe der n ersten ungeraden Zahlen ist

$$\tfrac{1}{2} n(1 + 2n - 1) = n^2 \quad ,$$

also immer eine Quadratzahl.

Die Formeln 1) und 2) sind nicht nur als Bestimmungsgleichungen für die Unbekannten t und s, sondern auch als Beziehungsgleichungen zwischen den fünf Größen a, d, n, t, s zu betrachten, die die Berechnung von zwei dieser Größen aus den drei andern gestatten, indem man sie auf die gesuchten Größen als Unbekannte aufzulösen hat.

Wählt man hiernach aus jenen fünf Größen auf alle möglichen Arten zwei als die zu berechnenden aus, so erhält man $\binom{5}{2} = 10$ Aufgaben, nämlich außer der schon gelösten, in der t und s gesucht wurden, noch die folgenden, in denen die Unbekannten

1) a, t; 2) d, t; 3) n, t; 4) a, s; 5) d, s; 6) n, s; 7) a, d; 8) a, n; 9) d, n sind.

Für die meisten dieser Aufgaben ist es bequem, die Formeln 2) und 3) zu schreiben

$$t + a = \frac{2s}{n}, \qquad t - a = (n - 1)d \quad .$$

Da die Werte von a, d, t, s beliebige Zahlen, auch komplexe, sein können, so würde jede der zehn Aufgabe immer lösbar sein, wenn sich für n, falls es unbekannt ist, eine natürliche Zahl ergibt. Daß dies für beliebig angenommene Werte der übrigen Zahlen im allgemeinen nicht der Fall sein wird, folgt schon daraus, daß mehrere der Aufgaben auf eine quadratische Gleichung für n führen. So erhält man, wenn a, d, s gegeben ist, durch Elimination von t die quadratische Gleichung

$$dn^2 + (2a - d)n - 2s = 0 \quad ,$$

deren Wurzeln nur in besondern Fällen natürliche Zahlen sein werden. Eine eingekleidete Aufgabe dieser Art wird daher, wenn die gegebenen Zahlwerte nicht von einer wirklich aufgestellten Reihe genommen sind, im allgemeinen unlösbar sein.

3. Kennt man irgend ein Glied a_k einer arithmetischen Reihe und die Differenz d, so ist jedes Glied der Reihe bestimmt. Das r-te vorhergehende Glied ist

$$a_{k-r} = a_k - rd$$

und das r-te folgende

$$a_{k+r} = a_k + rd \quad .$$

Aus beiden Gleichungen folgt noch

$$a_k = \tfrac{1}{2}(a_{k-r} + a_{k+r}) \quad ,$$

d. h. jedes Glied ist das arithmetische Mittel aus den beiden gleich weit von ihm entfernten Gliedern. Ist daher die Anzahl n der Glieder ungerade, so ist die Summe der Reihe das n-fache des mittleren Glieds.

Aus irgend zwei Gliedern der Reihe ist die Differenz bestimmt, wenn man die Anzahl der zwischenliegenden Glieder kennt. Aus der ersten Gleichung hat man

$$d = \frac{a_k - a_{k-r}}{r} \quad .$$

Davon wird Gebrauch gemacht bei der Aufgabe, zwischen zwei Zahlen a und b eine Anzahl Glieder einer arithmetischen Reihe einzuschalten (zu interpolieren).

In komplizierteren Aufgaben, bei denen eine arithmetische Reihe von einer gegebenen Gliederzahl zu bestimmen ist, braucht man nicht immer das Anfangsglied und die Differenz als Unbekannte anzusehen, sondern erhält durch Einführung andrer Unbekannten meist einfachere Gleichungen.

Es sei z. B. eine arithmetische Reihe von vier Gliedern zu finden, von denen die Summe a und die Summe der Quadrate b gegeben ist. Sind die mittleren Glieder x und y, so ist die Differenz $y - x$, also heißt die Reihe

$$2x - y, \quad x, \quad y, \quad 2y - x$$

und man hat die Gleichungen

$$2(x+y) = a\,,\quad x+y = \tfrac{1}{2}a$$

und

$$(2x-y)^2 + x^2 + y^2 + (2y-x)^2 = 6x^2 - 8xy + 6y^2 = b\quad,$$

die ein leicht zu lösendes quadratisches System bilden. Dieses liefert $y-x$, wobei die beiden Werte, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, bloß eine Lösung der Aufgabe ergeben, da man eine Reihe nach Belieben auf- oder absteigend schreiben kann.

Ist die Summe a einer arithmetischen Reihe von fünf Gliedern und das Produkt b der Glieder gegeben, so ist das mittlere Glied $\frac{1}{5}a$ und die Reihe heißt, wenn x die Differenz ist:

$$\tfrac{1}{5}a - 2x\,,\ \tfrac{1}{5}a - x\,,\ \tfrac{1}{5}a\,,\ \tfrac{1}{5}a + x\,,\ \tfrac{1}{5}a + 2x\quad.$$

Demnach ergibt sich für x, wenn $a = 5m$ gesetzt wird, die Gleichung:

$$(m-2x)(m-x)m(m+x)(m+2x) = b\quad,$$

die sich

$$(m^2 - 4x^2)(m^2 - x^2) = \frac{b}{m}$$

schreiben und als quadratische Gleichung für x^2 lösen läßt.

§ 33. Die geometrische Reihe.

1. Eine geometrische Reihe oder geometrische Progression ist eine Reihe, bei der jedes folgende Glied aus dem vorhergehenden durch Multiplikation mit derselben Zahl entsteht, oder mit andern Worten, bei der der Quotient je zweier aufeinander folgender Glieder (das vorhergehende als Divisor genommen) konstant ist. Diesen konstanten Wert nennt man den Quotienten der geometrischen Reihe.

Ist a das Anfangsglied, q der Quotient einer geometrischen Reihe, so ist das zweite Glied aq, das dritte aq^2, das vierte aq^3 u. s. w., also das n-te Glied oder Endglied der Reihe

$$1)\qquad t = aq^{n-1}\quad.$$

Nach dieser Formel ist jedes Glied der Reihe zu berechnen, wenn man für n die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 ... der Reihe nach setzt; sie gibt also das allgemeine Glied der Reihe.

Während n eine natürliche Zahl ist, kann a und q jede beliebige Zahl, auch eine komplexe, sein. Sind a und q reell, so ist die Reihe steigend oder fallend, je nachdem $q^2 \gtrless 1$ ist, d. h. je nachdem der absolute Wert von q größer oder kleiner als 1 ist. Das Vorzeichen von q kommt nur insofern in Betracht, als bei negativem q die Glieder der Reihe alternierende Vorzeichen erhalten. Eine steigende geometrische Reihe wird zu einer fallenden oder umgekehrt, wenn man an Stelle von q den reziproken Wert $1:q$ treten läßt und die Reihenfolge der Glieder in die entgegengesetzte verwandelt.

Um die Summe einer geometrischen Reihe

$$s = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1}$$

zu erhalten, multipliziert man sie mit q, wodurch man

$$qs = \quad aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n$$

erhält. Durch Subtraktion der ersten von der zweiten Gleichung ergibt sich

$$qs - s = aq^n - a\quad,$$

also

$$2) \qquad s = a\frac{q^n - 1}{q - 1} = a\frac{1 - q^n}{1 - q} \quad .$$

Die erste oder zweite Schreibweise wird man anwenden, je nachdem die Reihe steigt oder fällt.

Eine geometrische Reihe ist z. B.

$$x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1} \quad ,$$

wobei das Anfangsglied x^{n-1} und der Quotient $y : x$ ist; man hat daher die Summe

$$s = x^{n-1}\frac{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^n}{1 - \frac{y}{x}} = \frac{x^n - y^n}{x - y} \quad ,$$

wie aus § 5 Nr. 6 bereits bekannt ist.

2. Da zwischen den fünf Größen a, q, n, t, s die zwei Beziehungen 1) und 2) existieren, so ist eine geometrische Reihe durch drei dieser fünf Größen bestimmt. Dies gibt zehn verschiedene Aufgaben. Die Bestimmung von n führt auf eine Exponentialgleichung, deren Lösung nur brauchbar ist, wenn sie n als eine natürliche Zahl ergibt. Die Bestimmung von q, wenn n gegeben ist, führt anf eine Gleichung n — 1-ten Grades.

Kennt man ein Glied a_k einer geometrischen Reihe und den Quotienten q, so ist jedes Glied der Reihe bestimmt. Das r-te vorhergehende und das r-te folgende ist

$$a_{k-r} = a_k \cdot q^{-r}, \quad a_{k+r} = a_k \cdot q^r \quad .$$

Durch Multiplikation erhält man

$$a_{k-r} \cdot a_{k+r} = a_k^2, \quad a_k = \sqrt{a_{k-r} \cdot a_{k+r}} \quad ,$$

d. h. jedes Glied einer geometrischen Reihe ist das geometrische Mittel zwischen zwei gleichweit abstehenden Gliedern. Durch Division erhält man

$$q = \sqrt[r]{\frac{a_k}{a_{k-r}}} \quad .$$

Soll man zwischen zwei Zahlen a und b, n Glieder einer geometrischen Progression einschalten (interpolieren), so erhält man die Reihe von $n + 2$ Gliedern:

$$a, \quad \sqrt[n+1]{a^n b}, \quad \sqrt[n+1]{a^{n-1} b^2}, \ldots \quad \sqrt[n+1]{a b^n}, \quad b \quad .$$

So geben die aufeinander folgenden Intervalle der gleichschwebenden Temperatur zwischen Prime und Oktave, die geometrische Reihe

$$1, \quad \sqrt[12]{2}, \quad \sqrt[12]{2^2}, \quad \sqrt[12]{2^3}, \ldots \quad \sqrt[12]{2^{11}}, \quad 2 \quad .$$

In zusammengesetzten Aufgaben, bei denen eine geometrische Reihe von gegebener Gliederzahl und mit gewissen Eigenschaften herzustellen ist, kann man ähnlich wie in § 32 Nr. 3 verfahren.

Die Summenformel 2), die man mit Benutzung von 1) schreiben kann:

$$s = \frac{qt - a}{q - 1} = \frac{a - qt}{1 - q}$$

dient auch zur Summierung andrer Reihen, die mit geometrischen Reihen gewisse Analogien bieten. Soll z. B. die Summe der arithmetisch-geometrischen Reihe

$$s = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1} \quad ,$$

bei der die Potenzen von x eine geometrische, deren Koeffizienten eine arithmetische Reihe bilden, gefunden werden, so kann sie in die Summe der n geometrischen Reihen

$$\begin{aligned} &1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-2} + x^{n-1} \\ &\quad + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-2} + x^{n-1} \\ &\qquad + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-2} + x^{n-1} \\ &\qquad\qquad \vdots \\ &\qquad\qquad + x^{n-2} + x^{n-1} \\ &\qquad\qquad\quad + x^{n-1} \end{aligned}$$

zerlegt werden. Summiert man nach der obigen Formel jede einzelne, so ist

$$\begin{aligned} s &= \frac{1 - x^n}{1 - x} + \frac{x - x^n}{1 - x} + \frac{x^2 - x^n}{1 - x} + \ldots + \frac{x^{n-2} - x^n}{1 - x} + \frac{x^{n-1} - x^n}{1 - x} \\ &= \frac{(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}) - n x^n}{1 - x} = \frac{(1 - x^n) : (1 - x) - n x^n}{1 - x} \\ &= \frac{1 - (n + 1) x^n + n x^{n+1}}{(1 - x)^2} \end{aligned}$$

3. Die Anzahl der Glieder einer Reihe kann unendlich wachsend angenommen werden. Man erhält dann eine unendliche Reihe.

Setzt man in der Summenformel der geometrischen Reihe

$$s = a \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

die Anzahl n der Glieder unendlich groß, so wird q^n ebenfalls unendlich groß, wenn $q^2 > 1$ ist. Ist dagegen $q^2 < 1$, so werden die Potenzen von q bei wachsenden Exponenten n beständig kleiner, und nähern sich, wenn n unendlich wachsend gedacht wird, ohne Ende der Grenze Null. Daher erhält man in diesem Fall auch für die Summe der Reihe den bestimmten endlichen Grenzwert

$$3) \qquad s = \frac{a}{1 - q} .$$

Um die Bedeutung dieser Formel klar zu stellen, kann das Beispiel der Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \ldots$$

dienen, deren Quotient $q = \frac{1}{2}$ ist, und für die sich aus der Formel 3) die Summe 2 ergibt. Nimmt man bloß das erste Glied 1, so fehlt an dieser Summe noch 1; das zweite Glied fügt die Hälfte dieses fehlenden Restes hinzu, und es fehlt also nach Summierung der zwei ersten Glieder noch $\frac{1}{2}$. Addiert man noch das dritte Glied, das wieder die Hälfte des vorhergehenden Restes beträgt, so bleibt aufs neue die Hälfte des Restes, also $\frac{1}{4}$, als Differenz zwischen der erhaltenen Summe s_3 und der Summe 2. In gleicher Weise ist s_4 um $\frac{1}{8}$, s_5 um $\frac{1}{16}$ u. s. w. kleiner als 2. Hiernach kommt man durch Summierung der Glieder der vorstehenden Reihe dem Werte 2 um so näher, je größer die Anzahl der addierten Glieder ist. Man kann sich ferner diesem Werte unbegrenzt nähern, d. h. es läßt sich keine Zahl angeben, die so klein ist, daß der Unterschied der genannten Summe von 2 nicht durch Addierung einer bestimmten Anzahl von Gliedern noch kleiner gemacht werden kann. Da nämlich die Summe s_{n+1} der $n + 1$ ersten Glieder von 2 nur um $\frac{1}{2^n}$ verschieden ist, so kann man, wenn ε irgend eine beliebig gewählte kleine Zahl bedeutet, stets n so bestimmen,

daß dieser Unterschied $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ ist, da zu diesem Zwecke nur $2^n > \frac{1}{\varepsilon}$, oder $n > (-\log \varepsilon) : \log 2$ angenommen zu werden braucht. — Die Zahl 2 ist also der Grenzwert, dem man sich durch Addierung von Gliedern der Reihe bei wachsender Anzahl dieser Glieder mehr und mehr nähert, dem man ferner auf diese Weise über jeden bestimmten Betrag hinaus, also unbegrenzt nahe kommen kann, der jedoch niemals wirklich erreicht wird, sobald man die zu summierende Reihe bei irgend einem Gliede abbricht. Diese Eigenschaften drückt man dadurch aus, daß man sagt, die Zahl 2 sei die Summe der unendlichen Reihe.

Allgemein ist die Summe einer unendlichen Reihe der endliche Grenzwert, dem sich die Summe der Reihe unendlich nähert, wenn die Anzahl der Glieder unendlich wächst.

Es ergibt sich hieraus, daß die Meinung falsch ist, eine Summe unendlich vieler Zahlen müsse stets unendlich groß sein; eine solche Summe kann vielmehr einen bestimmten endlichen Wert haben. Hierzu ist allerdings mindestens erforderlich, daß die Zahlen eine Reihe immer kleiner werdender und unendlich abnehmender Glieder bilden.

Eine unendliche Reihe, die eine endliche Summe hat, heißt konvergent; eine solche, deren Summe unendlich groß ist, heißt divergent. Die Summe einer divergenten Reihe darf als eine unendlich große Zahl nicht nach den Operationsgesetzen der Arithmetik behandelt werden. So ist eine unendliche arithmetische Reihe immer divergent und es kann also von der Summe einer solchen nicht die Rede sein. Deshalb ist bei jeder unendlichen Reihe die Beantwortung der Frage, unter welchen Bedingungen sie konvergiert oder divergiert, von besonderer Wichtigkeit. Für die geometrische Reihe entscheidet sie sich nach dem vorstehenden dahin, daß sie konvergiert, wenn der Quotient einen absoluten Wert hat, der kleiner als 1, und daß sie divergiert, wenn der absolute Wert des Quotienten größer als 1 ist, oder daß fallende geometrische Reihen konvergent, steigende divergent sind.

Es muß schon hier vor dem Fehlschluß gewarnt werden, der in einer Übertragung dieser Sätze auf Reihen andrer Art liegen würde. Allerdings gilt es, wie leicht einzusehen, ganz allgemein, daß steigende Reihen stets divergieren; dagegen kann eine Reihe fallen, ohne konvergent zu sein, wie das Beispiel der Reihe

$$3,\ 2\tfrac{1}{2},\ 2\tfrac{1}{4},\ 2\tfrac{1}{8},\ 2\tfrac{1}{16},\ldots$$

zeigt, deren einzelne Glieder fortwährend abnehmen, jedoch stets größer als 2 bleiben, und deren Summe daher stets größer als $n \cdot 2$, also für $n = \infty$ selbst unendlich groß ist. Es ist also zur Konvergenz einer Reihe nötig, daß ihre Glieder über jede Grenze hinaus unendlich abnehmen. Aber auch die Erfüllung dieser Bedingung sichert noch nicht die Konvergenz der Reihe. Dies läßt sich durch folgendes Beispiel zeigen: In der Reihe

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \cdots$$

ist die angegebene Bedingung erfüllt. Vergrößert man nun die Nenner einzelner Glieder, so werden diese Glieder, und mithin wird auch die Summe der Reihe kleiner. Es ist also

$$\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} > \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} \text{ d. i. } > \tfrac{1}{2}$$

$$\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} > \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}, \text{ d. i. } > \tfrac{1}{2} \quad .$$

Ebenso ist die Summe der acht folgenden Glieder von $\frac{1}{9}$ bis $\frac{1}{16}$ größer als $8 \cdot \frac{1}{16}$, d. i. größer als $\frac{1}{2}$, und da man dieses Verfahren in der unendlichen Reihe unendlich weit fortsetzen kann, so folgt, daß ihre Summe größer als $\frac{1}{2} \cdot \infty$, d. i. unendlich groß sein muß.

Das einfachste Beispiel einer unendlichen konvergenten geometrischen Reihe ist ein rein perodischer unendlicher Dezimalbruch. Denn man kann z. B.

$$0{,}123\,123\ldots = 0{,}123 + 0{,}123 \cdot 0{,}001 + 0{,}123 \cdot 0{,}001^2 + \ldots$$

setzen. Die rechte Seite gibt aber nach 3)

$$\frac{0{,}123}{1 - 0{,}001} = \frac{123}{999} = \frac{41}{333} \quad .$$

Man sieht an diesem Beispiel, daß ein unendlicher Dezimalbruch, wenn er periodisch ist, vollkommen genau durch eine rationale Zahl ausgedrückt werden kann (vgl. § 8 Nr. 4).

Als ein weiteres Beispiel der Anwendung der Formel 3) diene das bekannte Sophisma des Zeno: Achilles verfolgt eine Schildkröte, die in einer Entfernung von 1 Stadium vor ihm hergeht, mit zwölfmal so großer Geschwindigkeit. Kommt Achilles an der Stelle an, wo die Schildkröte zu Anfang sich befand, so ist diese um $\frac{1}{12}$ Stadium weiter; durchläuft Achilles diese kleine Strecke von $\frac{1}{12}$ Stadium, so wird die Schildkröte um $\frac{1}{144}$ Stadium weiter sein u. s. w. Es wird also wohl Achilles die Schildkröte nie erreichen, obschon er sich ihr immer mehr nähert? Diese Annahme stützt sich auf den Trugschluß, der die unendlich große Anzahl der Glieder der Reihe $1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{144} + \ldots$ mit dem endlichen Wert der Summe der Reihe verwechselt. Diese ist nach 3):

$$s = \frac{1}{1 - \frac{1}{12}} = \frac{12}{11} \quad ,$$

Achilles wird also die Schildkröte einholen, wenn er $1\frac{1}{11}$ Stadium zurückgelegt hat.

Ein andres Beispiel biete die geometrische Aufgabe: In ein Quadrat, dessen Seite gleich a gegeben ist, denke man sich einen Kreis, in diesen wieder ein Quadrat, in das Quadrat wieder einen Kreis beschrieben, u. s. f. bis ins Unendliche. Man berechne die Summe der Umfänge, sowie die der Flächeninhalte a) aller Quadrate, b) aller Kreise.

Es ist die Seite des zweiten Quadrates $a_1 = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$, die des dritten $a_2 = \frac{1}{2}a_1\sqrt{2}$ u. s. w., ferner der Radius des ersten Kreises $r_1 = \frac{1}{2}a$, der des zweiten $r_2 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{4}a\sqrt{2}$ u. s. w., mithin die Summe der Umfänge a) der Quadrate:

$$4\left(a + \tfrac{1}{2}a\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}a\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2}a\sqrt{2} + \ldots\right) = \frac{4a}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{4a\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 4a\left(2 + \sqrt{2}\right) \quad ;$$

b) der Kreise:

$$2\pi\left(\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}a \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \ldots\right) = \frac{\pi a}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}} = \pi a\left(2 + \sqrt{2}\right) \quad .$$

Ferner ist die Summe der Flächeninhalte a) der Quadrate:

$$a^2 + \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{4}a^2 + \ldots = \frac{a^2}{1 - \frac{1}{2}} = 2a^2$$

und b) die der Kreise:

$$\pi\left(\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{8}a^2 + \ldots\right) = \tfrac{1}{4}\pi a^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\pi a^2 \quad .$$

4. Während die Summe einer fallenden geometrischen Reihe sich nach dem vorstehenden mit wachsender Gliederzahl mehr und mehr einer bestimmten Grenze nähert, so daß das Anwachsen der Summe bei dem Fortschreiten in der Reihe sich unendlich verlangsamt, wächst die Summe einer steigenden geometrischen Reihe mit jedem neuen Gliede, in beschleunigter Weise. Im

Gegensatz zur arithmetischen Reihe, bei der das Wachstum der Summe gleichmäßig erfolgt, kann die Summe einer steigenden geometrischen Reihe schon bei einer verhältnismäßig kleinen Gliederzahl einen das Vorstellungsvermögen weit überschreitenden Wert erhalten. In dieser Beziehung ist das sich an die Sage von der Erfinduug des Schachbrettes anlehnende Beispiel bekannt: Soll für das erste Feld ein Weizenkorn und für jedes folgende doppelt so viel als für das vorhergehende gegeben werden, so ergibt sich für alle 64 Felder zusammen eine so große Menge von Weizenkörnern, daß mit ihnen alles feste Land der Erde 9 *mm* hoch bedeckt werden könnte. Ähnliche Beispiele liefert die Natur in der kolossalen Vermehrung lebender Wesen bei günstigen Bedingungen für ihre Entwicklung. Nimmt man an, daß alle Samen einer Pflanze oder alle Eier eines Tieres sich zu in gleicher Weise sich vermehrenden Individuen entwickelten, so würden, da hier der Quotient der Reihe erheblich größer als zwei wäre, die Nachkommen eines einzigen lebenden Paares in einer geringen Anzahl von Jahren die ganze Erde für sich allein in Anspruch nehmen.

§ 34. Zinseszins- und Rentenrechnung.

1. Werden die nach Ablauf eines bestimmten Zeitraums, z. B. eines Jahres, fälligen Zinsen eines Kapitals k nicht erhoben, sondern am Ende dieses Zeitraums jedesmal zum Kapital hinzugefügt (kapitalisiert) und also von da an ebenfalls verzinst, so sagt man, das Kapital steht auf Zinseszins.

Ein zu dem Zinsfuß von jährlich $p\%$ auf Zinsen stehendes Kapital k gibt in einem Jahre die Zinsen

$$k \cdot \frac{p}{100} \quad ,$$

es ist also am Ende des Jahres auf

$$k + k \cdot \frac{p}{100} = k\left(1 + \frac{p}{100}\right) = kq$$

angewachsen. Werden die Zinsen kapitalisiert, so wird nun das Kapital kq am Ende des zweiten Jahres zu $kq \cdot q = kq^2$ angewachsen sein, am Ende des dritten also zu kq^3 u. s. f. Die Werte des Kapitals am Ende der aufeinander folgenden Jahre bilden also bei Vermehrung durch Zinseszins eine geometrische Reihe, deren Anfangsglied k das Anfangskapital und deren Quotient

$$q = 1 + \frac{p}{100}$$

der Zinsfaktor ist. Demnach ist das Endkapital nach n Jahren

$$1) \qquad k_n = kq^n \quad .$$

Diese Formel gilt nicht nur für Geldsummen, die auf Zinseszins stehen, sondern allgemein für Größen, die sich innerhalb eines Jahres um einen bestimmten Prozentsatz dergestalt vermehren, daß der Zuwachs zu dem ursprünglichen Bestand hinzugefügt gedacht wird, wie z. B. für einen Waldbestand, für die Bevölkerungszahl eines Landes.

Werden die Zinsen in mehreren Terminen während eines Jahres kapitalisiert, so kann die Formel 1) angewendet werden, wenn man unter p den Zinsfuß für den zwischen zwei Terminen liegenden Zeitraum und unter n die Anzahl der Zinstermine versteht. Bei dem für das Jahr gerechneten Zinsfuß von $p\%$ hat man demnach bei halbjährigen Zinsenzuwachs $\frac{1}{2}p$, bei vierteljährigen $\frac{1}{4}p$ und für n die Anzahl der Halbjahre oder Vierteljahre zu nehmen.

Die Formel 1) zeigt, daß das Endkapital k_n mit dem Wachsen von n sehr stark wächst, da das in § 33 Nr. 4 über die Summe einer steigenden geo-

metrischen Reihe Bemerkte auch für die einzelnen Glieder gilt. Bei größern Werten von n erhält man daher ein außerordentlich starkes Anwachsen des Kapitals. In dieser Beziehung ist das Beispiel bekannt, das annimmt, daß ein Pfennig zur Zeit der Geburt Christi auf Zinseszinsen gelegt und bis in die Gegenwart verzinst worden sei. Für $p = 4$ und $n = 1902$ ergibt sich

$$k_n = 0{,}01 \cdot 1{,}04^{1902} \quad ,$$

d. i. ein Betrag von nahe 250 Quintillionen Mark.

Dieses staunenerregende Beispiel leitet zu zwei Bemerkungen über die Bedeutung der Formel 1) hin. Bei ihrer Anwendung wird vorausgesetzt, daß die sämtlichen Zinsen eines Zeitraums in dem folgenden wieder verzinst, daß also auch von jedem kleinsten Bruchteil einer Mark oder eines Pfennigs Zinsen gezahlt werden. In der Praxis findet dies bei zinsbar angelegten Kapitalien nicht statt und der zu Christi Geburt auf Zinseszinsen gelegte Pfennig würde daher in Wirklichkeit bis zum heutigen Tage nur der eine Pfennig geblieben sein, weil die Hinzufügung der Zinsen zum Kapital wegen ihrer Kleinheit nicht stattfinden könnte. Die Formel 1) ist daher nicht streng anwendbar für eine Sparkasse, die zwar die Zinsen am Ende jedes Jahres wieder zum Kapital hinzuschlägt, aber nur volle Mark wieder verzinst. In diesem Falle bedient man sich zur Berechnung der Zinsen besonderer Tabellen. Wenn die Anzahl n der Zeiträume nicht sehr groß ist, wie gewöhnlich bei Sparkassen, so werden keine erheblichen Differenzen gegen die Resultate der Formel 1) entstehen. Stehen z. B. 1000 Mark zu 4% zehn Jahre auf Zinseszins, so erhält man für das Endkapital wirklich 1480 Mark 4 Pfennig, während die Formel 1480 Mark 24 Pfennig ergibt.

Die Formel 1) gibt daher bei Anwendung auf eine in einer Sparkasse angelegte Geldsumme immer noch die praktisch brauchbarsten Resultate, weshalb man sie auch die Sparkassenformel nennt. Bei sonstigen Anwendungen erhält man nur angenäherte Werte.

Die andre Bemerkung, zu der die Berechnung des obigen und andrer Beispiele veranlaßt, ist, daß bei großen Werten von n die gebräuchlichen Logarithmentafeln zu einer genauen Berechnung von k_n nicht hinreichen. Auch bei weniger hohen Exponenten entsteht eine Ungenauigkeit, indem die logarithmische Berechnung von q^n infolge der Multiplikation des abgekürzten Logarithmus mit n auch den Fehler multipliziert. Ist z. B. $n = 10$ und $\log q$ auf fünf Dezimalen bekannt, so hat das Produkt nur noch eine Genauigkeit von vier Dezimalen und man muß sich daher, wenn diese zu gering sein sollte, eines auf mehr Stellen berechneten Logarithmus von q bedienen.

In den gebräuchlichen Logarithmentafeln finden sich daher für Zahlen, die wenig größer als 1 sind noch Hilfstafeln auf eine größere Anzahl Stellen der Logarithmen. Man kann dann die Regel beobachten, daß man, wenn n eine zweistellige oder dreistellige Zahl ist, $\log q$ auf eine oder zwei Stellen mehr als die Stellenzahl der gewöhnlichen Logarithmen nimmt und mit n abgekürzt so multipliziert, daß das Produkt nicht mehr Stellen als die üblichen erhält.

Beispiel:

$k = 6000$ ℳ; $p = 3\frac{1}{2}\%$, $q = 1{,}035$; $n = 27$ Jahre.

$k_n = k\,q^n = 13327{,}6$ ℳ

$\log q = 0{,}012\,837$

$0{,}25\,674$

$8\,986$

$\log q^n = 0{,}34\,660$

$\log k = 3{,}77\,815$

$\log k_n = 4{,}12\,475$.

Der Unterschied ist jedoch bei einem derartigen Beispiel sehr unerheblich; denn für $\log q = 0{,}01\,284$, ist $\log q^n = 0{,}34\,668$, $\log k_n = 4{,}12\,483$, $k_n = 13\,330$ ℳ.

2. Die Formel 1) gibt die zwischen den Größen k, k_n, q, n bestehende Beziehung an und kann daher nicht bloß zur Berechnung von k_n, sondern auch zur Berechnung jeder der übrigen Größen aus ihren gegebenen Werten dienen. Man hat sie zu diesem Zwecke nur jedesmal auf die gesuchte Unbekannte aufzulösen und erhält die drei neuen Formeln:

$$2) \qquad k = k_n q^{-n} \ ,$$

$$3) \qquad q = \sqrt[n]{\frac{k_n}{k}} \ ,$$

$$4) \qquad n = \frac{\log (k_n : k)}{\log q} \ .$$

Die Formel 2) gewinnt mit 1) zusammen eine allgemeinere Bedeutung. Den Wert eines Kapitals kann man als eine von der Zeit abhängige Größe betrachten. Hat ein Kapital am Anfang einer gewissen Zeit den Barwert k, so hat dasselbe Kapital nach n Jahren den Zeitwert kq^n, ebenso müßte es vor n Jahren den Wert kq^{-n} gehabt haben, um zur Zeit 0 den Wert k zu erhalten. Bezeichnet also k_0 den Wert eines Kapitals zur Zeit 0, so ist der Zeitwert des Kapitals nach n Jahren

$$5) \qquad k_n = k_0 q^n \ .$$

In dieser Formel ist auch 2) eingeschlossen, wenn man n Jahre vor einer Zeit 0 als $-n$ Jahre betrachtet und man würde dann

$$k_{-n} = k_0 q^{-n}$$

haben. Für beide Formeln kann man aber 5) nehmen, wenn man die Zeit von einem gewissen Termin an vorwärts als positiv, rückwärts als negative Zeit rechnet.

Die Formeln 3) und 4) enthalten nur das Verhältnis der beiden Kapitale k_n und k. Sie dienen also zur Beantwortung der Fragen: zu wieviel Prozent müßte ein Kapital auf Zinseszins stehen, damit es sich in n Jahren verdoppelt, verdreifacht u. s. w., und in wieviel Jahren verdoppelt, verdreifacht u. s. w. sich ein Kapital, das zu einem gewissen Zinsfuß auf Zinseszins steht? Für die Formel 4) ist dabei zu bemerken, daß eine Aufgabe streng genommen nicht lösbar ist, wenn für n sich nicht eine natürliche Zahl ergibt. Soll sich z. B. ein Kapital, das zu $5\,\%$ auf Zinseszins steht, in n Jahren verdoppeln, so würde sich

$$n = \log 2 : \log 1{,}05 = 14{,}2 \text{ Jahre}$$

ergeben. Das Kapital wird also in 14 Jahren noch nicht ganz zum doppelten Betrag, in 15 Jahren aber schon über diesen Betrag angewachsen sein. Für solche praktische Aufgaben mit runden Zahlen gibt die Formel 4) nur einen Näherungswert. Es ist daher genügend, in einem solchen Falle, die Division der beiden Logarithmen direkt auszuführen und den Quotienten nur bis auf die Ganzen und Zehntel zu bestimmen. Auch die Resultate der Formel 3) geben in den meisten Fällen, wenn es sich um Anlegung von Geldsummen zu einem gewissen Zinsfuße handelte, nur Näherungswerte, da es praktisch nicht möglich ist, diese Anlegung zu jedem beliebigen Zinsfuß zu bewirken.

3. Steht ein Kapital k auf Zinseszins und wird es am Ende jeden Jahres noch um den bestimmten Betrag r vermehrt, so kann man diesen als die jährlichen Zinsen des fingierten Kapitals $\frac{100\,r}{p}$ ansehen. Denkt man sich dieses Kapital zu dem Anfangskapital k hinzugelegt und die Summe auf Zinseszins

stehend, so würde sie nach n Jahren auf $\left(k + \frac{100\,r}{p}\right)q^n$ angewachsen sein. Am Ende des Zeitraums von n Jahren müßte man aber dieses fingierte Kapital $\frac{100\,r}{p}$ wieder wegnehmen, so daß nunmehr das Endkapital nach n Jahren

$$6) \qquad k_n = \left(k + \frac{100\,r}{p}\right)q^n - \frac{100\,r}{p}$$

sein würde.

Hätte eine Person A, die im Besitze eines Kapitals k ist, von einer andern B n Jahre lang am Ende jeden Jahres die Summe r zu erhalten, so ist r für A eine Rente. Statt der einzelnen Rentenzahlungen könnte B an A das Kapital $\frac{100\,r}{p}$ auszahlen, und A könnte dies zusammen mit k auf Zinseszins stehen lassen. Nach Verlauf der n Jahre, auf die die Rente läuft, müßte A das Kapital $\frac{100\,r}{p}$, von dem ihm nur der Zinsgenuß zusteht, wieder an B zurückzahlen.

Ebenso gilt die Betrachtung: B, der die Verpflichtung hat, an A n Jahre lang die Rente r zu zahlen, könnte von dem in seinem Besitz befindlichen Kapital k das Kapital $\frac{100\,r}{p}$ abzweigen, um es A zu übergeben. Hört nach n Jahren die Verpflichtung auf, so müßte er dieses Kapital $\frac{100\,r}{p}$ von A zurückerhalten. B würde also nach n Jahren im Besitze des Kapitals

$$7) \qquad k_n = \left(k - \frac{100\,r}{p}\right)q^n + \frac{100\,r}{p}$$

sein. Die Formeln 6) und 7) unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen von r, das positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem die Rente zu einem Kapital hinzugefügt oder von ihm weggenommen ist. Die beiden Formeln sind die Grundformeln der Rentenrechnung

In der Formel 6) kann $k = 0$ sein; sie würde dann das Kapital $k_n = c$ angeben, das aus der Ansammlung der Rentenzahlungen entsteht. Man nennt dieses die kapitalisierte Rente und erhält:

$$8) \qquad c = \frac{100\,r}{p}(q^n - 1) \quad .$$

Beim Gebrauch der Formel 7) ist zu unterscheiden, ob

$$k \gtreqless \frac{100\,r}{p}, \quad r \lesseqgtr k \cdot \frac{p}{100} \quad ,$$

d. h. ob die wegzunehmende Rente weniger oder ebensoviel oder mehr als die jährlichen Zinsen des Anfangskapitals k beträgt. In dem mittleren Fall würde

$$k_n = \frac{100\,r}{p} = k$$

sein, d. h. das Anfangskapital bleibt, wie selbstverständlich, unverändert. Im ersten Falle wird sich k noch vermehren, wenn auch langsamer als ohne Wegnahme der Rente. Im dritten Falle, in dem man die Formel 7) zweckmäßiger

$$k_n = \frac{100\,r}{p} - \left(\frac{100\,r}{p} - k\right)q^n$$

schreiben kann, muß sich das Kapital vermindern und endlich aufgezehrt (getilgt, amortisiert) werden. Setzt man $k_n = 0$ und $k = b$, so erhält man aus der Gleichung

$$\frac{100\,r}{p} - \left(\frac{100\,r}{p} - b\right) q^n = 0$$

$$9) \qquad b = \frac{100\,r}{p}\,(1 - q^{-n})$$

und b ist das Kapital, daß auf Zinseszins stehend und jährlich um die Rente r vermindert, in n Jahren aufgezehrt ist. Dieses Kapital ist der Barwert der Rente; denn die Verpflichtung, n Jahre lang die Rente r zu zahlen, könnte durch Zahlung des Kapitals b abgelöst werden.

Aus 8) und 9) folgt

$$c = b\,q^n \quad ,$$

d. h. c ist der Zeitwert von b nach n Jahren.

Rentenzahlungen, die sich durch Höhe der Rente und die Zahl der Jahre, auf die sie laufen, unterscheiden, sind gleichwertig, wenn ihre Barwerte einander gleich sind.

Ist die Rente r nicht, wie vorausgesetzt, am Ende jedes Jahres, sondern am Anfang fällig, so ist in 6), 7), 8), 9) r durch $r\,q$ zu ersetzen.

Die Formeln der Rentenrechnung finden Anwendung in der Versicherungstechnik, zur Berechnung eines Tilgungsplans von Schulden u. s. w.

4. Die Formeln 6) bis 9) in Nr. 3 können auch durch Reihensummierung erhalten werden. Zunächst ist die kapitalisierte Rente c die Summe der Zeitwerte der einzelnen Rentenzahlungen r nach n Jahren. Es ist also

$$c = r\,q^{n-1} + r\,q^{n-2} + r\,q^{n-3} + \ldots + r\,q + r \quad ,$$

d. h. gleich der Summe einer geometrischen Reihe von n Gliedern mit dem Anfangsglied r und dem Quotienten q. Nach § 33 Nr. 1, 2) ist also

$$c = r\,\frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{100\,r}{p}\,(q^n - 1)$$

in Übereinstimmung mit 8) in Nr. 3. Daraus ergibt sich wie in 9):

$$b = c\,q^{-n} = \frac{100\,r}{p}\,(1 - q^{-n})$$

und wenn das Anfangskapital k um n jährliche Rentenzahlungen r vermehrt oder vermindert wird, so erhält man nun das Endkapital wie in 6) und 7):

$$k_n = k\,q^n \pm c \quad .$$

Dieses Verfahren muß angewendet werden, wenn die Rente sich nach einem bestimmten Gesetze verändert. Sollen z. B. die Rentenzahlungen Glieder einer geometrischen Reihe r, rf, rf^2, $\ldots$ rf^{n-1} sein, so würde die kapitalisierte Rente

$$c = r\,q^{n-1} + r\,f\,q^{n-2} + r\,f^2\,q^{n-3} + \ldots + r\,f^{n-2}\,q + r\,f^{n-1}$$
$$= r\,\frac{q^n - f^n}{q - f} = r\,\frac{f^n - q^n}{f - q}$$

sein als Summe einer geometrischen Reihe.

Sollen sich dagegen die Rentenzahlungen in arithmetischer Reihe r, $r + d$, $r + 2\,d$, $\ldots$ $r + (n - 1)\,d$ verändern, so würde

$$c = r\,q^{n-1} + (r + d)\,q^{n-2} + (r + 2\,d)\,q^{n-3} + \ldots + (r + n - \overline{2}\,d)\,q + (r + \overline{n - 1}\,d)$$
$$= r\,(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1) + d\,(q^{n-2} + 2\,q^{n-3} + \ldots + \overline{n - 2}\,q + \overline{n - 1})$$

sein. Der erste Klammerausdruck ist hier eine leicht zu summierende geometrische Reihe, der zweite die Summe einer arithmetisch-geometrischen Reihe, die, wenn man sie

$$q^{n-2}\left(1 + 2q^{-1} + 3q^{-2} + \ldots + \overline{n-2}\,q^{-n+3} + \overline{n-1}\,q^{-n+2}\right)$$

schreibt, nach § 33 Nr. 2 zu berechnen ist. Man hat $x = q^{-1}$ und $n - 1$ für n zu setzen. Damit ergibt sich

$$c = r\frac{q^n - 1}{q - 1} + dq^{n-2}\frac{1 - nq^{-n+1} + (n-1)q^{-n}}{(1 - q^{-1})^2}$$

$$= r\frac{q^n - 1}{q - 1} + d\frac{q^n - nq + (n-1)}{(q-1)^2} \quad .$$

Mit Berücksichtigung der Bedeutung von q kann man diese Formel für die numerische Berechnung bequemer schreiben:

$$c = \frac{100}{p}\left[\left(r + \frac{100\,d}{p}\right)q^n - \left(r + \frac{100\,d}{p} + nd\right)\right] \quad .$$

In dem besondern Falle, daß $d = r$ ist, die Rente also r, $2r$, $3r$, ... nr in den aufeinander folgenden Jahren beträgt, ist

$$c = \frac{100\,r}{p}\left[\left(1 + \frac{100}{p}\right)q^n - \left(1 + \frac{100}{p} + n\right)\right] \quad .$$

§ 35. Arithmetische Reihen höherer Ordnung. Figurierte Zahlen.

1. Aus jeder Reihe läßt sich eine neue Reihe dadurch ableiten, daß man jedes Glied von dem folgenden subtrahiert. Mit der neuen Reihe kann dann wieder auf dieselbe Weise verfahren werden u. s. w. Man nennt die so entstehenden Reihen Differenzreihen der ursprünglichen und unterscheidet sie als erste, zweite u. s. w., allgemein n-te Differenzreihe. Hiernach ist die n-te Differenzreihe die erste Differenzreihe der $n - 1$-ten und die k-te der $n - k$-ten.

Die arithmetische Reihe kann hiernach als eine Reihe von der Eigenschaft erklärt werden, daß die Glieder ihrer ersten Differenzreihe einander gleich, oder daß die Glieder ihrer zweiten und aller folgenden Differenzreihen gleich Null sind. Dies führt zu einer Erweiterung des Begriffs der arithmetischen Reihe, indem man unter einer solchen im weiteren Sinne eine Reihe versteht, für die alle Glieder einer bestimmten Differenzreihe einander gleich sind. Man nennt eine Reihe eine arithmetische n-ter Ordnung, wenn ihre n-te Differenzreihe aus gleichen Gliedern besteht, oder wenn, was dasselbe ist, alle Glieder ihrer $n + 1$-ten Differenzreihe gleich Null sind.

Hiernach erhält die arithmetische Reihe jetzt die Bezeichnung einer arithmetischen Reihe erster Ordnung. Die Differenzreihen einer arithmetischen Reihe höherer Ordnung sind wieder arithmetische Reihen, und zwar ist die erste Differenzreihe einer Reihe n-ter Ordnung eine solche $n - 1$-ter Ordnung u. s. w.

Es sei beispielsweise die Reihe

2 3 6 14 30 57 98 ...

gegeben, so ist die erste Differenzreihe:

1 3 8 16 27 41 ... ,

die zweite Differenzreihe:

2 5 8 11 14 ... ,

die dritte Differenzreihe:

$$3 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad \ldots \ ,$$

also ist die gegebene Reihe eine arithmetische dritter Ordnung.

Im folgenden sollen die Glieder einer Reihe allgemein durch

$$a_1 \ , \quad a_2 \ , \quad a_3 \ , \quad \ldots \quad a_n \ , \quad \ldots \ ,$$

die ihrer ersten Differenzreihe durch

$$D a_1 \ , \quad D a_2 \ , \quad D a_3 \ , \quad \ldots \quad D a_n \ , \quad \ldots \ ,$$

die ihrer zweiten Differenzreihe durch

$$D^2 a_1 \ , \quad D^2 a_2 \ , \quad D^3 a_3 \ , \quad \ldots \quad D^2 a_n \ , \quad \ldots$$

u. s. w., allgemein die der k-ten Differenzreihe durch

$$D^k a_1 \ , \quad D^k a_2 \ , \quad D^k a_3 \ , \quad \ldots \quad D^k a_n \ , \quad \ldots$$

bezeichnet werden. Es ist also

$$D a_1 = a_2 - a_1 \ ; \quad D a_n = a_{n+1} - a_n \ ,$$

$$D^2 a_1 = D a_2 - D a_1 \ , \text{ und allgemein: } D^k a_n = D^{k-1} a_{n+1} - D^{k-1} a_n \ .$$

Um hiernach irgend ein Glied einer Differenzreihe einer gegebenen Reihe unmittelbar aus Gliedern dieser Reihe zu berechnen, hat man

$$D a_n = a_{n+1} - a_n \ ,$$

$$D^2 a_n = D a_{n+1} - D a_n = (a_{n+2} - a_{n+1}) - (a_{n+1} - a_n)$$
$$= a_{n+2} - 2 a_{n+1} + a_n \ ,$$

$$D^3 a_n = D^2 a_{n+1} - D^2 a_n = (a_{n+3} - 2 a_{n+2} + a_{n+1}) - (a_{n+2} - 2 a_{n+1} + a_n)$$
$$= a_{n+3} - 3 a_{n+2} + 3 a_{n+1} - a_n \ .$$

Fährt man in dieser Weise fort, so wird man durch die Analogie auf die Vermutung geführt, daß allgemein

$$1) \qquad D^k a_n = a_{n+k} - \binom{k}{1} a_{n+k-1} + \binom{k}{2} a_{n+k-2} - \ldots + (-1)^k a_n$$

sei, wo $\binom{k}{1}$, $\binom{k}{2}$ u. s. w. die Binomialkoeffizienten zur k-ten Potenz sind. Die allgemeine Gültigkeit dieser Formel kann durch **vollständige Induktion**, d. h. durch den Schluß von k auf $k+1$ bewiesen werden, indem man wie vorher

$$D^{k+1} a_n = D^k a_{n+1} - D^k a_n$$

mittels 1) entwickelt und zeigt, daß das Resultat demselben Bildungsgesetze, wie 1) folgt. Da nun 1) für $k = 3$ gilt, so muß sie auch für $k = 4$, also weiter auch für $k = 5$ u. s. w. richtig sein.

Um ferner das allgemeine Glied a_n der Reihe aus a_1 und den Anfangsgliedern der Differenzreihen zu berechnen, beachte man, daß

$$a_2 = a_1 + D a_1 \ ,$$

$$a_3 = a_2 + D a_2 = (a_1 + D a_1) + (D a_1 + D^2 a_1) = a_1 + 2 D a_1 + D^2 a_1 \ ,$$

$$a_4 = a_3 + D a_3 = (a_1 + 2 D a_1 + D^2 a_1) + (D a_1 + 2 D^2 a_1 + D^3 a_1)$$
$$= a_1 + 3 D a_1 + 3 D^2 a_1 + D^3 a_1$$

u. s. w., also nach der Analogie

$$2) \qquad a_n = a_1 + \binom{n-1}{1} D a_1 + \binom{n-1}{2} D^2 a_1 + \binom{n-1}{3} D^3 a_1 + \ldots$$

ist, eine Formel, deren allgemeine Gültigkeit wieder durch den Schluß von n auf $n+1$ bewiesen werden kann.

Um endlich auch die Summe der Reihe zu berechnen, bemerke man, daß

$$a_1 + a_2 = a_1 + (a_1 + D a_1) = 2 a_1 + D a_1 \quad ,$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = (2 a_1 + D a_1) + (a_1 + 2 D a_1 + D^2 a_1) = 3 a_1 + 3 D a_1 + D^2 a_1 \quad ,$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = (3 a_1 + 3 D a_1 + D^2 a_1) + (a_1 + 3 D a_1 + 3 D^2 a_1 + D^3 a_1)$$
$$= 4 a_1 + 6 D a_1 + 4 D^2 a_1 + D^3 a_1$$

u. s. w. ist, bilde wieder nach der Analogie die Formel

$$3) \qquad s_n = \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} D a_1 + \binom{n}{3} D^2 a_1 + \binom{n}{4} D^3 a_1 + \ldots$$

und beweise die allgemeine Gültigkeit der Formel durch den Schluß von n auf $n + 1$.

So erhält man beispielsweise für die oben angegebene Reihe

$$2 \, , \; 3 \, , \; 6 \, , \; 14 \, , \; 30 \, , \; 57 \, , \; 98 \; \ldots$$

$$a_n = 2 + (n - 1) \cdot 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \cdot 2 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3 \quad ,$$

$$s_n = n \cdot 2 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot 1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 3 \quad ,$$

oder

$$a_n = \tfrac{1}{2}(n^3 - 4 n^2 + 7 n) \, , \quad s_n = \tfrac{1}{24}(3 n^4 - 10 n^3 + 21 n^2 + 34 n) \quad .$$

2. Die Formeln 1), 2), 3) gelten allgemein für Reihen jeder Art; bei den arithmetischen tritt nur die Vereinfachung ein, daß die Reihe der Größen $D a_1$, $D^2 a_1$ u. s. w. bei irgend einem Gliede abbricht, die allgemeinen Ausdrücke für a_n und s_n also begrenzt sind. Hieraus geht hervor, daß das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe k-ter Ordnung sich als ein Ausdruck von der Form

$$4) \qquad a_n = \alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 n^2 + \ldots + \alpha_k n^k$$

und die Summe einer solchen als ein Ausdruck von der Form

$$5) \qquad s_n = \beta_1 n + \beta_2 n^2 + \ldots + \beta_k n^k + \beta_{k+1} n^{k+1}$$

darstellen läßt.

Umgekehrt läßt sich zeigen, daß jede Reihe, deren allgemeines Glied die Form 4), oder deren Summe die Form 5) hat, eine arithmetische Reihe k-ter Ordnung ist. Ist nämlich die erste Voraussetzung erfüllt, so ist

$$\begin{aligned} D a_n = a_{n+1} - a_n &= \alpha_0 + \alpha_1 (n+1) + \alpha_2 (n+1)^2 + \ldots + \alpha_k (n+1)^k \\ &\quad - \alpha_0 - \alpha_1 n - \quad \alpha_2 n^2 \quad - \ldots - \alpha_k n^k \\ &= \quad \alpha_1 \quad + \alpha_2 (2 n + 1) + \ldots + \alpha_k (k n^{k-1} + \ldots) \quad , \end{aligned}$$

also $D a_n$ von der Form

$$\gamma_0 + \gamma_1 n + \ldots + \gamma_{k-1} n^{k-1} \quad .$$

Hieraus ergibt sich in gleicher Weise, daß $D^2 a_n$ die Form

$$\delta_0 + \delta_1 n + \ldots + \delta_{k-2} n^{k-2}$$

hat u. s. w., so daß endlich $D^k a_n$ einen für jeden Wert von n konstant bleibenden Wert μ_0 haben muß.

Hat ferner die Summe einer Reihe die Form 5), so folgt aus

$$a_n = s_n - s_{n-1} \quad ,$$

daß a_n die Form 4) haben muß, so daß der Beweis auf den vorhergehenden zurückgeführt ist.

Hieraus folgt beispielsweise, daß die k-ten Potenzen der Reihe der natürlichen Zahlen eine arithmetische Reihe k-ter Ordnung bilden, denn es ist für diese $a_n = n^k$. So ist also die Reihe der Quadratzahlen

$$1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \quad 25, \quad 36, \quad 49 \quad \ldots$$

eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung. In der Tat sind ihre Differenzreihen:

$$3, \quad 5, \quad 7, \quad 9, \quad 11, \quad 13 \quad \ldots$$
$$2, \quad 2, \quad 2, \quad 2, \quad 2, \quad . \quad \ldots$$

Man hat hiernach in den Differenzreihen ein Mittel, die Quadrate und höhere Potenzen der natürlichen Zahlen successive durch Addition zu berechnen.

Ferner ergeben sich nach 3) die Summen von Potenzen der natürlichen Zahlen. Es ist z. B. die Summe aller Quadrate der natürlichen Zahlen von 1 bis n:

$$\binom{n}{1} \cdot 1 + \binom{n}{2} \cdot 3 + \binom{n}{3} \cdot 2 = \tfrac{1}{6} n (n+1)(2n+1) \quad ;$$

die Summe ihrer Kuben:

$$\binom{n}{1} \cdot 1 + \binom{n}{2} \cdot 7 + \binom{n}{3} \cdot 12 + \binom{n}{4} \cdot 6 = \tfrac{1}{4} n^2 (n+1)^2 \quad .$$

Ebenso bilden die k-ten Potenzen der Glieder einer arithmetischen Reihe erster Ordnung:

$$a, \quad a + d, \quad a + 2d \quad \ldots$$

eine arithmetische Reihe k-ter Ordnung, denn es ist für diese

$$a_n = [a + (n-1)d]^k = (a-d)^k + k(a-d)^{k-1} d \cdot n + \ldots + d^k \cdot n^k \quad .$$

Allgemein bilden, wie entsprechend bewiesen werden kann, die k-ten Potenzen einer arithmetischen Reihe r-ter Ordnung eine arithmetische Reihe der $k \cdot r$-ten Ordnung.

Es mögen schließlich noch folgende Sätze Erwähnung finden, die nach dem vorigen ebenfalls bewiesen werden können:

Verbindet man die gleichstelligen Glieder zweier oder mehrerer arithmetischer Reihen in gleicher Weise durch Addition oder Subtraktion, so entsteht eine arithmetische Reihe, deren Ordnung gleich derjenigen der höchsten der verbundenen Reihen ist.

Multipliziert man die gleichstelligen Glieder zweier oder mehrerer arithmetischer Reihen miteinander, so entsteht eine arithmetische Reihe, deren Ordnung gleich der Summe der Ordnungen der ursprünglichen Reihen ist.

3. Bildet man zu einer gegebenen Reihe nacheinander die Werte s_1, s_2, s_3 u. s. w. der Summen von 1, 2, 3 ... Gliedern, so erhält man eine neue Reihe, welche die Summenreihe erster Ordnung der gegebenen heißt. Verfährt man mit dieser in gleicher Weise, so erhält man die Summenreihe zweiter Ordnung der ursprünglichen. Allgemein ist die Summenreihe k-ter Ordnung einer gegebenen Reihe die erste Summenreihe der Summenreihe $k-1$-ter Ordnung. Diese neuen Reihen unterscheiden sich von den Differenzreihen nur durch die umgekehrte Art ihrer Entstehung.

Ist die ursprüngliche Reihe eine arithmetische, so sind ihre Summenreihen arithmetische Reihen höherer Ordnungen. Ist insbesondere die ursprüngliche eine arithmetische erster Ordnung mit dem Anfangsglied 1 und ihre Differenz d eine natürliche Zahl, so erhält man auf diesem Wege die Reihen der figurierten Zahlen. Diese sind also:

$$1, \quad 1+d, \quad 1+2d, \quad 1+3d, \quad 1+4d \quad \ldots$$
$$1, \quad 2+d, \quad 3+3d, \quad 4+6d, \quad 5+10d \quad \ldots$$
$$1, \quad 3+d, \quad 6+4d, \quad 10+10d, \quad 15+20d \quad \ldots$$
$$1, \quad 4+d, \quad 10+5d, \quad 20+15d, \quad 35+35d \quad \ldots$$

u. s. w.

Ist hierbei insbesondere auch $d = 1$, so erhält man die figurierten Zahlen im engern Sinn. Die Reihen dieser sind also:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 & \ldots \\ 1, & 3, & 6, & 10, & 15 & \ldots \\ 1, & 4, & 10, & 20, & 35 & \ldots \\ 1, & 5, & 15, & 35, & 70 & \ldots \\ 1, & 6, & 21, & 56, & 126 & \ldots \end{array}$$

u. s. w.

Da alle diese Reihen arithmetische von bestimmten Ordnungen sind, so gelten für sie die in Nr. 1 und 2 abgeleiteten Formeln für a_n und s_n.

Die Reihe der figurierten Zahlen zweiter Ordnung, also die Reihe

$$1, \quad 2 + d, \quad 3 + 3d, \quad 4 + 6d, \quad 5 + 10d \ldots ,$$

heißt auch die Reihe der Polygonalzahlen oder Vieleckszahlen. Da ihre Differenzreihen

$$\begin{array}{cccccc} 1 + d, & 1 + 2d, & 1 + 3d, & 1 + 4d & \ldots \\ d, & d, & d, & d, & \ldots \end{array}$$

sind, so findet man nach 2) und 3)

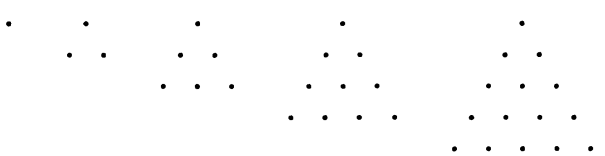
$$a_n = 1 + \binom{n-1}{1}(1 + d) + \binom{n-1}{2} d = (1 - \tfrac{1}{2} d) n + \tfrac{1}{2} d n^2 ,$$

$$s_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{2}(1 + d) + \binom{n}{3} d = \frac{(3 - d) n + 3 n^2 + d n^3}{6} .$$

Der Name Polygonalzahlen rührt daher, daß diese Reihe für $d = k - 2$ die Reihe derjenigen Anzahlen von Flächengrößen ist, die sich in Form eines regelmäßigen k-Ecks nebeneinander legen lassen. So entsteht für $d = 1$ die Reihe der Dreieckszahlen (Trigonalzahlen):

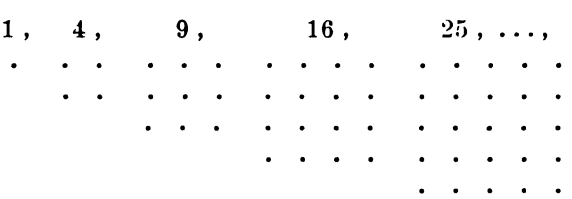
$$1, \quad 3, \quad 6, \quad 10, \quad 15 \quad \ldots ,$$

die den Anzahlen der Punkte in folgenden Figuren gleich sind:



Für $d = 2$ erhält man die Reihe der Viereckszahlen (Tetragonal- oder Quadratzahlen):

$$1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \quad 25, \ldots,$$



für $d = 3$ die Reihe der Fünfeckszahlen:

$$1, \quad 5, \quad 12, \quad 22, \quad 35 \quad \ldots ,$$

u. s. w.

In entsprechender Weise heißen die figurierten Zahlen der dritten Ordnung

$$1\,,\quad 3+d\,,\quad 6+4d\,,\quad 10+10d\,,\quad 15+20d$$

u. s. w. auch Pyramidalzahlen, weil sie die Anzahlen von Körpergrößen angeben, die sich in drei-, vier- oder mehrseitigen Pyramiden aufeinander schichten lassen. Man erhält für sie

$$a_n = \frac{n(n+1)}{1\cdot 2} + \frac{(n-1)n(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}d = \frac{(3-d)n + 3n^2 + dn^3}{6}\,.$$

Insbesondere ist die Reihe der Trigonal-Pyramidalzahlen ($d=1$),

$$1\,,\ 4\,,\ 10\,,\ 20\,,\ 35\,,\ 56\ \ldots\,,$$

die der Tetragonal-Pyramidalzahlen ($d=2$),

$$1\,,\ 5\,,\ 14\,,\ 30\,,\ 55\,,\ 91\ \ldots$$

u. s. w.

Es sei, um eine Anwendung der vorstehenden Reihen zu zeigen, die Aufgabe zu lösen:

Wieviel Kanonenkugeln befinden sich in einer abgestumpften dreiseitigen Pyramide, wenn an jeder Seite der untersten Schicht m und an jeder Seite der obersten Schicht n Kugeln liegen?

Hier ist die Differenz des m-ten und des $n-1$-ten Gliedes der Reihe der Trigonal-Pyramidalzahlen zu bilden; nach der obigen Formel ergibt sich diese gleich

$$\frac{2m+3m^2+m^3}{6} - \frac{2(n-1)+3(n-1)^2+(n-1)^3}{6}$$

also z. B. für $m=20$, $n=5$ gleich 1520.

§ 36. Kettenbrüche.

1. Wenn man auf den Bruch $a:b$, dessen Zähler und Nenner natürliche Zahlen und relativ prim sind, nach § 6 Nr. 3 die Kettendivision anwendet, so muß man auf den Rest 1 kommen, der in dem vorigen ohne Rest enthalten ist. Geschieht dies nach n Divisionen, so erhält man, wenn $a>b$ die Gleichungen:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1\ ,\\ b &= r_1 q_2 + r_2\ ,\\ r_1 &= r_2 q_3 + r_3\ ,\\ &\vdots\\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + r_n\ , \end{aligned}$$

worin q_1, q_2 ... die einzelnen Quotienten, r_1, r_2 ... die Reste sind. Ist q_n der letzte Quotient, so muß $r_{n-1}=1$, $r_n=0$ sein. Aus diesen n Gleichungen folgen die neuen:

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{r_1}{b}\,,\quad \frac{b}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1}\,,\quad \frac{r_1}{r_2} = q_3 + \frac{r_3}{r_2}\,,\ \ldots\ \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_n\ ,$$

so daß man den gegebenen Bruch in der Form schreiben kann:

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_n}}}\,.$$

Diese Form heißt ein gemeiner Kettenbruch. Die Entwicklung eines gemeinen irreducibeln Bruchs in einen Kettenbruch geschieht nach einem Schema, das an dem folgenden Beispiel leicht zu übersehen ist:

$$\begin{array}{r|r|l} 30 & 67 & 2 \\ 7 & 30 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{array}, \qquad \frac{67}{30} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}, \qquad \frac{30}{67} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}}.$$

Man kann die Kettenbruchentwicklung immer so schreiben, daß dem eigentlichen Kettenbruch eine ganze Zahl vorausgeht, was aus der Voraussetzung $a > b$ folgt. Die Entwicklung ist durch die Reihe der Quotienten $q_1, q_2 \ldots q_n$ bestimmt. Umgekehrt läßt sich ein Kettenbruch in einen gemeinen Bruch zurückverwandeln.

2. Bricht man die Entwicklung eines Kettenbruchs bei einem beliebigen Quotienten ab, so entsteht ein Kettenbruch, der ein Partialbruch des vollständigen genannt wird. In dem n-gliedrigen Kettenbruch sind $n - 1$ Partialbrüche enthalten und der n-te Partialbruch ist gleich dem vollständigen Kettenbruch. Die Partialbrüche sind der Reihe nach:

$$q_1, \quad q_1 + \frac{1}{q_2}, \quad q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3}}, \quad \ldots \; q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_{n-1}}}}.$$

Jeder Partialbruch eines Kettenbruchs ist zu betrachten als durch Entwicklung eines gemeinen Bruchs entstanden, z. B. der k-te Partialbruch durch Entwicklung von $a_k : b_k$, so daß

$$\frac{a_k}{b_k} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_k}}}$$

ist. Umgekehrt kann man den k-ten Partialbruch in den gemeinen Bruch $a_k : b_k$ zurückverwandeln; a_k und b_k heißen dann kurz Zähler und Nenner des k-ten Partialbruchs. Nun ist

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{q_1}{1}, \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{q_1 q_2 + 1}{q_2}$$

und $a_3 : b_3$ wird aus $a_2 : b_2$ gefunden, indem man $q_2 + \frac{1}{q_3}$ an die Stelle von q_2 setzt, so daß man erhält:

$$\frac{a_3}{b_3} = \frac{q_1\left(q_2 + \frac{1}{q_3}\right) + 1}{q_2 + \frac{1}{q_3}} = \frac{q_3(q_1 q_2 + 1) + q_1}{q_3 \cdot q_2 + 1} = \frac{q_3 a_2 + a_1}{q_3 b_2 + b_1}.$$

Hieraus könnte man auf das Bildungsgesetz schließen:

$$1) \qquad \frac{a_k}{b_k} = \frac{q_k a_{k-1} + a_{k-2}}{q_k b_{k-1} + b_{k-2}},$$

dessen Richtigkeit durch vollständige Induktion, d. h. durch den Schluß von k

auf $k+1$ bewiesen werden kann. Die Richtigkeit von 1) vorausgesetzt, würde nämlich $a_{k+1} : b_{k+1}$ aus 1) gefunden werden müssen, wenn man $q_k + \frac{1}{q_{k+1}}$ an Stelle von q_k setzt. Es wäre also

$$\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} = \frac{\left(q_k + \frac{1}{q_{k+1}}\right) a_{k-1} + a_{k-2}}{\left(q_k + \frac{1}{q_{k+1}}\right) b_{k-1} + b_{k-2}} = \frac{q_{k+1}(q_k a_{k-1} + a_{k-2}) + a_{k-1}}{q_{k+1}(q_k b_{k-1} + b_{k-2}) + b_{k-1}}$$

$$= \frac{q_{k+1} a_k + a_{k-1}}{q_{k+1} b_k + b_{k-1}} \quad ;$$

in der Tat entsteht dies aus 1) durch Vertauschung von k mit $k+1$. Damit ist bewiesen, daß wenn 1) für k gilt, dieselbe Formel auch für $k+1$ richtig ist. Nun ist aber vorher gezeigt, daß sie für $k = 3$ gilt, demnach gilt sie für $k = 4$ u. s. w. und hieraus kann man die Allgemeingültigkeit der Formel 1) schließen.

Die Formel 1) ist eine rückschreitende (rekurrierende); sie dient zur Berechnung des Zählers und Nenners eines Partialbruchs, wenn die beiden vorhergehenden bekannt sind. Es können also der Reihe nach die Werte aller Partialbrüche aus den beiden ersten gefunden werden. Schreibt man aber diese beiden in folgender Form:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{q_1 \cdot 1 + 0}{1 \cdot 0 + 1}, \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{q_2 \cdot a_1 + 1}{q_2 \cdot b_1 + 0} \quad ,$$

so kann man auch sie aus ihnen noch vorangehenden (0-ten und —1-ten) Partialbrüchen 1 : 0 und 0 : 1 nach demselben Gesetze gebildet denken. Hiernach kann man die Partialbrüche des Kettenbruchs in dem Beispiel von Nr. 1 nach dem folgenden Schema entwickeln:

	0	1
	1	0
2	2	1
4	9	4
3	29	13
2	67	30

Die Partialbrüche des Kettenbruchs, den man durch den gemeinen Bruch 67 : 30 erhält, ergeben sich durch Verwandlung der Brüche

$$\frac{2}{1}, \quad \frac{9}{4}, \quad \frac{29}{13}$$

in Kettenbrüche.

3. Aus der Definition des Kettenbruchs sieht man, daß

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a}{b}, \quad \frac{a_2}{b_2} > \frac{a}{b}, \quad \frac{a_3}{b_3} < \frac{a}{b}, \quad \frac{a_4}{b_4} > \frac{a}{b}, \ldots$$

ist. Ein Partialbruch $a_k : b_k$ ist also kleiner oder größer als der vollständige Kettenbruch, je nachdem der Zeiger k ungerade oder gerade ist. Der Wert des vollständigen Kettenbruchs liegt also immer zwischen zwei aufeinander folgenden Partialbrüchen. Bildet man die Differenz von zwei benachbarten Partialbrüchen

$$\frac{a_k}{b_k} - \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} \quad ,$$

so ist diese positiv oder negativ, je nachdem k gerade oder ungerade ist. Bringt

man die beiden Brüche auf den gleichen Nenner $b_k b_{k+1}$, so ist der Zähler der Differenz

$$a_k b_{k+1} - a_{k+1} b_k$$
$$= a_k (q_{k+1} b_k + b_{k-1}) - (q_{k+1} a_k + q_{k-1}) b_k = -(a_{k-1} b_k - a_k b_{k-1}) \quad ,$$

also gleich dem negativen Zähler der Differenz der beiden Partialbrüche

$$\frac{a_{k-1}}{b_{k-1}} - \frac{a_k}{b_k} \quad ,$$

d. h. die Differenzen zweier aufeinander folgender Partialbrüche sind Brüche, deren Zähler denselben absoluten Wert, aber alternierende Vorzeichen haben. Dieser konstante Wert bestimmt sich, wenn man die Differenz von irgend zwei aufeinander folgenden Partialbrüchen bestimmt. Nun ist

$$\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} = \frac{q_1}{1} - \frac{q_2 q_1 + 1}{q_2} = -\frac{1}{q_2} \quad ,$$

der konstante absolute Wert ist also 1 und zwar positiv oder negativ, je nachdem k ungerade oder gerade ist. Damit erhält man:

$$2) \qquad a_k b_{k+1} - a_{k+1} b_k = (-1)^k \quad ,$$

$$3) \qquad \frac{a_k}{b_k} - \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} = \frac{(-1)^k}{b_k b_{k+1}} \quad .$$

Aus 2) folgt, daß a_k und b_k, a_{k+1} und b_{k+1} keinen gemeinsamen Teiler außer 1 haben können, mithin relativ prim sind. Die Werte der Partialbrüche sind also wie der des vollständigen Kettenbruchs irreducible Brüche.

Da die Nenner b_k, b_{k+1} mit wachsendem Zeiger immer größer werden, so sieht man an 3), daß die Differenzen aufeinander folgender Partialbrüche mit wachsendem Zeiger immer abnehmen. Da nun der Wert des vollständigen Kettenbruchs zwischen den Werten zweier aufeinander folgender Partialbrüche liegt, so nähern sich die Werte der Partialbrüche mit zunehmendem Zeiger mehr und mehr dem Werte des vollständigen Kettenbruchs. Daher sind die Werte der Partialbrüche Näherungswerte des vollständigen Kettenbruchs, die diesem um so näher kommen, je größer der Zeiger ist, d. h. in je größeren Zahlen sie ausgedrückt sind. Entwickelt man also einen gemeinen irreducibeln Bruch in einen Kettenbruch, so sind die Partialbrüche irreducible Brüche, die den Wert des Bruchs in kleineren Zahlen näherungsweise ausdrücken. Die Kettenbruchentwicklung wird daher gebraucht, um das Verhältnis zweier Größen, das in unbequem großen Zahlen gegeben ist, näherungsweise in bequemeren kleinen Zahlen anzugeben. Man kann sich dann auf die ersten Quotienten der Kettendivision und die ersten Partialbrüche beschränken, da die höheren wieder praktisch unbrauchbar sein würden. Dabei macht es keinen Unterschied, ob das Verhältnis rational oder nur näherungsweise bis zu einer gewissen Genauigkeit durch natürliche Zahlen ausgedrückt ist.

Beispiele:

1. Der englische Fuß ist gleich 0,30480 *m*. Wendet man auf 10 000 : 3048 die Kettendivision an, so erhält man die ersten fünf Quotienten 3, 3, 1, 1, 3 und die Näherungswerte 3 : 1, 10 : 3, 13 : 4, 23 : 7, 82 : 25.

2. Das Verhältnis π des Kreisumfangs zum Durchmesser ist bis auf fünf Dezimalen genau: 3,14159. Die ersten vier Näherungswerte sind 3 : 1, 22 : 7, 333 : 106, 355 : 113. Der zweite und vierte ist das Archimedische und das Verhältnis des Metius.

3. Das tropische Jahr ist gleich 365,2422 Tagen. Wie groß ist der Überschuß über 365 Tagen als Bruchteil eines Tages? Die ersten vier Näherungswerte

sind $1:4$, $7:29$, $8:33$, $31:128$. Man hat also nach vier bürgerlichen Jahren einen Tag; nach 29 deren sieben u. s. w. Tage einzuschalten.

4. Es ist $\sqrt{2} = 1{,}4142$ bis auf vier Stellen genau. Die Kettenbruchentwicklung gibt die fünf ersten Näherungswerte $1\frac{1}{2}$, $1\frac{2}{3}$, $1\frac{5}{7}$, $1\frac{12}{17}$, $1\frac{29}{41}$. Der fünfte gibt auf vier Dezimalen 1,4143.

4. Der Prozeß der Kettenbruchentwicklung kann wie der der Bildung einer Reihe unbegrenzt fortgesetzt gedacht werden. Ein solcher unendlicher Kettenbruch kann nicht durch Kettendivision, die an zwei natürlichen Zahlen ausgeführt wird, gewonnen werden. Sein Wert kann also auch nicht eine rationale Zahl sein. Man erhält einen unendlichen Kettenbruch, wenn man die Entwicklung auf eine Quadratwurzel anwendet, wie das folgende Beispiel zeigt. Es ist $\sqrt{13}$ gleich $q_1 = 3$ vermehrt um einen echten Bruch, so daß man setzen kann

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{1}{q_2} \quad ;$$

nun hat man:

$$\frac{1}{q_2} = \sqrt{13} - 3\,, \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{13}-3} = \frac{\sqrt{13}+3}{4} = 1 + \frac{1}{q_3} \quad ,$$

$$\frac{1}{q_3} = \frac{\sqrt{13}-1}{4}\,, \quad q_3 = \frac{4}{\sqrt{13}-1} = \frac{\sqrt{13}+1}{3} = 1 + \frac{1}{q_4} \quad ,$$

$$\frac{1}{q_4} = \frac{\sqrt{13}-2}{3}\,, \quad q_4 = \frac{3}{\sqrt{13}-2} = \frac{\sqrt{13}+2}{3} = 1 + \frac{1}{q_5} \quad ,$$

$$\frac{1}{q_5} = \frac{\sqrt{13}-1}{3}\,, \quad q_5 = \frac{3}{\sqrt{13}-1} = \frac{\sqrt{13}+1}{4} = 1 + \frac{1}{q_6} \quad ,$$

$$\frac{1}{q_6} = \frac{\sqrt{13}-3}{4}\,, \quad q_6 = \frac{4}{\sqrt{13}-3} = \sqrt{13}+3 = 6 + \frac{1}{q_7} \quad ,$$

$$\frac{1}{q_7} = \sqrt{13} - 3 = \frac{1}{q_2} \quad .$$

Weiter braucht man die Entwicklung nicht fortzusetzen, da sie sich die Quotienten in gleicher Reihenfolge wiederholen. Es ist also die Quadratwurzel durch einen unendlichen periodischen Kettenbruch dargestellt, nämlich

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}}$$

Man schreibt ihn abgekürzt $3 + (1, 1, 1, 1, 6, \ldots)$. Die Partialbrüche geben die Näherungswerte der irrationalen Zahl $\sqrt{13}$: $3\frac{1}{2}$, $3\frac{2}{3}$, $3\frac{3}{5}$, $3\frac{20}{33}$, ...

Ist in der quadratischen Gleichung

$$x^2 + 2ax - 1 = 0$$

a eine natürliche Zahl, so hat man

$$x(2a+x)=1\,,\quad x=\frac{1}{2a+x}=\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{2a+\ldots}}}$$

Nun ist die positive Wurzel der Gleichung

$$x=-a+\sqrt{a^2+1}\,,\quad \sqrt{a^2+1}=a+x\quad,$$

folglich hat man

$$\sqrt{a^2+1}=a+\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{2a+\ldots}}=a+(2a,\ldots)$$

in einem unendlichen periodischen Kettenbruch dargestellt. Z. B. ist

$$\sqrt{2}=1+(2,\ldots)\,;\quad \sqrt{17}=4+(8,\ldots)\,;\quad \sqrt{26}=5+(10,\ldots)\quad.$$

Die positive Wurzel einer quadratischen Gleichung läßt sich immer durch einen unendlichen periodischen Kettenbruch darstellen. So hat die Gleichung

$$3x^2+8x-7=0$$

die positive Wurzel

$$x=\frac{-4+\sqrt{37}}{3}\quad.$$

Da hier x ein echter Bruch ist, muß man $q_1=0$ und

$$\frac{\sqrt{37}-4}{3}=\frac{1}{q_2}$$

setzen, so daß man weiter erhält:

$$q_2=\frac{3}{\sqrt{37}-4}=\frac{\sqrt{37}+4}{7}=1+\frac{1}{q_3}\quad,$$

$$\frac{1}{q_3}=\frac{\sqrt{37}-3}{7}\,,\quad q_3=\frac{7}{\sqrt{37}-3}=\frac{\sqrt{37}+3}{4}=2+\frac{1}{q_4}\quad,$$

$$\frac{1}{q_4}=\frac{\sqrt{37}-5}{4}\,,\quad q_4=\frac{4}{\sqrt{37}-5}=\frac{\sqrt{37}+5}{3}=3+\frac{1}{q_5}\quad,$$

$$\frac{1}{q_5}=\frac{\sqrt{37}-4}{3}=\frac{1}{q_2}\quad.$$

Es ist also

$$x=\frac{-4+\sqrt{37}}{3}=(1,\ 2,\ 3,\ldots)\quad.$$

Umgekehrt läßt sich der Wert eines unendlichen periodischen Kettenbruchs durch die positive Wurzel einer quadratischen Gleichung vollkommen genau ausdrücken. Ist z. B.

$$x=(1,\ 2,\ 1,\ldots)\quad,$$

so kann man

$$x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+x}}}$$

setzen und berechnet man diesen Kettenbruch als Partialbruch nach dem Schema

	1 0	0 1
1	1	1
2	2	3
$1+x$	$2(1+x)+1$	$3(1+x)+1$

so ist

$$x = \frac{2(1+x)+1}{3(1+x)+1} ,$$

oder

$$3x^2 + 2x - 3 = 0 .$$

Diese quadratische Gleichung hat die positive Wurzel

$$x = \frac{-1+\sqrt{10}}{3} ;$$

es ist also der gegebene Kettenbruch

$$(1, 2, 1, \ldots) = \frac{-1+\sqrt{10}}{3} .$$

Steht vor dem eigentlichen Kettenbruch eine ganze Zahl, wie allgemein angenommen wurde, so bestimmt man zunächst den Wert des Kettenbruchs ohne die ganze Zahl nach dem soeben gezeigten Verfahren. Gehen den periodisch wiederkehrenden Quotienten vorperiodische Quotienten voraus, so bestimmt man zunächst den Wert des periodischen Kettenbruchs. Ist z. B.

$$x = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2} + \ldots}}}$$

gegeben, so kann man

$$x = 3 + \frac{1}{1+y}$$

setzen und y bestimmen als positive Wurzel einer quadratischen Gleichung. Man erhält:

$$2y^2 + 6y - 3 = 0 , \quad y = \frac{-3+\sqrt{15}}{2}$$

und daraus

$$x = \frac{22+\sqrt{15}}{7} .$$

5. Eine Anwendung finden noch die Kettenbrüche zur Auflösung einer diophantischen Gleichung ersten Grades mit zwei Unbekannten (vgl. § 23 Nr. 2). Ist diese nämlich

$$ax + by = c$$

gegeben, wobei a, b, c natürliche Zahlen, die relativ prim sind, bezeichnen und soll man x und y in ganzen Zahlen bestimmen, so nimmt man zu der gegebenen die Hilfsgleichung

$$\alpha x + \beta y = n ,$$

worin n eine willkürliche ganze Zahl bedeutet. Aus den beiden Gleichungen findet man

$$x = \frac{c\beta - bn}{a\beta - b\alpha} , \quad y = \frac{an - c\alpha}{a\beta - b\alpha} .$$

Diese Werte sind ganze Zahlen, wenn

$$a\beta - b\alpha = \pm 1$$

ist. Entwickelt man $a : b$ in einen Kettenbruch, so ist $\alpha : \beta$ der vorletzte Partialbruch (Nr. 3, 2). Zu den gegebenen Werten von a und b gibt es stets Werte von α und β, die x und y zu ganzen Zahlen machen und zwar ist

$$x = c\beta - bn\,, \quad y = an - c\alpha\,.$$

Hat man z. B.

$$23x + 17y = 97\,,$$

so ist 4 : 3 der vorletzte Partialbruch der Kettenbruchentwicklung von 23 : 17, mithin ist

$$x = 291 - 17n, \quad y = 23n - 388$$

oder in kleinern Zahlen

$$x = 2 - 17n\,, \quad y = 3 + 23n\,.$$

Ist die Gleichung von der Form

$$ax - by = c\,,$$

so hat man auch die Hilfsgleichung in der Form

$$\alpha x - \beta y = n$$

zu nehmen. Ist z. B. gegeben:

$$47x - 33y = 6\,,$$

so gibt die Kettenbruchentwicklung von 47 : 33 den vorletzten Partialbruch 10 : 7, also erhält man aus

$$47x - 33y = 6\,, \quad 10x - 7y = n\,,$$

$$x = 33n - 42\,, \quad y = 47n - 60\,,$$

wofür man auch durch Vertauschung von n mit $n + 2$ nehmen kann:

$$x = 24 + 33n\,, \quad y = 34 + 47n\,.$$

§ 37. Unendliche Reihen.

1. In § 33 Nr. 3 ist darauf hingewiesen worden, daß der Prozeß einer Reihenentwicklung im allgemeinen unbegrenzt fortgesetzt gedacht werden kann. Man erhält dann eine unendliche Reihe. Die Summe einer unendlichen Reihe ist im allgemeinen unendlich groß; nur in gewissen interessanten und mathematisch sehr wichtigen Fällen nähert sich die Summe mit wachsender Gliederzahl einer endlichen Grenze. Eine solche unendliche Reihe ist konvergent und der Grenzwert der Summe, dem sie sich bei unendlich wachsender Zahl der Glieder nähert, ist die Summe der unendlichen konvergenten Reihe. Das einfachste Beispiel ist die an der angeführten Stelle betrachtete unendliche geometrische Reihe

$$a + aq + aq^2 + \ldots\,,$$

die konvergiert, wenn sie fallend ist, d. h. wenn der Quotient q ein positiver oder negativer echter Bruch ist. Bei unendlich wachsender Gliederzahl nähert sich in diesem Falle die Summe der Reihe dem Grenzwert $a : (1 - q)$, so daß für

$$q^2 < 1\,, \quad a + aq + aq^2 + \ldots = \frac{a}{1 - q}$$

ist.

Eine unendliche Reihe kann selbstverständlich nur konvergieren, wenn ihre Glieder, entweder vom ersten oder wenigstens von einem späteren an, unendlich

abnehmen. Doch genügt, wie ebenfalls an der angeführten Stelle gezeigt, diese Eigenschaft nicht, um die Konvergenz der Reihe zu bedingen. Nimmt man aber an, daß in der unendlichen, nur aus positiven reellen Gliedern bestehenden Reihe

$$u_0, \; u_1, \; u_2, \ldots$$

von dem Gliede u_n an, der Quotient aus zwei aufeinander folgenden Gliedern

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} < q$$

ist, so daß also

$$u_{n+1} < u_n q, \quad u_{n+2} < u_{n+1} q, \ldots,$$

so kann man die Summe der Reihe in zwei Teile spalten, deren erster

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

jedenfalls endlich ist. Der zweite Teil ist dann

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots < u_n (1 + q + q^2 + \ldots) \; .$$

Ist nun q ein echter Bruch, so ist die rechte Seite der Ungleichung die Summe einer konvergenten unendlichen geometrischen Reihe und es ist auch der zweite Teil

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots < \frac{u_n}{1 - q}$$

also eine endliche Zahl. Man hat damit den Satz:

Die unendliche Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$$

konvergiert, wenn der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder $u_{k+1} : u_k$ sich mit unendlich wachsendem k einer endlichen Grenze nähert, die kleiner als 1 ist.

Haben die Glieder verschiedene Vorzeichen, so konvergiert die Reihe, wenn die Reihe der absoluten Werte der Glieder konvergiert. Sind die Glieder komplexe Zahlen, so zerfällt die Reihe in zwei Reihen, von denen die eine nur reelle, die andre imaginäre Glieder hat. Die ganze Reihe wird dann konvergieren, wenn jede dieser beiden Reihen konvergent ist.

Eine nach steigenden Potenzen einer veränderlichen Zahl x, des Arguments fortschreitende Reihe heißt eine Potenzreihe. Sie hat die Form

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + \ldots$$

Der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder ist

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} x \; .$$

Nähert sich der Quotient $a_{k+1} : a_k$ mit unendlich wachsendem k einer endlichen Grenze q, so konvergiert nach dem obigen Satze die Potenzreihe für jedes Argument x, dessen absoluter Wert kleiner als $1 : q$ ist. Z. B. ist für die unendliche arithmetisch-geometrische Reihe (§ 33 Nr. 2)

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + k x^{k-1} + \ldots$$

der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder

$$\frac{(k+1) x^k}{k x^{k-1}} = \frac{k+1}{k} x = \left(1 + \frac{1}{k}\right) x \; .$$

Der Koeffizient von x nähert sich mit unendlich wachsendem k der endlichen

Grenze 1, folglich konvergiert die Reihe, wenn $x^2 < 1$ ist. Man kann (vgl. § 33 Nr. 2) die Reihe zerlegen in unendlich viele geometrische Reihen:

$$\begin{aligned} &1 + x + x^2 + x^3 + \dots \\ &\quad + x + x^2 + x^3 + \dots \\ &\quad\quad + x^2 + x^3 + \dots \\ &\quad\quad\quad \vdots \end{aligned}$$

die alle unter der Voraussetzung $x^2 < 1$ konvergieren; mithin ist die Summe der gegebenen Reihe

$$s = \frac{1}{1-x} + \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x} + \dots = \frac{1 + x + x^2 + \dots}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad .$$

Wenn eine unendliche Potenzreihe konvergiert, so ist ihre Summe eine Funktion des Arguments.

2. Definiert man allgemein (vgl. § 31 Nr. 2) für eine beliebige reelle Zahl n

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \quad ,$$

so wird diese Zahl für keinen Wert von k gleich Null, wenn n keine natürliche Zahl ist. Die Potenzreihe

$$1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \dots$$

ist also für jedes n, das keine natürliche Zahl ist, eine unendliche und heißt die Newtonsche Reihe. Der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder ist:

$$\binom{n}{k+1}x^{k+1} : \binom{n}{k}x^k = \frac{n-k}{k+1}x = -\left(1 - \frac{n+1}{k+1}\right)x \quad .$$

Mit unendlich wachsendem k nähert sich, wie groß auch n sein möge

$$1 - \frac{n+1}{k+1}$$

dem endlichen Werte 1, daher konvergiert nach Nr. 1 die Newtonsche Reihe für jedes Argument x, dessen absoluter Wert kleiner als 1 ist. Unter dieser Voraussetzung ist die Summe der Reihe eine Funktion von x, und außerdem von n abhängig und möge mit $f(n, x)$ bezeichnet werden, so daß

$$x^2 < 1 \, , \quad f(n,x) = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{k}x^k + \dots$$

ist. Im Falle, daß n eine natürliche Zahl ist, wird die Reihe endlich und man hat nach § 31 Nr. 1, 2)

$$f(n,x) = (1+x)^n \quad .$$

Multipliziert man die beiden Newtonschen Reihen

$$f(m,x) = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \dots + \binom{m}{k}x^k + \dots$$

und

$$f(n,x) = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{k}x^k + \dots \quad ,$$

so erhält man:

$$f(m,x)\cdot f(n,x) = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots + \binom{m}{k}x^k + \cdots$$
$$+ \binom{n}{1}x + \binom{m}{1}\binom{n}{1}x^2 + \cdots + \binom{m}{k-1}\binom{n}{1}x^k + \cdots$$
$$+ \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{m}{k-2}\binom{n}{2}x^k + \cdots$$
$$\vdots$$
$$+ \binom{n}{k}x^k + \cdots .$$

Addiert man die Glieder mit gleichen Potenzen von x, so ist

$$\binom{m}{1} + \binom{n}{1} = m + n = \binom{m+n}{1} ,$$

$$\binom{m}{2} + \binom{m}{1}\binom{n}{1} + \binom{n}{2} = \frac{m(m-1) + 2mn + n(n-1)}{2} = \frac{(m+n)(m+n-1)}{1\cdot 2}$$
$$= \binom{m+n}{2}$$

und hiernach kann man annehmen, daß allgemein

$$1)\quad \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}\binom{n}{1} + \binom{m}{k-2}\binom{n}{2} + \cdots + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{m+n}{k}$$

sein werde. Nimmt man die Formel als richtig an, so muß sie auch gelten, wenn man $k+1$ an Stelle von k setzt. Setzt man nun in der Formel $m-1$ an Stelle von m und multipliziert mit $m:(k+1)$, und setzt dann $n-1$ an Stelle von n, indem man zugleich mit $n:(k+1)$ multipliziert, so würde sein:

$$\frac{m}{k+1}\left[\binom{m-1}{k} + \binom{m-1}{k-1}\binom{n}{1} + \cdots + \binom{m-1}{k-r}\binom{n}{r} + \cdots \binom{n}{k}\right] = \frac{m}{k+1}\binom{m+n-1}{k} ,$$

$$\frac{n}{k+1}\left[\binom{m}{k} + \cdots + \binom{m}{k-r+1}\binom{n-1}{r-1} + \cdots + \binom{n-1}{k}\right] = \frac{n}{k+1}\binom{m+n-1}{k} .$$

Addiert man die beiden Gleichungen, so ist

$$\frac{m}{k+1}\binom{m-1}{k} = \binom{m}{k+1} ,$$

$$\frac{m}{k+1}\binom{m-1}{k-r}\binom{n}{r} + \frac{n}{k+1}\binom{m}{k-r+1}\binom{n-1}{r-1} = \frac{k-r+1}{k+1}\binom{m}{k-r+1}\binom{n}{r}$$
$$+ \frac{r}{k+1}\binom{m}{k-r+1}\binom{n}{r} = \binom{m}{k-r+1}\binom{n}{r} ,$$

wobei für r der Reihe nach 1 bis $k+1$ zu setzen ist; die rechten Seiten geben addiert:

$$\frac{m+n}{k+1}\binom{m+n-1}{k} = \binom{m+n}{k+1} .$$

Damit hat man nun:

$$\binom{m}{k+1} + \binom{m}{k}\binom{n}{1} + \binom{m}{k-1}\binom{n}{2} + \cdots + \binom{m}{1}\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{m+n}{k+1} :$$

d. h. wenn die Formel 1) richtig ist, so gilt sie auch in entsprechender Weise für $k+1$. Da sie nun direkt nachgewiesen ist für $k=2$, so gilt sie auch

für $k = 3$, daher auch für $k = 4$ u. s. f. Ihre Richtigkeit ist also durch vollständige Induktion allgemein nachgewiesen worden. Mit Benutzung dieser Formel für $k = 1, 2, 3 \ldots$ ergibt sich nun

$$2) \quad f(m,x)\cdot f(n,x) = 1 + \binom{m+n}{1}x + \binom{m+n}{2}x^2 + \ldots + \binom{m+n}{k}x^k + \ldots = f(m+n,x) \quad .$$

Das Produkt von zwei NEWTONschen Reihen liefert also wieder eine NEWTONsche Reihe. Setzt man nun in 2) $m = -n$, so ist

$$f(-n,x)\,f(n,x) = f(0,x) = 1$$

und nimmt man für n eine natürliche Zahl, so ist

$$f(-n,x) = \frac{1}{f(n,x)} = (1+x)^{-n} \quad .$$

Es ist also

$$3) \quad x^2 < 1, \quad (1+x)^{-n} = 1 + \binom{-n}{1}x + \binom{-n}{2}x^2 + \ldots + \binom{-n}{k}x^k + \ldots \quad ,$$

d. h. die Entwicklung der Potenz eines Binoms wird, wenn der Exponent eine negative ganze Zahl ist, in derselben Weise ausgeführt, wie der binomische Satz für einen Exponenten lehrt, der eine natürliche Zahl ist. Nur liefert die Entwicklung eine unendliche konvergente Reihe und gilt nur für den Fall $x^2 < 1$. Der Koeffizient von x^k ist dabei

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}{k!} \quad ,$$

so daß die Glieder der Reihe alternierende Vorzeichen haben.

Der Satz 2) kann erweitert werden für das Produkt beliebig vieler NEWTONschen Reihen; er gilt also auch für eine Potenz einer solchen Reihe, wenn der Exponent q eine natürliche Zahl ist. Es muß daher für diesen Fall

$$[f(m,x)]^q = f(qm,x), \quad f(m,x) = [f(qm,x)]^{\frac{1}{q}}$$

sein. Nimmt man nun

$$qm = p, \quad m = \frac{p}{q}$$

und für p eine natürliche Zahl, so ist

$$f\left(\frac{p}{q},x\right) = [f(p,x)]^{\frac{1}{q}} = (1+x)^{\frac{p}{q}} \quad .$$

Ebenso ist, wenn man dasselbe auf $f(-m,x)$ anwendet nach 3):

$$f\left(-\frac{p}{q},x\right) = (1+x)^{-\frac{p}{q}} \quad .$$

Hierbei ist $p:q$ als eine rationale Zahl vorausgesetzt. Drückt man aber eine irrationale Zahl näherungsweise bis zu beliebiger Genauigkeit durch die rationale Zahl $p:q$ aus, so sieht man, daß für jedes beliebige reelle n die Entwicklung gelten muß:

$$4) \quad x^2 < 1, \quad (1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{k}x^k + \ldots$$

Die NEWTONsche Reihe gibt also für ein beliebiges reelles n unter der Voraussetzung $x^2 < 1$ die Entwicklung der n-ten Potenz des Binoms $1 + x$. Sie heißt daher in der Form 4) die Binomialreihe.

Ist das Argument der Binomialreihe imaginär, also $x = yi$, so spaltet sich diese in zwei Reihen, von denen die eine die geraden, die andre mit i multipliziert die ungeraden Potenzen von y enthält. Beide konvergieren unter derselben Bedingung, daß y ein positiver oder negativer echter Bruch ist. Unter dieser Bedingung konvergiert also die Reihe 4) auch für ein imaginäres x und ihre Summe ist eine komplexe Zahl.

Die Binomialreihe gibt für einen gebrochenen Exponenten, also für eine Wurzel nur den absoluten Wert dieser Wurzel. Die übrigen Werte müssen durch Multiplikation mit den Werten der entsprechenden Wurzel der Einheit (vgl. § 26 Nr. 2) gefunden werden.

3. In der unendlichen Reihe

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots ,$$

ist der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder:

$$\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} : \frac{x^k}{k!} = \frac{x}{k+1} .$$

Ist x reell und wächst k unbegrenzt, so wird dieser Quotient, sobald $k + 1 > x$ geworden ist, kleiner als 1 und nähert sich von diesem Gliede an unbegrenzt der Null, also konvergiert die Reihe für jedes reelle x. Ist x imaginär, also $x = yi$, so spaltet sich die Reihe in zwei Reihen, von denen die eine die geraden, die zweite die mit i multiplizierten ungeraden Potenzen von y enthält. Beide Reihen konvergieren für jeden Wert von y. Daher konvergiert die Reihe für jedes beliebige reelle oder imaginäre x. Die endliche Summe ist eine Funktion von x und es sei

$$5) \qquad f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

In dem besondern Falle $x = 1$ erhält man durch Summierung einer hinreichend großen Anzahl von Gliedern die mit e bezeichnete Summe der Reihe

$$6) \qquad e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = 2{,}71828\,18284\ldots$$

Die Zahl e ist eine transcendente irrationale Zahl wie die Ludolphsche Zahl π.

Entwickelt man nach Nr. 2, 4)

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{x}{n} + \binom{n}{2}\frac{x^2}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{x^3}{n^3} + \cdots + \binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{x}{1!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$+ \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{x^k}{k!} + \cdots ,$$

so ist diese Entwicklung jedenfalls zulässig, wie groß x sein möge, wenn man n unendlich wachsen läßt. Dann nähern sich aber die Brüche

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{2}{n}, \quad \frac{3}{n} \cdots$$

unbegrenzt der Null, jeder Koeffizient also der Zahl 1 und die Glieder gehen in die Glieder der Reihe 5) über. Ist nun

$$s_k = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} \quad ,$$

$$s_k' = 1 + \frac{x}{1!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2!} + \ldots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{x^k}{k!} \quad ,$$

so wird $s_k = s_k'$ für ein endliches k, wenn n unendlich groß ist. Es nähert sich aber auch $f(x) - s_k$ dem Grenzwert Null unbegrenzt an, wenn n unendlich wächst, also auch $f(x) - s_k'$. Daher kann man als Grenzwert von $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ bei unendlich wachsendem n die Summe der Reihe $f(x)$ setzen.

Nun ist aber für $x = 1$ bei unendlich wachsendem n

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad ,$$

daher, weil auch $\frac{x}{n}$ unendlich wächst, wie groß auch x sei:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}} = e \quad ,$$

also

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = f(x) = e^x \quad .$$

Man hat daher, wenn e durch 6) bestimmt ist, die Reihenentwicklung für jedes reelle oder imaginäre x:

$$7) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Diese Reihe heißt Exponentialreihe. Sie gibt die Potenz der Zahl e in eine Reihe von Potenzen des Exponenten entwickelt.

Setzt man

$$e^x = z \quad ,$$

so ist für eine beliebige Basis m

$$x\,{}^m\log e = {}^m\log z \,, \quad x = \frac{{}^m\log z}{{}^m\log e} \quad .$$

Setzt man diesen Wert in 7) ein, so würde die Zahl z durch eine Reihe von Potenzen ihres Logarithmus dargestellt werden. Diese Reihe wird am einfachsten, wenn ${}^m\log e = 1$, d. h. e als Basis des Logarithmensystems gewählt wird. Man nennt daher das System mit der Basis e das natürliche Logarithmensystem und bezeichnet den natürlichen Logarithmus der Zahl z mit $\mathrm{l}z$, so daß

$$z = e^{\mathrm{l}z}$$

gesetzt wird. Danach hat man aus 7) die Reihe

$$8) \qquad z = 1 + \frac{\mathrm{l}z}{1!} + \frac{(\mathrm{l}z)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{l}z)^3}{3!} + \ldots$$

Aus dem künstlichen Logarithmensystem mit der Basis m würde man umgekehrt

$$\mathrm{l}z = \frac{{}^m\log z}{{}^m\log e}$$

erhalten.

4. Nach dem Satze von MOIVRE (§ 26 Nr. 2) ist für einen beliebigen Winkel x, wenn n eine natürliche Zahl ist

$$\cos x + i \sin x = \left(\cos\frac{x}{n} + i \sin\frac{x}{n}\right)^n .$$

Nimmt man den Winkel x in Bogenmaß ausgedrückt an, also als Bogen eines Kreises vom Radius 1, so wird bei unendlich wachsendem n der Bogen $x:n$ unendlich klein und man kann

$$\cos\frac{x}{n} = 1 , \quad \sin\frac{x}{n} = \frac{x}{n}$$

setzen. Damit erhält man für ein unendlich großes n und für jedes x:

$$9) \qquad \cos x + i \sin x = \left(1 + \frac{x\,i}{n}\right)^n = e^{xi}$$

und durch Vertauschung von x mit $-x$:

$$\cos x - i \sin x = \left(1 - \frac{x\,i}{n}\right)^n = e^{-xi} ,$$

Entwickelt man e^{xi} in eine Reihe, die sich in zwei Reihen spaltet, so muß die Reihe der reellen Glieder als Summe $\cos x$ und die Reihe der imaginären Glieder als Summe $i \sin x$ haben; man erhält also die Reihen für die goniometrischen Funktionen eines beliebigen in Bogenmaß ausgedrückten Winkels:

$$10) \qquad \begin{cases} \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dots \\ \sin x = \dfrac{x}{1} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dots \end{cases}$$

Aus 9) folgt noch, wenn n eine ganze Zahl ist:

$$e^{x+2n\pi i} = e^x \cdot e^{2n\pi i} = e^x (\cos 2n\pi + i \sin 2n\pi) = e^x ,$$

d. h. e^x, die Exponentialfunktion ist wie die goniometrischen Funktionen periodisch. Die Periode ist aber imaginär, nämlich $2\pi \cdot i$.

5. Setzt man in Formel 8) $z = (1 + x)^n$, so ergibt sich

$$\frac{(1+x)^n - 1}{n} = l(1+x) + \frac{n}{2!}[l(1+x)]^2 + \dots$$

Läßt man hier n unendlich abnehmen, so wird

$$\frac{(1+x)^n - 1}{n} = l(1+x) .$$

Entwickelt man $(1 + x)^n$ nach der Binomialreihe, so wird

$$\frac{(1+x)^n - 1}{n} = x + \frac{n-1}{1} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{x^3}{3} + \dots$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots (k-1)} \cdot \frac{x^k}{k} + \dots$$

Läßt man nun n bis zur Grenze 0 abnehmen, so erhält man die logarithmische Reihe:

$$11) \qquad l(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \dots$$

Die Reihe konvergiert, wie die Binomialreihe, für jeden Wert von x zwischen -1 und $+1$. Für $x = 1$ würde die Reihe heißen

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots .$$

Man kann sie schreiben

$$1 - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) - (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}) - \cdots$$

oder

$$\tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6}) + \cdots$$

und da

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} > \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}, \quad \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} > \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6}, \cdots ,$$

ist, so liegt die Summe der unendlichen Reihe zwischen 1 und $\frac{1}{2}$, ist also endlich. Die logarithmische Reihe 11) konvergiert demnach auch für $x = 1$, während sie für $x = -1$ divergiert (vgl. § 33 Nr. 3). Es ist daher

$$l2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots$$

Den Wert von l2 hiernach numerisch zu berechnen ist nicht ausführbar, da man eine überaus große Zahl von Gliedern berechnen müßte, um den Wert nur auf wenige Dezimalstellen genau zu bestimmen. Von einer solchen unendlichen Reihe sagt man, sie konvergiere zu langsam. Die Reihe 11) konvergiert überhaupt sehr langsam, wenn der absolute Wert von x nahe an 1 liegt; sie ist daher nur zur Berechnung der natürlichen Logarithmen solcher Zahlen geeignet, die wenig größer als 1 sind.

Aus 11) folgt noch

$$l(1 - x) = -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \cdots$$

und wenn man diese Reihe von 11) subtrahiert

$$12) \qquad l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\,(x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \cdots) \quad .$$

Setzt man hierin

$$\frac{1+x}{1-x} = z, \quad x = \frac{z-1}{z+1} ,$$

so erhält man die für jede positive Zahl z gültige Reihenentwicklung:

$$13) \qquad lz = 2\left[\frac{z-1}{z+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \cdots\right] ,$$

die sich für nicht zu große Zahlen wie $z = 2, 3, 5, \ldots$ eignet. So ergibt sich z. B. bis auf fünf Stellen

$$l2 = 0{,}69\,315 , \quad l3 = 1{,}09\,861 , \quad l5 = 1{,}60\,944 \quad .$$

Da für eine beliebige Basis m

$$m^{{}^m\log z} = z$$

ist, so erhält man, indem man von beiden Seiten dieser Gleichung die natürlichen Logarithmen nimmt

$${}^m\log z \cdot lm = lz ,$$

also

$${}^m\log z = \frac{1}{lm} \cdot lz \quad .$$

Man erhält also die Logarithmen zu irgend einer Basis, indem man die natürlichen Logarithmen mit $1 : lm$, dem Modulus des Logarithmensystems zur

Basis m multipliziert. Für die gemeinen Logarithmen ist $110 = 12 + 15 = 2{,}30\,259$, also der Modulus

$$\frac{1}{110} = 0{,}43\,429 = \log e \quad .$$

So erhält man z. B.

$$\log 2 = 0{,}43\,429 \cdot 0{,}69\,315 = 0{,}30\,103 \quad .$$

Aus 9) erhält man noch

$$\frac{\cos x + i \sin x}{\cos x - i \sin x} = \frac{1 + i \tan x}{1 - i \tan x} = e^{2xi} \quad ,$$

folglich ist

$$2xi = 1\left(\frac{1 + i \tan x}{1 - i \tan x}\right), \quad x = \frac{1}{2i} 1\left(\frac{1 + i \tan x}{1 - i \tan x}\right) \quad .$$

Wendet man nun die Reihe 12) an, indem man an Stelle von x setzt: $i \tan x$, so bleibt die Reihenentwicklung gültig für den absoluten Wert $x \leqq \frac{1}{4}\pi$ und man erhält

$$x = \tan x - \tfrac{1}{3}\tan^3 x + \tfrac{1}{5}\tan^5 x - \ldots \quad .$$

Für den äußersten Wert $x = \frac{1}{4}\pi$, für den die Reihe noch konvergiert, erhält man die Leibnizsche Reihe:

$$\tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots \quad ,$$

die die Möglichkeit zeigt, π durch Summierung einer unendlichen Reihe bis zu jeder beliebigen Genauigkeit zu berechnen, wenn auch die Ausführung wegen der sehr langsamen Konvergenz der Reihe praktisch nicht empfehlenswert ist.

Die Formel 13) gibt für jede reelle Zahl einen reellen Wert von $1z$. Es ist aber wegen der Periodizität der Exponentialfunktion, wenn n eine willkürliche ganze Zahl ist,

$$z = e^{1z} = e^{1z + 2n\pi i} \quad .$$

Daher ist, wenn man unter $[1z]$ die reelle Summe der Reihe 13) versteht:

$$1z = [1z] + 2n\pi i \quad .$$

Der natürliche Logarithmus einer reellen Zahl ist also unendlich vieldeutig; nur ein Wert ist reell, die übrigen sind komplex.

Siebenter Abschnitt.

Die Determinanten.

§ 38. Begriff und Haupteigenschaften der Determinanten.

1. In § 18 Nr. 3 wurde bei Gelegenheit der Auflösung zweier Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten der Begriff der Determinante von vier Elementen aufgestellt, und es wurde auf die mögliche Ausdehnung der betreffenden Erörterung auf jede beliebige Anzahl von Gleichungen und Unbekannten hingedeutet. Führt man diese Andeutung nacheinander für Gleichungen mit drei, vier, fünf Unbekannten aus, so liefern die allgemeinen Auflösungsformeln dieser Gleichungen gewisse aus den gegebenen Koeffizienten in gesetzmäßiger Weise gebildete Ausdrücke. Im nachfolgenden soll der Kürze und Allgemeinheit der Darstellung wegen der umgekehrte Gang eingeschlagen, also nach erfolgter Angabe des Bildungsgesetzes und der wichtigsten Eigenschaften der betreffenden Ausdrücke gezeigt werden, daß diese, neben andern Anwendungen, in der Theorie der Gleichungen eine wesentliche Rolle spielen.

Sind mehrere Gruppen von Zahlen gegeben, so kann man die einzelnen Zahlen, die man die Elemente der Gruppen nennt, sich in aufeinander folgenden Horizontalreihen (Zeilen) geordnet denken, so daß jede Zeile die Elemente einer Gruppe nach ihrer Ordnung enthält und die gleichstelligen Elemente der verschiedenen Gruppen demnach in je einer Vertikalreihe (Kolonne) untereinander zu stehen kommen. Es empfiehlt sich dabei, zu leichterer Übersicht die Elemente durch Buchstaben mit doppelten Indices zu bezeichnen, so daß der eine Index die jedesmalige Zeile, der andre die Kolonne angibt, der das Element angehört. So ist z. B.

$$\begin{matrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{matrix}$$

ein in dieser Weise bezeichnetes System von Elementen. Allgemein soll im folgenden a_i^k das k-te Element der i-ten Zeile oder, was dasselbe ist, das i-te Element der k-ten Kolonne, oder mit andern Worten dasjenige Element bezeichnen, das an der Stelle steht, wo die i-te Zeile und die k-te Kolonne einander schneiden.

Wo eine Verwechslung der obern Indices mit Exponenten von Potenzen möglich ist, kann statt a_k^i auch a_{ik} geschrieben werden.

Es sei ferner zunächst vorausgesetzt, daß alle Horizontalreihen des Systems gleich viele Elemente enthalten, und daß auch die Anzahl dieser Reihen gleich derjenigen der Kolonnen, die Anzahl der Elemente also, wie in dem vorstehenden Beispiel, eine Quadratzahl sei.

2. Man kann sich nun die Aufgabe stellen, alle möglichen Komplexionen von Elementen eines derartigen Systems anzugeben, die so gebildet sind, daß jede Komplexion aus jeder Zeile und aus jeder Kolonne nur ein einziges Element enthalte.

Um diese Komplexionen vollständig und in geordneter Reihenfolge zu bilden, kann man als die erste diejenige der vom ersten Element der ersten bis zum letzten Element der letzten Zeile gehenden Diagonalreihe

$$a_1^1 \; a_2^2 \; a_3^3 \; a_4^4 \; \ldots \; a_n^n$$

annehmen und aus dieser alle übrigen dadurch ableiten, daß man entweder ihre untern oder ihre obern Indices auf alle möglichen Weisen permutiert. Denn permutiert man z. B. die untern Indices, so liefern die geordnet aufeinander folgenden obern Indices die Gewähr, daß jedesmal aus jeder Kolonne nur ein einziges Element vorkomme; da ferner auch bei den untern Indices niemals zwei gleiche vorkommen und alle n verschiedenen zugleich vorhanden bleiben, so ist die gleiche Gewähr für die Zeilen geleistet. Die Verschiedenheit und Vollständigkeit der Permutationen endlich sorgt dafür, daß jede mögliche Auswahl der Elemente in der gedachten Art einmal und nur ein einziges Mal vorkomme.

Man ersieht hieraus zugleich, daß jede der angegebenen Komplexionen n Elemente enthält, und daß ihre Anzahl gleich $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n = n!$ ist.

Bildet man aus den Elementen jeder derartigen Komplexion eines Systems von n^2 Elementen als aus Faktoren ein Produkt und gibt jedem dieser Produkte das Vorzeichen $+$ oder $-$, je nachdem die Anzahl der Inversionen in der betreffenden Permutation der Indices gerade oder ungerade ist (vergl. § 28 Nr. 4), so heißt die Summe aller dieser Produkte die Determinante des Systems der n^2 Elemente.

Je nach dem Werte von n heißt die Determinante eine solche zweiten, dritten, ... n-ten Grades.

Man kann hiernach die Determinante eines Systems von n^2 Elementen aus ihrem Anfangsgliede dnrch Permutation sowohl der untern als der obern Indices ableiten, und es entsteht somit die Frage, ob die Determinante in beiden Fällen auch denselben Wert erhalte. Daß man in dem einen wie in dem andern jede mögliche der gedachten Komplexionen nur ein einziges Mal und somit auch in beiden dieselben Produkte erhält, ist aus dem vorhergegangenen klar; es fragt sich also nur, ob auch ein und dasselbe Produkt in beiden Fällen stets dasselbe Vorzeichen erhalte. Es sei beispielsweise

$$-a_2^1\, a_5^2\, a_3^3\, a_1^4\, a_4^5$$

ein durch Permutation der untern Indices abgeleitetes Glied einer Determinante, so erhält man, abgesehen vom Vorzeichen, durch Permutation der obern Indices dasselbe Glied in der Form

$$-a_1^4\, a_2^1\, a_3^3\, a_4^5\, a_5^2 \quad ,$$

und die Frage ist also, ob die Permutation 4 1 3 5 2 mit der ersten 2 5 3 1 4 übereinstimmend eine ungerade Anzahl von Inversionen hat oder nicht. Im vorliegenden Beispiel ergibt sich, daß die Anzahl der Inversionen in beiden Fällen dieselbe ist, nämlich fünf. Um die Frage ganz allgemein zu entscheiden, genügt es zu zeigen, daß jedes Glied einer Determinante, das sich aus einem andern durch Vertauschung zweier untern Indices ableiten läßt, auch aus demselben Gliede durch Vertauschung von nur zwei obern Indices erhalten werden kann. Da man nämlich alle Permutationen gegebener Elemente durch wiederholte Vertauschungen von je zwei Elementen bilden kann, und da bei jeder solchen Vertauschung die Anzahl der Inversionen sich um eine ungerade Zahl ändert, so muß auch die Anzahl der Inversionen in je zwei aus dem Anfangsgliede durch eine gleiche Reihe von Vertauschungen je zweier obern oder untern Indices ableitbaren Permutationen gleichzeitig gerade oder ungerade sein. Es sei nun

$$a_\alpha^1\, a_\beta^2 \ldots a_\delta^d \ldots a_\varepsilon^e \ldots a_\nu^n$$

irgend ein Glied einer Determinante, und man vertausche in ihm die untern Indices δ und ε miteinander, so erhält man das Glied

$$a_\alpha^1\, a_\beta^2 \ldots a_\varepsilon^d \ldots a_\delta^e \ldots a_\nu^n \quad .$$

Dasselbe Glied aber entsteht, wie man unmittelbar einsieht, aus dem vorhergehenden, nur mit andrer Reihenfolge der Faktoren, durch bloße Vertauschung der obern Indices d und e, so daß also die Übereinstimmung auch der Vorzeichen bewiesen ist.

3. Man bezeichnet eine Determinante abgekürzt, indem man das, wie oben gezeigt, geordnete System der Elemente zwischen zwei von oben nach unten verlaufende Striche, oder indem man das Anfangsglied mit doppeltem Vorzeichen hinter ein Summenzeichen Σ schreibt, z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_1^1\, a_2^2\, a_3^3 \quad .$$

Die zweite Bezeichnung ist deshalb ausreichend, weil durch das Anfangsglied alle folgenden Glieder bestimmt sind; das obere Zeichen ist dabei das Vorzeichen dieses Anfangsglieds, das untere deutet den Wechsel der Vorzeichen in den folgenden Gliedern an. Bildet man die betreffenden Permutationen in der Weise, daß jede folgende aus der vorhergehenden durch Vertauschung von nur zwei Elementen entsteht, so tritt dieser Wechsel regelmäßig ein, d. h. die Vorzeichen der Glieder der Determinante sind alternierend.

Beispielsweise ist

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2 = a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1 \quad .$$

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 a_3^3 - a_1^1 a_3^2 a_2^3 + a_2^1 a_3^2 a_1^3 - a_2^1 a_1^2 a_3^3 + a_3^1 a_1^2 a_2^3 - a_3^1 a_2^2 a_1^3$$

oder $= a_1^1 a_2^2 a_3^3 - a_1^1 a_2^3 a_3^2 + a_1^2 a_2^3 a_3^1 - a_1^2 a_2^1 a_3^3 + a_1^3 a_2^1 a_3^2 - a_1^3 a_2^2 a_3^1$.

$$\begin{aligned} \Sigma \pm a_1^1 a_2^2 a_3^3 a_4^4 = {} & a_1^1 a_2^2 a_3^3 a_4^4 - a_1^1 a_2^2 a_3^4 a_4^3 + a_1^1 a_2^3 a_3^4 a_4^2 - a_1^1 a_2^3 a_3^2 a_4^4 \\ & + a_1^1 a_2^4 a_3^2 a_4^3 - a_1^1 a_2^4 a_3^3 a_4^2 + a_1^2 a_2^4 a_3^3 a_4^1 - a_1^2 a_2^4 a_3^1 a_4^3 \\ & + a_1^2 a_2^3 a_3^1 a_4^4 - a_1^2 a_2^3 a_3^4 a_4^1 + a_1^2 a_2^1 a_3^4 a_4^3 - a_1^2 a_2^1 a_3^3 a_4^4 \\ & + a_1^3 a_2^2 a_3^4 a_4^1 - a_1^3 a_2^2 a_3^1 a_4^4 + a_1^3 a_2^4 a_3^1 a_4^2 - a_1^3 a_2^4 a_3^2 a_4^1 \\ & + a_1^3 a_2^1 a_3^2 a_4^4 - a_1^3 a_2^1 a_3^4 a_4^2 + a_1^3 a_2^4 a_3^2 a_4^1 - a_1^3 a_2^4 a_3^1 a_4^2 \\ & + a_1^4 a_2^2 a_3^1 a_4^3 - a_1^4 a_2^2 a_3^3 a_4^1 + a_1^4 a_2^1 a_3^3 a_4^2 - a_1^4 a_2^1 a_3^2 a_4^3 \quad . \end{aligned}$$

Aus den vorstehenden Erklärungen und frühern Sätzen folgt: Jede Determinante eines Systems von n^2 Elementen besteht aus $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$ Gliedern, von denen jedes ein Produkt von n Faktoren ist. Von diesen Gliedern ist die Hälfte positiv, die andre Hälfte negativ. Auf den Wert einer Determinante ist es ohne Einfluß, ob man die Zeilen mit den untern und die Kolonnen mit den obern Indices bezeichnet, oder ob man umgekehrt verfährt, und zwei Systeme, die so beschaffen sind, daß die Zeilen eines jeden mit den Kolonnen des andern in derselben Ordnung übereinstimmen, haben dieselbe Determinante.

4. Die Bildung einer Determinante aus dem gegebenen System ihrer Elemente wird wesentlich erleichtert durch die Kenntnis der wichtigsten allgemeinen Eigenschaften der Determinanten, die im folgenden zunächst entwickelt werden sollen.

Vertauscht man in dem System der Elemente zwei parallele Reihen miteinander, also entweder eine Zeile mit einer andern Zeile oder eine Kolonne mit einer andern Kolonne, so kann man die Determinante des neuen Systems aus der des alten dadurch ableiten, daß man in jedem einzelnen Gliede der alten die beiden betreffenden untern oder obern Indices miteinander vertauscht. Werden beispielsweise in

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 a_3^3 - a_1^1 a_3^2 a_2^3 + a_2^1 a_3^2 a_1^3 - a_2^1 a_1^2 a_3^3 + a_3^1 a_1^2 a_2^3 - a_3^1 a_2^2 a_1^3$$

die dritte und die erste Zeile miteinander vertauscht, so wechseln in der Determinante nur die untern Indices 3 und 1 in jedem Gliede ihre Stellen, und man erhält also

$$\begin{vmatrix} a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \end{vmatrix} = a_3^1 a_2^2 a_1^3 - a_3^1 a_1^2 a_2^3 + a_2^1 a_1^2 a_3^3 - a_2^1 a_3^2 a_1^3 + a_1^1 a_3^2 a_2^3 - a_1^1 a_2^2 a_3^3 \quad .$$

Es bleiben also in der neuen Determinante dem absoluten Werte nach dieselben einzelnen Glieder, wie in der alten, aber ihre Vorzeichen werden sämtlich die entgegengesetzten, denn die Vertauschung zweier Elemente in einer Permutation bewirkt nach § 28 Nr. 4 eine Veränderung der Anzahl der Inversionen um eine ungerade Zahl.

Bei Vertauschung zweier parallelen Reihen in dem System der Elemente behält also die Determinante denselben absoluten Wert und ändert ihr Vorzeichen.

Insbesondere folgt hieraus, daß jede Determinante, deren System der Elemente zwei einander gleiche parallele Reihen hat, den Wert Null haben muß,

denn durch Vertauschung zweier gleichen Reihen kann die Determinante R keine Änderung erleiden, es muß also in diesem Falle $R = -R$ sein, woraus $R = 0$ folgt.

Nimmt man mehrere Male nacheinander eine Vertauschung zweier parallelen Reihen in dem System der Elemente vor, so erhält man, abgesehen vom Vorzeichen, immer dieselbe Determinante; das Vorzeichen aber ändert sich oder bleibt dasselbe, je nachdem die Anzahl der vorgenommenen Vertauschungen eine ungerade oder eine gerade ist.

5. Vertauscht man irgend eine Reihe des Systems mit einer angrenzenden parallelen Reihe, z. B. die siebente Zeile mit der sechsten, darauf die so vorgerückte Reihe wieder mit der folgenden, also in dem gewählten Beispiel die vorher in die sechste Stelle gerückte Zeile mit der fünften, und fährt so beliebig weit fort (etwa bis zur dritten Zeile), so gelangt die zuerst genannte (siebente) Reihe schließlich an eine andre Stelle (in die dritte), ohne daß die übrigen ihre Reihenfolge gegeneinander verändert haben. Man würde dasselbe Resultat erhalten haben, wenn man die verschobene Reihe an ihrer ursprünglichen Stelle gestrichen und unmittelbar an der zuletzt einzunehmenden Stelle zwischen die übrigen eingeschoben hätte. Eine derartige Veränderung bewirkt also nur eine Umkehrung des Vorzeichens der Determinante, wenn die Anzahl jener Vertauschungen, oder was dasselbe ist, die Anzahl der zwischenliegenden Reihen ungerade, sie läßt den Wert der Determinante völlig unverändert, wenn diese Anzahl gerade ist.

Macht man also in der gedachten Weise die siebente Zeile zur dritten, schiebt sie also vor der ursprünglich dritten ein und läßt sie somit vier zwischenliegende Zeilen überspringen, so bleibt die Determinante dieselbe.

Man kann hiernach insbesondere jede Horizontal- oder Vertikalreihe zur ersten machen, ohne die Reihenfolge der übrigen zu verändern. War jene Reihe ursprünglich die k-te, so werden $k - 1$ parallele Reihen übersprungen, und die Determinante behält ihr Vorzeichen oder wechselt es, je nachdem k ungerade oder gerade ist.

Da man in dieser Weise nacheinander jede beliebige Zeile zur ersten Zeile und jede beliebige Kolonne zur ersten Kolonne machen kann, so läßt sich das System der Elemente so umformen, daß irgend ein beliebiges Element a_i^k das Anfangselement wird. Man hat zu diesem Zwecke nur zuerst die i-te Zeile zur ersten Zeile und sodann die k-te Kolonne zur ersten Kolonne zu machen oder umgekehrt. Da dies den Erfolg von $i - 1 + k - 1$ Vertauschungen hat, so folgt, daß die Determinante des neuen Systems denselben oder den entgegengesetzten Wert mit der ursprünglichen hat, je nachdem $i + k$ gerade oder ungerade ist. Bezeichnet man also die eine Determinante durch R, die andre durch R_1, so ist

$$R_1 = (-1)^{i+k} R \quad .$$

§ 39. Unterdeterminanten.

1. Da jedes Glied einer Determinante aus jeder Reihe nur ein einziges Element enthält, und da alle auf diese Weise möglichen Glieder vorkommen, so kann man die Glieder nach den Elementen irgend einer beliebigen Reihe ordnen, indem man alle diejenigen, die dasselbe Element aus dieser Reihe enthalten, zusammenfaßt.

So läßt sich beispielsweise die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & \dots & a_2^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

nach den Elementen der ersten Zeile ordnen und in der Form

$$a_1^1 A_1 + a_1^2 A_2 + \ldots + a_1^n A_n$$

schreiben, wo allgemein $a_1^k A_k$ die Zusammenfassung aller der Glieder bedeutet, die aus der ersten Zeile das Element a_1^k enthalten. Um in diesem und ähnlichen Fällen die Koeffizienten A unmittelbar zu bestimmen, sei zunächst dieser Koeffizient für das Anfangselement a_1^1 zu ermitteln.

Da alle Glieder, die dieses Element enthalten, weder aus der ersten Zeile, noch aus der ersten Kolonne ein weiteres Glied enthalten können, dagegen a_1^1 in jeder möglichen Zusammenstellung mit je einem Gliede der übrigen Zeilen und der übrigen Kolonnen vorkommen muß, so ergibt sich, daß der gesuchte Koeffizient die Determinante desjenigen Systems von Elementen sein muß, das nach Streichung der ersten Zeile und der ersten Kolonne übrig bleibt.

Jedes andre Element des ursprünglichen Systems kann aber nach dem vorhergehenden zum Anfangselement gemacht werden. Im Zusammenhang damit folgt nun, daß man den Koeffizienten irgend eines Gliedes a_i^k in der ursprünglichen Determinante erhält, wenn man in dem System der Elemente die i-te Zeile und die k-te Kolonne streicht, die Determinante des so übrig bleibenden Systems von $(n-1)^2$ Elementen entwickelt und ihr das Vorzeichen $+$ oder $-$ gibt, je nachdem $i+k$ gerade oder ungerade ist.

Jeder solche Koeffizient heißt eine Unterdeterminante der ursprünglichen; die Unterdeterminante zum Element a_i^k soll im folgenden durch A_i^k bezeichnet werden. So ist beispielsweise

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_1^1 \begin{vmatrix} a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} - a_2^1 \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1^3 \\ a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} + a_3^1 \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^2 & a_2^3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1^1 \begin{vmatrix} a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} - a_1^2 \begin{vmatrix} a_2^1 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^3 \end{vmatrix} + a_1^3 \begin{vmatrix} a_2^1 & a_2^2 \\ a_3^1 & a_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= -a_1^2 \begin{vmatrix} a_2^1 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^3 \end{vmatrix} + a_2^2 \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^3 \\ a_3^1 & a_3^3 \end{vmatrix} - a_3^2 \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^3 \end{vmatrix}$$

u. s. w.

Soll ferner beispielsweise die zum Gliede a_2^3 gehörige Unterdeterminante der Determinante $\Sigma \pm a_1^1 a_2^2 a_3^3 a_4^4$ bestimmt werden, so ergibt sich

$$- \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^4 \end{vmatrix} .$$

Hiernach läßt sich jede Determinante mittels der Unterdeterminanten nach Gliedern einer und derselben Reihe entwickeln und ordnen. Die Koeffizienten dieser einzelnen aufeinander folgenden Glieder sind bei der angegebenen Bildungsweise abwechselnd positiv und negativ.

So erhält man z. B. durch Entwicklung nach den Gliedern der ersten Kolonne

$$\begin{vmatrix} 4, & 2, & 3, & 8 \\ 7, & 5, & 6, & 1 \\ 3, & 2, & 1, & 4 \\ 5, & 8, & 2, & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 5, & 6, & 1 \\ 2, & 1, & 4 \\ 8, & 2, & 6 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 2, & 3, & 8 \\ 2, & 1, & 4 \\ 8, & 2, & 6 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2, & 3, & 8 \\ 5, & 6, & 1 \\ 8, & 2, & 6 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2, & 3, & 8 \\ 5, & 6, & 1 \\ 2, & 1, & 4 \end{vmatrix} .$$

Es ist aber in gleicher Weise

$$\begin{vmatrix} 5, 6, 1 \\ 2, 1, 4 \\ 8, 2, 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1, 4 \\ 2, 6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 6, 1 \\ 2, 6 \end{vmatrix} + 8 \cdot \begin{vmatrix} 6, 1 \\ 1, 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot (6-8) - 2 \cdot (36-2) + 8\,(24-1) = +106 ,$$

$$\begin{vmatrix} 2, 3, 8 \\ 2, 1, 4 \\ 8, 2, 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1, 4 \\ 2, 6 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3, 8 \\ 2, 6 \end{vmatrix} + 8 \cdot \begin{vmatrix} 3, 8 \\ 1, 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (6-8) - 2 \cdot (18-16) + 8 \cdot (12-8) = +24 ,$$

$$\begin{vmatrix} 2, 3, 8 \\ 5, 6, 1 \\ 8, 2, 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 6, 1 \\ 2, 6 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3, 8 \\ 2, 6 \end{vmatrix} + 8 \cdot \begin{vmatrix} 3, 8 \\ 6, 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (36-2) - 5 \cdot (18-16) + 8 \cdot (3-48) = -302 ,$$

$$\begin{vmatrix} 2, 3, 8 \\ 5, 6, 1 \\ 2, 1, 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 6, 1 \\ 1, 4 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 3, 8 \\ 1, 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3, 8 \\ 6, 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (24-1) - 5 \cdot (12-8) + 2 \cdot (3-48) = -64 ;$$

mithin ist die gegebene Determinante gleich -330.

2. Aus der angegebenen Bildungsweise einer Determinante mittels der Unterdeterminanten, also aus ihrer Entwicklung in der Form

$$R = a_1^k A_1^k + a_2^k A_2^k + \ldots + a_i^k A_i^k + \ldots + a_n^k A_n^k ,$$

oder

$$R = a_i^1 A_i^1 + a_i^2 A_i^2 + \ldots + a_i^k A_i^k + \ldots + a_i^n A_i^n$$

ergeben sich die folgenden Sätze:

Sind alle Elemente einer Reihe mit Ausnahme eines einzigen gleich Null, so reduziert sich die Determinante auf das Produkt dieses einen Elements mit der zu ihm gehörigen Unterdeterminante.

Denn sind beispielsweise alle Elemente der Reihe $a_1^k, a_2^k \ldots a_n^k$ mit Ausnahme von a_i^k gleich Null, so wird die erste der vorstehenden Entwicklungen zu

$$R = a_i^k A_i^k .$$

So ist also beispielsweise

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & d \\ e & f & g \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} c & d \\ f & g \end{vmatrix} ; \qquad \begin{vmatrix} a & b & 0 & d \\ e & f & g & h \\ i & k & 0 & m \\ n & 0 & 0 & p \end{vmatrix} = -g \begin{vmatrix} a & b & d \\ i & k & m \\ n & 0 & p \end{vmatrix} .$$

Die Elemente b, e im ersten und e, f, h im zweiten dieser Beispiele sind daher ohne jeden Einfluß auf den Wert der Determinante, und man könnte also für sie beliebige andre Zahlen setzen, ohne daß dieser Wert sich änderte.

3. Multipliziert man jedes Element einer Reihe mit der zu dem entsprechenden Element einer parallelen Reihe gehörenden Unterdeterminante, so ist die Summe aller dieser Produkte gleich Null.

Denn ist $a_1^k, a_2^k, a_3^k \ldots a_n^k$ die eine, $a_1^\lambda, a_2^\lambda, a_3^\lambda \ldots a_n^\lambda$ die dazu parallele Reihe, so ist die Determinante

$$R = a_1^k A_1^k + a_2^k A_2^k + \ldots + a_n^k A_n^k ,$$

und die Summe jener Produkte ist

$$a_1^\lambda A_1^k + a_2^\lambda A_2^k + \ldots + a_n^\lambda A_n^k .$$

Diese entsteht also aus jener, wenn man in dem System der Elemente an die Stelle der Reihe a_1^k, a_2^k u. s. w. die andre a_1^λ, a_2^λ u. s. w. setzt, oder sie ist

die Determinante des so gebildeten neuen Systems. Da nun dieses zwei einander gleiche parallele Reihen a_1^λ, a_2^λ ... enthält, so ist der Wert seiner Determinante nach § 38 Nr. 4 gleich Null.

Ebenso folgt aus

$$R = a_i^1 A_i^1 + a_i^2 A_i^2 + \ldots + a_i^n A_i^n$$

die Gleichung

$$0 = a_m^1 A_i^1 + a_m^2 A_i^2 + \ldots + a_m^n A_i^n \quad .$$

4. Addiert man zu jedem Element einer Reihe das entsprechende Element einer ihr parallelen Reihe mit gleichen oder entgegengesetzten Vorzeichen, so ändert sich der Wert der Determinante nicht.

Dieser Satz und sein Beweis können sogleich verallgemeinert werden, indem man statt der Glieder der addierten oder subtrahierten Reihe ihre Produkte mit derselben beliebigen Zahl ϱ anwendet. Die nach den Elementen der ersten Reihe geordnete, also z. B. in der Form

$$R = a_1^k A_1^k + a_2^k A_2^k + \ldots + a_n^k A_n^k$$

geschriebene Determinante geht nämlich durch die angegebene Veränderung des Systems über in

$$\begin{aligned} R_1 &= (a_1^k + \varrho\, a_1^\lambda) A_1^k + (a_2^k + \varrho\, a_2^\lambda) A_2^k + \ldots + (a_n^k + \varrho\, a_n^\lambda) A_n^k \\ &= a_1^k A_1^k + a_2^k A_2^k + \ldots + a_n^k A_n^k + \varrho\,(a_1^\lambda A_1^k + a_2^\lambda A_2^k + \ldots + a_n^\lambda A_n^k) \quad . \end{aligned}$$

Da nun das letzte in der Klammer enthaltene Aggregat nach dem Satze in Nr. 3 den Wert Null hat, so ergibt sich

$$R_1 = a_1^k A_1^k + a_2^k A_2^k + \ldots + a_n^k A_n^k = R \quad .$$

Der Wert einer Determinante ändert sich also nicht, wenn man in dem System der Elemente an Stelle jedes Gliedes einer beliebigen Reihe die Summe desselben Gliedes und des Produkts des entsprechenden Gliedes einer parallelen Reihe mit demselben beliebigen Faktor setzt.

Dieser Satz ist besonders wertvoll zur Erleichterung der Berechnung der Determinanten bestimmter Zahlen, denn er gestattet, an Stelle des Systems der Elemente andre, für die Berechnung bequemere Systeme zu setzen. So könnte man z. B. in der in Nr. 2 berechneten Determinante

$$\begin{vmatrix} 4, & 2, & 3, & 8 \\ 7, & 5, & 6, & 1 \\ 3, & 2, & 1, & 4 \\ 5, & 8, & 2, & 6 \end{vmatrix}$$

durch Subtraktion der Glieder der zweiten Kolonne von den entsprechenden Gliedern jeder andern Kolonne die Determinante

$$\begin{vmatrix} 2, & 2, & 1, & 6 \\ 2, & 5, & 1, & -4 \\ 1, & 2, & -1, & 2 \\ -3, & 8, & -6, & -2 \end{vmatrix} ,$$

aus dieser wieder durch Subtraktion der dritten Kolonne von allen übrigen, dann der ersten Zeile von allen übrigen, darauf wieder der ersten Zeile von der dritten und vierten die folgenden Determinanten:

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 5 \\ 1, & 4, & 1, & -5 \\ 2, & 3, & -1, & 3 \\ 3, & 14, & -6, & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 5 \\ 0, & 3, & 0, & -10 \\ 1, & 2, & -2, & -2 \\ 2, & 13, & -7, & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 5 \\ 0, & 3, & 0, & -10 \\ 0, & 1, & -3, & -7 \\ 1, & 12, & -8, & -6 \end{vmatrix}$$

ableiten u. s. w. Bequemer wäre in der letzten dieser Umformungen, die erste Zeile vor der Subtraktion von der vierten mit 2 zu multiplizieren, wodurch man die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 5 \\ 0, & 3, & 0, & -10 \\ 0, & 1, & -3, & -7 \\ 0, & 11, & -9, & -11 \end{vmatrix}$$

erhielte, die sich auf das Produkt ihres Anfangsglieds 1 mit der Unterdeterminante

$$\begin{vmatrix} 3, & 0, & -10 \\ 1, & -3, & -7 \\ 11, & -9, & -11 \end{vmatrix}$$

reduziert.

Dies läßt sich von vornherein erreichen, denn man kann, um z. B. für a_i^k Null zu erhalten, von den Elementen der Reihe $a_1^k, a_2^k, \ldots a_i^k, \ldots a_n^k$ die Produkte der Elemente von $a_1^\lambda, a_2^\lambda, \ldots a_i^\lambda, \ldots a_n^\lambda$ mit $\frac{a_i^k}{a_i^\lambda}$ subtrahieren, wodurch man statt a_i^k das neue Element $a_i^k - a_i^\lambda \cdot \frac{a_i^k}{a_i^\lambda} = a_i^k - a_i^k = 0$ erhält. Um z. B. die vorstehende Determinante dritten Grades in dieser Weise zu behandeln, kann man, da schon ein Element der ersten Zeile gleich Null ist, die Elemente der ersten Kolonne mit $\frac{1}{3}0$ multiplizieren und dann die Produkte zu denen der dritten Kolonne addieren. Man erhält so

$$\begin{vmatrix} 3, & 0, & 0 \\ 1, & -3, & -1\frac{1}{3} \\ 11, & -9, & +7\frac{7}{3} \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -3, & -1\frac{1}{3} \\ -9, & +7\frac{7}{3} \end{vmatrix} = 3 \cdot \{-3 \cdot 7\frac{7}{3} - (-1\frac{1}{3}) \cdot (-9)\}$$

$$= 3 \cdot (-77 - 33) = -3 \cdot 110 = -330 \quad .$$

Um ferner beispielsweise die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1, & 5, & 9, & 2 \\ 2, & 4, & 10, & 1 \\ 3, & 3, & 11, & 6 \\ 4, & 8, & 7, & 3 \end{vmatrix}$$

zu berechnen, kann man die erste Kolonne der Reihe nach mit 5, 9 und 2 multiplizieren und dann entsprechend von der zweiten, dritten und vierten Kolonne subtrahieren. Man erhält so

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 2, & -6, & -8, & -3 \\ 3, & -12, & -16, & 0 \\ 4, & -12, & -29, & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -6, & -8, & -3 \\ -12, & -16, & 0 \\ -12, & -29, & -5 \end{vmatrix} .$$

Multipliziert man jetzt die erste Zeile der neuen Determinante mit 2 und subtrahiert von der zweiten und von der dritten, so erhält man

$$\begin{vmatrix} -6, & -8, & -3 \\ 0, & 0, & +6 \\ 0, & -13, & +1 \end{vmatrix}$$

und hat nun die Wahl zwischen zwei Reihen, in denen alle Glieder außer einem gleich Null sind. Man erhält

$$-6 \begin{vmatrix} 0, & +6 \\ -13, & +1 \end{vmatrix} = -6 \cdot 6 \cdot 13 = -468$$

$$\text{oder} \quad -6 \begin{vmatrix} -6, & -8 \\ 0, & -13 \end{vmatrix} = -6 \cdot 6 \cdot 13 = -468 \quad .$$

Man kann nach diesen Beispielen das eingeschlagene Verfahren dahin aussprechen, daß man, um $n-1$ Elemente einer Zeile gleich Null zu machen, die $n-1$ Kolonnen, die diese Elemente enthalten, durch das obige Verfahren zu verändern hat, indem man von jeder die Produkte der gleichstelligen Elemente einer parallelen Kolonne mit einem geeigneten Faktor subtrahiert. Sollen dagegen $n-1$ Elemente einer Kolonne zu Null werden, so hat man entsprechend mit den Zeilen zu verfahren.

5. Die Anordnung einer Determinante nach den Elementen einer Reihe und deren Unterdeterminanten führt ferner zu dem Satze:

Multipliziert man alle Elemente einer Reihe mit demselben Faktor, so wird dadurch die Determinante selbst mit diesem Faktor multipliziert.

Der Beweis wird erbracht, wenn man die neue Determinante nach den Elementen der multiplizierten Reihe ordnet.

Dieser Satz findet wieder Anwendung zur Vereinfachung der Berechnung von Determinanten. Selbstverständlich wird auch durch Division aller Elemente einer Reihe durch dieselbe Zahl die Determinante dividiert, da die Division durch ϱ identisch ist mit der Multiplikation mit $1:\varrho$. Man kann daher jeden gemeinschaftlichen Faktor der Elemente einer Reihe absondern und als Faktor vor die Determinante setzen. So hätte man z. B. in der vorher berechneten Determinante

$$\begin{vmatrix} -6, & -8, & -3 \\ -12, & -16, & 0 \\ -12, & -29, & -5 \end{vmatrix}$$

zunächst den Faktor -6 der ersten Kolonne absondern, und also

$$-6 \cdot \begin{vmatrix} 1, & -8, & -3 \\ 2, & -16, & 0 \\ 2, & -29, & -5 \end{vmatrix}$$

schreiben können. Man kann ferner auch aus der zweiten Kolonne den Faktor -1 absondern, wodurch sämtliche Vorzeichen dieser Kolonne und gleichzeitig das Vorzeichen der Determinante die entgegengesetzten werden. Allgemein ergibt sich der Satz:

Ändert man die Vorzeichen sämtlicher Elemente irgend einer Reihe, so behält die Determinante denselben absoluten Wert und ändert ihr Vorzeichen.

Nimmt man in dem vorstehenden Beispiel diese Änderung sowohl an der zweiten, als an der dritten Kolonne vor, so bleibt das Vorzeichen der Determinante unverändert, und man erhält

$$-6 \cdot \begin{vmatrix} 1, & 8, & 3 \\ 2, & 16, & 0 \\ 2, & 29, & 5 \end{vmatrix} \quad .$$

Man kann ferner, wenn einzelne oder sämtliche Elemente einer Reihe Brüche sind, diese in ganze Zahlen verwandeln, indem man die Elemente dieser Reihe mit dem Generalnenner multipliziert. Auf diesem Wege lassen sich, wenn in mehr als einer Reihe Brüche vorkommen, sämtliche Brüche des Systems nach und nach in ganze Zahlen verwandeln. So erhält man beispielsweise:

$$\begin{vmatrix} 7, & 4\frac{1}{2}, & 2\frac{1}{3} \\ 4\frac{1}{4}, & 5, & 5\frac{1}{6} \\ 7\frac{1}{2}, & -2, & -1\frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{12} \begin{vmatrix} 7, & 4\frac{1}{2}, & 28 \\ 4\frac{1}{4}, & 5, & 62 \\ 7\frac{1}{2}, & -2, & -15 \end{vmatrix} = \frac{1}{12 \cdot 4} \begin{vmatrix} 28, & 4\frac{1}{2}, & 28 \\ 17, & 5, & 62 \\ 30, & -2, & -15 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{12 \cdot 4 \cdot 2} \begin{vmatrix} 28, & 9, & 28 \\ 17, & 10, & 62 \\ 30, & -4, & -15 \end{vmatrix} .$$

Um nun zwei Elemente der ersten Zeile gleich Null zu machen, kann man die erste Kolonne von der dritten subtrahieren, dann aber, um nicht wieder Brüche zu erhalten, die Elemente der zweiten Kolonne mit 28 multiplizieren, selbstverständlich die Determinante entsprechend durch 28 dividieren und dann von der jetzigen zweiten Kolonne die Produkte der Elemente der ersten mit 9 subtrahieren. So ergibt sich

$$\frac{1}{96 \cdot 28} \begin{vmatrix} 28, & 0, & 0 \\ 17, & 127, & 45 \\ 30, & -382, & -45 \end{vmatrix} = \frac{28}{96 \cdot 28} \begin{vmatrix} 127, & 45 \\ -382, & -45 \end{vmatrix} = -\frac{45}{96} \begin{vmatrix} 127, & 1 \\ 382, & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{45}{96} \cdot (127 - 382) = \frac{45}{96} \cdot 255 = \frac{3825}{32} .$$

§ 40. Auflösung linearer Systeme.

1. Nachdem die wichtigsten Hilfsmittel für die Berechnung der Determinanten erörtert sind, soll zu der Anwendung auf die Auflösung von Gleichungen ersten Grades übergegangen werden. Es sei ein System von n voneinander unabhängigen Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten gegeben, und in der Form

$$1) \quad \begin{cases} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + a_1^3 x_3 + \ldots + a_1^k x_k + \ldots + a_1^n x_n = c_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + a_2^3 x_3 + \ldots + a_2^k x_k + \ldots + a_2^n x_n = c_2 \\ a_3^1 x_1 + a_3^2 x_2 + a_3^3 x_3 + \ldots + a_3^k x_k + \ldots + a_3^n x_n = c_3 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_i^1 x_1 + a_i^2 x_2 + a_i^3 x_3 + \ldots + a_i^k x_k + \ldots + a_i^n x_n = c_i \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + a_n^3 x_3 + \ldots + a_n^k x_k + \ldots + a_n^n x_n = c_n \end{cases}$$

geschrieben. Um den Wert einer beliebigen der n Unbekannten, z. B. x_k, zu finden, denke man sich jede dieser Gleichungen mit einem vorläufig unbestimmt gelassenen Faktor p_1, $p_2 \ldots p_k \ldots p_n$ multipliziert und sodann sämtliche neuen Gleichungen durch Addition zu einer einzigen verbunden. Diese erhält die Form

$$2) \quad A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + \ldots + A_k x_k + \ldots + A_n x_n = C ,$$

worin

$$A_1 = a_1^1 p_1 + a_2^1 p_2 + a_3^1 p_3 + \ldots + a_k^1 p_k + \ldots + a_n^1 p_n$$

$$A_2 = a_1^2 p_1 + a_2^2 p_2 + a_3^2 p_3 + \ldots + a_k^2 p_k + \ldots + a_n^2 p_n$$

u. s. w.

Um nun den Wert einer Unbekannten x_k zu finden, kann man nachträglich die Werte der Faktoren p so bestimmen, daß alle Koeffizienten A mit Ausnahme desjenigen der gesuchten Unbekannten gleich Null werden. Setzen wir vorerst voraus, daß dies immer ausführbar sei, so erhält dadurch die Gleichung 2) die Form:

$$A_k x_k = C \quad ,$$

und man hat

$$3) \qquad x_k = \frac{C}{A_k} \quad .$$

Die Lösung der gestellten Aufgabe, aus n Gleichungen mit n Unbekannten den Wert einer beliebigen Unbekannten zu finden, ist also jetzt zurückgeführt auf die, die Werte von n unbestimmten Faktoren $p_1, p_2 \ldots p_n$ so zu bestimmen, daß $n - 1$ Gleichungen von der Form

$$4) \qquad \begin{cases} a_1^1 p_1 + a_2^1 p_2 + a_3^1 p_3 + \ldots + a_n^1 p_n = 0 \\ a_1^2 p_1 + a_2^2 p_2 + a_3^2 p_3 + \ldots + a_n^2 p_n = 0 \\ \vdots \\ a_1^{k-1} p_1 + a_2^{k-1} p_2 + a_3^{k-1} p_3 + \ldots + a_n^{k-1} p_n = 0 \\ a_1^{k+1} p_1 + a_2^{k+1} p_2 + a_3^{k+1} p_3 + \ldots + a_n^{k+1} p_n = 0 \\ \vdots \\ a^n p_1 + a_2^n p_2 + a_3^n p_3 + \ldots + a_n^n p_n = 0 \end{cases}$$

erfüllt werden. Betrachten wir also $p_1, p_2 \ldots p_n$ als n Unbekannte, zu deren Bestimmung die vorstehenden Gleichungen gegeben sind, so sieht man, da ihre Anzahl nur $n - 1$ beträgt, daß man irgend eine der n Größen p beliebig annehmen könnte und daß dann die Aufgabe auf die einfachere zurückgeführt erschiene, $n - 1$ Gleichungen mit $n - 1$ Unbekannten aufzulösen. Da aber diese Gleichungen für jede andre der Unbekannten x selbst andre werden, so würde das eingeschlagene Verfahren als ein überaus weitläufiges erscheinen.

Wir haben aber im vorhergehenden gesehen, daß die Determinante des Systems der n^2 Koeffizienten des Systems 1)

$$5) \qquad R = \begin{vmatrix} a_1^1 a_1^2 \ldots a_1^n \\ a_2^1 a_2^2 \ldots a_2^n \\ \vdots \\ a_n^1 a_n^2 \ldots a_n^n \end{vmatrix}$$

nach den Elementen und den Unterdeterminanten der Reihe $a_1^k, a_2^k \ldots a_n^k$ geordnet, in der Form

$$6) \qquad R = a_1^k A_1^k + a_2^k A_2^k + \ldots + a_n^k A_n^k$$

geschrieben werden kann, und daß dann

$$\begin{aligned} a_1^1 A_1^k + a_2^1 A_2^k + \ldots + a_n^1 A_n^k = 0 \quad , \\ a_1^2 A_1^k + a_2^2 A_2^k + \ldots + a_n^2 A_n^k = 0 \quad , \\ \vdots \\ a_1^n A_1^k + a_2^n A_2^k + \ldots + a_n^n A_n^k = 0 \quad , \end{aligned}$$

ist, mit Ausnahme des Falles, in dem die obern Indices der Elemente a in der Gleichung gleich k sind, also die Gleichung 6) gilt. Hieraus folgt unmittelbar, daß sämtliche Gleichungen 4) erfüllt werden, wenn man

$$p_1 = A_1^k \, , \quad p_2 = A_2^k, \ldots p_n = A_n^k$$

setzt, und daß dann A_k gleich der Determinante R ist. Die Größe

$$C = c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3 + \ldots + c_n p_n$$
$$= c_1 A_1^k + c_2 A_2^k + c_3 A_3^k + \ldots + c_n A_n^k$$

entsteht aus dieser Determinante, da die Unterdeterminanten A_1^k, A_2^k u. s. w. die Elemente der Reihe a_1^k, $a_2^k \ldots a_n^k$ nicht enthalten, wenn man in ihr an Stelle dieser Elemente die entsprechenden der Reihe c_1, $c_2 \ldots c_k$ setzt. Die Gleichung 3) kann also

$$x_k = \frac{\Sigma \pm a_1^1 a_2^2 \ldots a_{k-1}^{k-1} c_k a_{k+1}^{k+1} \ldots a_n^n}{\Sigma \pm a_1^1 a_2^2 \ldots a_{k-1}^{k-1} a_k^k a_{k+1}^{k+1} \ldots a_n^n}$$

geschrieben werden. Sie besagt, daß die Werte sämtlicher Unbekannten des Systems 1) durch Brüche dargestellt werden können, die zum Nenner die Determinante 5) des Systems der n^2 Koeffizienten der Unbekannten haben, während der Zähler jedesmal die Determinante ist, die man erhält, wenn man statt der Koeffizienten der gesuchten Unbekannten die entsprechenden Absolutglieder c_1, $c_2, \ldots$ setzt.

Um z. B. das System

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z - 4u &= -10 \\ -5x + 6y - 7z + 8u &= 18 \\ 9x - 10y - 11z + 12u &= 4 \\ -13x + 14y + 15z - 16u &= -4 \end{aligned}$$

auf diese Weise aufzulösen, kann man zur Bestimmung des gemeinschaftlichen Nenners der vier Unbekannten

$$\begin{vmatrix} +1, & -2, & +3, & -4 \\ -5, & +6, & -7, & +8 \\ +9, & -10, & -11, & +12 \\ -13, & +14, & +15, & -16 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \begin{vmatrix} +1, & -1, & +3, & -1 \\ -5, & +3, & -7, & +2 \\ +9, & -5, & -11, & +3 \\ -13, & +7, & +15, & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \begin{vmatrix} +1, & 0, & 0, & 0 \\ -5, & -2, & +8, & -3 \\ +9, & +4, & -38, & +12 \\ -13, & -6, & +54, & -17 \end{vmatrix} = 8 \cdot 1 \begin{vmatrix} -2, & +8, & -3 \\ +4, & -38, & +12 \\ -6, & +54, & -17 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \cdot 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} -1, & +4, & -3 \\ +2, & -19, & +12 \\ -3, & +27, & -17 \end{vmatrix} = 32 \begin{vmatrix} -1, & +4, & -3 \\ 0, & -11, & +6 \\ 0, & +15, & -8 \end{vmatrix} = -32 \begin{vmatrix} -11, & +6 \\ +15, & -8 \end{vmatrix}$$

$$= -32 \cdot 2 \begin{vmatrix} -11, & +3 \\ +15, & -4 \end{vmatrix} = -64\,(44 - 45) = +64$$

setzen. Für den Zähler von x hat man entsprechend

$$\begin{vmatrix} -10, & -2, & +3, & -4 \\ +18, & +6, & -7, & +8 \\ +4, & -10, & -11, & +12 \\ -4, & +14, & +15, & -16 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 4 \begin{vmatrix} -5, & -1, & +3, & -1 \\ +9, & +3, & -7, & +2 \\ +2, & -5, & -11, & +3 \\ -2, & +7, & +15, & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 16 \begin{vmatrix} 0, & 0, & 0, & -1 \\ -1, & +1, & -1, & +2 \\ -13, & -8, & -2, & +3 \\ +18, & +11, & +3, & -4 \end{vmatrix} = -16 \cdot (-1) \begin{vmatrix} -1, & +1, & -1 \\ -13, & -8, & -2 \\ +18, & +11, & +3 \end{vmatrix}$$

$$= 16 \begin{vmatrix} -1, & 0, & 0 \\ -13, & -21, & -10 \\ +18, & +29, & +14 \end{vmatrix} = -16 \begin{vmatrix} -21, & -10 \\ +29, & +14 \end{vmatrix} = 16 \begin{vmatrix} 21, & 10 \\ 29, & 14 \end{vmatrix}$$

$$= 16 \cdot 2 \begin{vmatrix} 21, & 5 \\ 29, & 7 \end{vmatrix} = 32 \cdot (147 - 145) = 64 \quad ,$$

also ist

$$x = \frac{64}{64} = 1 \quad .$$

Ebenso erhält man für den Zähler von y

$$\begin{vmatrix} +1, & -10, & +3, & -4 \\ -5, & +18, & -7, & +8 \\ +9, & +14, & -11, & +12 \\ -13, & -4, & +15, & -16 \end{vmatrix} = 128 \quad ,$$

also

$$y = \frac{128}{64} = 2 \quad ,$$

und entsprechend für z und u

$$\begin{vmatrix} +1, & -2, & -10, & -4 \\ -5, & +6, & +18, & +8 \\ +9, & -10, & +4, & +12 \\ -13, & +14, & -4, & -16 \end{vmatrix} = 192 \; ; \quad \begin{vmatrix} +1, & -2, & +3, & -10 \\ -5, & +6, & -7, & +18 \\ +9, & -10, & -11, & +4 \\ -13, & +14, & +15, & -4 \end{vmatrix} = 256 \quad ;$$

demnach

$$z = 3 \, , \quad u = 4 \quad .$$

Die Werte der Unbekannten werden durch dieses Verfahren in Form von Quotienten zweier Aggregate erhalten, deren Glieder Produkte von n Faktoren sind. Wendet man dagegen das gewöhnliche Eliminationsverfahren an, indem man beispielsweise zunächst den aus einer der gegebenen Gleichungen ermittelten Ausdruck für eine Unbekannte in jede der $n - 1$ übrigen Gleichungen einsetzt, so erhält man, wie die Ausführung an irgend einem allgemeinen Beispiel leicht zeigt, $n - 1$ Eliminationsgleichungen mit $n - 1$ Unbekannten, deren Koeffizienten Produkte von zwei Faktoren sind. Leitet man dann aus diesen entsprechend $n - 2$ Gleichungen mit $n - 2$ Unbekannten ab, so werden die Koeffizienten von der $2 \cdot 2 = 4$ ten Dimension, und fährt man so fort, so wird in der endlichen Schlußgleichung mit nur einer Unbekannten ein Koeffizient mit 2^{n-1} Faktoren enthalten sein. Es liefert also dieses Eliminationsverfahren den Wert der Unbekannten in Form eines Quotienten von Aggregaten, deren Glieder 2^{n-1} Faktoren, also $2^{n-1} - n$ Faktoren mehr als bei dem vorstehenden enthalten. Diese überflüssigen Faktoren, deren Anzahl für $n = 3, 4, 5, 6$ u. s. w. die rasch steigende Reihe 1, 4, 11, 26 u. s. w. bilden, und die sich in dem Resultat wieder aufheben müssen, werden durch die Anwendung der Determinanten erspart. Außerdem empfiehlt sich diese dadurch, daß sie die unwissenschaftliche Willkür in der Auswahl und Reihenfolge der jedesmal zu eliminierenden Unbekannten beseitigt.

2. Schon im vorigen sind homogene Gleichungen ersten Grades vorgekommen, in denen die Absolutglieder gleich Null sind.

Sind n solche Gleichungen mit n Unbekannten

$$\begin{array}{l} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + a_1^3 x_3 + \ldots + a_1^n x_n = 0 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + a_2^3 x_3 + \ldots + a_2^n x_n = 0 \\ a_3^1 x_1 + a_3^2 x_2 + a_3^3 x_3 + \ldots + a_3^n x_n = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + a_n^3 x_3 + \ldots + a_n^n x_n = 0 \end{array}$$

gegeben, so führt ihre Auflösung mittels Determinanten auf

$$x_k = \frac{0}{\Sigma \pm a_1^1 \ldots a_n^n} .$$

In der Tat überzeugt man sich auch unmittelbar, daß die n Gleichungen sämtlich erfüllt sind, wenn jeder Unbekannten der Wert Null beigelegt wird. Es ist jedoch zu beachten, daß in einem besondern Falle dieser Wert nicht aus der vorstehenden Gleichung für x_k gefolgert werden darf, nämlich dann, wenn gleichzeitig der Nenner, also die Determinante des Systems der n^2 Koeffizienten a_1^1, a_1^2 u. s. w. gleich Null ist. Es erscheinen in diesem Falle vielmehr die Werte sämtlicher Unbekannten unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, und hieraus geht hervor, daß dann die n Unbekannten nicht durch die gegebenen Gleichungen ermittelt werden können.

Man erhält dasselbe Resultat auf folgende Weise: Man kann jede der n homogenen Gleichungen durch dieselbe beliebig ausgewählte der n Unbekannten z. B. x_k dividieren und erhält dann n Gleichungen mit den $n - 1$ Verhältnissen $\frac{x_1}{x_k}, \frac{x_2}{x_k}, \ldots \frac{x_n}{x_k}$ als Unbekannten. Hieraus geht einerseits hervor, daß durch die n Gleichungen in der Tat die n Unbekannten nicht bestimmt sind, sondern nur ihre Verhältnisse, sofern die Werte der Unbekannten nicht sämtlich gleich Null sein sollen und also diese Verhältnisse gebildet werden dürfen. Andrerseits zeigt es sich, daß für die Verhältnisse als neue Unbekannten eine überzählige Gleichung gegeben ist, demnach die n Gleichungen für nicht verschwindende x nur dann nebeneinander bestehen können, wenn die aus beliebigen $n - 1$ dieser Gleichungen berechneten Werte der Verhältnisse der noch übrigen Gleichung genügen. Damit dies der Fall sei, müssen die Koeffizienten a_1^1, a_2^1 u. s. w. einer Bedingung genügen, die dadurch gefunden werden könnte, daß man das eben angegebene Verfahren der Auflösung von $n - 1$ Gleichungen und Substitution der Resultate in die noch übrige Gleichung ausführte. Kürzer ergibt die Vergleichung mit dem, was oben aus der für x_k gewonnenen Formel abgeleitet wurde, daß diese Bedingung

$$\Sigma \pm a_1^1 a_2^2 \ldots a_n^n = 0$$

ist. Sind also n homogene Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten gegeben, so ist die Bedingung, daß diese Gleichungen für nicht verschwindende Werte der Unbekannten zusammen bestehen, die, daß die Determinante der n^2 Koeffizienten gleich Null sei, und die Gleichungen bestimmen dann die Verhältnisse der Unbekannten. Dividiert man jede der Gleichungen etwa durch x_n und löst die $n - 1$ ersten der entstehenden Gleichungen auf die betreffenden Verhältnisse nach Nr. 1 auf, so ergibt sich, daß die Werte der Unbekannten sich der Reihe nach zueinander verhalten wie die Unterdeterminanten, die aus den $n\,(n - 1)$ Koeffizienten jener Gleichungen der Reihe nach zu den Elementen der fehlenden n-ten Zeile gebildet werden können.

3. Ist umgekehrt ein lineares System von nicht homogenen Gleichungen mit n Unbekannten gegeben, so läßt sich aus ihm ein System von ebensovielen homogenen Gleichungen ableiten, indem man an Stelle der n Unbekannten ihre Verhältnisse zu einer $n+1$-ten Unbekannten, die später gleich 1 zu setzen ist, wenn man zu den ursprünglichen Gleichungen zurückkehren will, also $\frac{x_1}{x_{n+1}}$, $\frac{x_2}{x_{n+1}}$ u. s. w. setzt und dann alle Glieder mit x_{n+1} multipliziert. Waren nun für die n Unbekannten $n+1$ Gleichungen

$$a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^n x_n + a_1^{n+1} = 0 \quad ,$$

u. s. w. gegeben, so ist

$$\Sigma \pm a_1^1 a_2^2 \ldots a_n^n a_{n+1}^{n+1} = 0$$

die Bedingung, daß die zugehörigen homogenen Gleichungen gleichzeitig für nicht verschwindende Werte der x bestehen. Da ferner durch diese homogenen Gleichungen nur die Verhältnisse der Unbekannten bestimmt sind, eine also beliebig angenommen werden kann, so gilt diese Bedingung auch, wenn man für x_{n+1} den Wert 1 gesetzt denkt. Es gilt also auch der Satz:

Sind für n Unbekannte $n+1$ Gleichungen ersten Grades gegeben, die auf Null reduziert sind, so ist die Bedingung, daß diese Gleichungen sämtlich durch dieselben Werte der Unbekannten erfüllt werden, die, daß die Determinante des Systems der $(n+1)^2$ Koeffizienten gleich Null sei.

§ 41. Addition und Multiplikation von Determinanten.

1. Jede Determinante läßt sich als eine solche von einem beliebigen höheren Grade darstellen, denn man kann sie als Unterdeterminante eines Systems von Elementen betrachten, das in einer Zeile oder Kolonne ein Element 1 und alle übrigen Elemente gleich Null hat. Um also eine Determinante n-ten Grades als eine solche $n+1$-ten Grades darzustellen, kann man dem System der Elemente eine Zeile und Kolonne hinzufügen, so daß irgend ein Element den Wert 1 oder -1, je nach der Stellung dieses Elements hat, die übrigen Stellen einer der beiden hinzugefügten Reihen durch Nullen und die der andern durch beliebige Zahlen ausfüllen. Die so erhaltene Determinante $n+1$-ten Grades kann dann in gleicher Weise in eine solche $n+2$-ten Grades verwandelt werden u. s. w.

So ist z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & a_1 & b_1 & c_1 \\ \beta & a_2 & b_2 & c_2 \\ \gamma & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & \beta & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & \gamma & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad ,$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ a & p & b \\ c & q & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & m & n & t \\ 0 & a & p & b \\ 0 & c & q & d \end{vmatrix} \quad .$$

2. Sind alle Elemente einer Reihe Aggregate von gleicher Gliederzahl, so läßt sich die Determinante in das entsprechende Aggregat ebensovieler einzelner Determinanten zerlegen, die dadurch ent-

stehen, daß man an Stelle jener Reihe nacheinander die einzelnen Glieder der betreffenden Aggregate setzt. So ist z. B.

$$\begin{vmatrix} a+a_1, & a_2, & a_3 \\ b+b_1, & b_2, & b_3 \\ c+c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & a_2, & a_3 \\ b, & b_2, & b_3 \\ c, & c_2, & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix} .$$

Allgemein, wenn

$$a_1^\lambda = p_1 + q_1 + r_1 + \cdots ,$$
$$a_2^\lambda = p_2 + q_2 + r_2 + \cdots ,$$
$$\cdots$$

ist, und man die gegebene Determinante in der Form

$$R = a_1^\lambda A_1^\lambda + a_2^\lambda A_2^\lambda + \cdots + a_n^\lambda A_n^\lambda$$

schreibt, so erhält man durch Substitution der Werte für a_1^λ, a_2^λ, ... und Ausführung der Multiplikationen

$$\begin{aligned} R = {} & p_1 A_1^\lambda + p_2 A_2^\lambda + \cdots + p_n A_n^\lambda \\ & + q_1 A_1^\lambda + q_2 A_2^\lambda + \cdots + q_n A_n^\lambda \\ & + r_1 A_1^\lambda + r_2 A_2^\lambda + \cdots + r_n A_n^\lambda \\ & + \quad \cdots \quad , \end{aligned}$$

womit der vorstehende Satz bewiesen ist.

Sind ferner die Elemente irgend einer Reihe Aggregate von je m Gliedern und außerdem die Elemente einer ihr parallelen Reihe Aggregate von je n Gliedern, so kann man durch zweimalige Anwendung des vorstehenden Verfahrens die Determinante in ein Aggregat von $m \cdot n$ einfacheren Determinanten zerlegen.

Sind überhaupt die Elemente beliebig vieler oder aller parallelen Reihen Aggregate von m, n, p, q, ... Gliedern, so läßt sich die Determinante entsprechend als ein Aggregat von $m \cdot n \cdot p \cdot q \ldots$ einzelnen Determinanten darstellen.

Da diese Sätze auch dann richtig bleiben müssen, wenn ein oder mehrere Glieder eines der Reihenaggregate gleich Null sind, so lassen sie sich auch auf die Fälle ausdehnen, in denen nicht alle Elemente einer Reihe aus einer gleichen Anzahl von Gliedern bestehen, da man in diesem Falle die fehlenden Glieder durch Nullen ergänzen kann. So ist z. B.

$$\begin{vmatrix} a+a_1 & a_2+a_3+a_4 & a_5 \\ b & b_2+b_3 & b_5-b_6 \\ c+c_1 & c_2 & c_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a_2 & a_5 \\ b & b_2 & b_5 \\ c & c_2 & c_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & a_2 & 0 \\ b & b_2 & b_6 \\ c & c_2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a_3 & a_5 \\ b & b_3 & b_5 \\ c & 0 & c_5 \end{vmatrix}$$
$$- \begin{vmatrix} a & a_3 & 0 \\ b & b_3 & b_6 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a_4 & a_5 \\ b & 0 & b_5 \\ c & 0 & c_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & a_4 & 0 \\ b & 0 & b_6 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_5 \\ 0 & b_2 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & b_2 & b_6 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & b_3 & b_5 \\ c_1 & 0 & c_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a \\ 0 & b_3 & b_6 \\ c_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & b_5 \\ c_1 & 0 & c_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & b_6 \\ c_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} .$$

Stimmen umgekehrt zwei oder mehrere Determinanten desselben Grades in allen korrespondierenden Elementen mit Ausnahme derjenigen einer an gleicher Stelle stehenden Reihe überein, so kann man jedes Aggregat dieser Determinanten in eine Determinante verwandeln, indem man in einer von ihnen an Stelle der nicht übereinstimmenden Reihe die in entsprechender Weise aus den Aggregaten der betreffenden ungleichen Elemente gebildete Reihe setzt. So ist also z. B.

$$\begin{vmatrix} 3, 1, 8, 3 \\ 4, 4, 7, 2 \\ 5, 6, 1, 4 \\ 2, 9, 0, 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1, 1, 8, 3 \\ 5, 4, 7, 2 \\ 2, 6, 1, 4 \\ 0, 9, 0, 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-1, 1, 8, 3 \\ 4-5, 4, 7, 2 \\ 5-2, 6, 1, 4 \\ 2-0, 9, 0, 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2, 1, 8, 3 \\ -1, 4, 7, 2 \\ 3, 6, 1, 4 \\ 2, 9, 0, 6 \end{vmatrix} .$$

3. Das Produkt zweier Determinanten desselben Grades kann ebenfalls als eine einzige Determinante vom gleichen Grade dargestellt werden. Man erhält die Elemente dieser Determinante, wenn man die Elemente je einer Reihe der einen gegebenen mit den entsprechenden Elementen je einer Reihe der andern gegebenen Determinante multipliziert und die Produkte addiert. Ist also

$$A = \Sigma \pm a_1^1 a_2^2 \dots a_n^n, \quad B = \Sigma \pm b_1^1 b_2^2 \dots b_n^n ,$$

so ist

$$A \cdot B = C = \Sigma \pm c_1^1 c_2^2 \dots c_n^n$$

für

$$c_i^k = a_1^i b_1^k + a_2^i b_2^k + \dots + a_n^i b_n^k .$$

Ist beispielsweise

$$A = \begin{vmatrix} a_1^1 a_1^2 a_1^3 \\ a_2^1 a_2^2 a_2^3 \\ a_3^1 a_3^2 a_3^3 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_1^1 b_1^2 b_1^3 \\ b_2^1 b_2^2 b_2^3 \\ b_3^1 b_3^2 b_3^3 \end{vmatrix} ,$$

so ist

$$C = \begin{vmatrix} a_1^1 b_1^1 + a_2^1 b_2^1 + a_3^1 b_3^1, & a_1^1 b_1^2 + a_2^1 b_2^2 + a_3^1 b_3^2, & a_1^1 b_1^3 + a_2^1 b_2^3 + a_3^1 b_3^3 \\ a_1^2 b_1^1 + a_2^2 b_2^1 + a_3^2 b_3^1, & a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2, & a_1^2 b_1^3 + a_2^2 b_2^3 + a_3^2 b_3^3 \\ a_1^3 b_1^1 + a_2^3 b_2^1 + a_3^3 b_3^1, & a_1^3 b_1^2 + a_2^3 b_2^2 + a_3^3 b_3^2, & a_1^3 b_1^3 + a_2^3 b_2^3 + a_3^3 b_3^3 \end{vmatrix} .$$

Wir können den Beweis der Richtigkeit dieses Satzes an dem vorstehenden besondern Beispiel zweier Determinanten dritten Grades führen, da er sich in gleicher Weise für Determinanten jedes beliebigen Grades führen läßt und nur die Darstellung bei allgemeiner Behandlung umständlicher und weniger übersichtlich wird.

Die oben angegebene Determinante C läßt sich, da jede ihrer Reihen ein Aggregat von drei Gliedern ist, in eine Summe von $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ einzelnen Determinanten zerlegen. Die erste ist

$$\begin{vmatrix} a_1^1 b_1^1, & a_1^1 b_1^2, & a_1^1 b_1^3 \\ a_1^2 b_1^1, & a_1^2 b_1^2, & a_1^2 b_1^3 \\ a_1^3 b_1^1, & a_1^3 b_1^2, & a_1^3 b_1^3 \end{vmatrix}$$

und verwandelt sich durch Absonderung der gemeinschaftlichen Faktoren b_1^1, b_1^2, b_1^3 der drei Kolonnen in

$$b_1^1 b_1^2 b_1^3 \begin{vmatrix} a_1^1 a_1^1 a_1^1 \\ a_1^2 a_1^2 a_1^2 \\ a_1^3 a_1^3 a_1^3 \end{vmatrix} ,$$

welcher Ausdruck, da die Kolonnen übereinstimmen, gleich Null ist. Dasselbe muß der Fall sein bei jeder andern Kombination aus C, die wenigstens zwei gleichstellige Kolonnen enthält. Scheidet man aus der Entwicklung von C in einzelne Determinanten alle diese gleich Null werdenden aus, so bleiben von jenen 27 nur noch sechs übrig. Wählen wir als Repräsentanten dieser sechs eine aus, z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1^1 b_1^1, & a_2^1 b_2^2, & a_3^1 b_3^3 \\ a_1^2 b_1^1, & a_2^2 b_2^2, & a_3^2 b_3^3 \\ a_1^3 b_1^1, & a_2^3 b_2^2, & a_3^3 b_3^3 \end{vmatrix} = b_1^1 b_3^2 b_3^3 \begin{vmatrix} a_1^1, & a_2^1, & a_3^1 \\ a_1^2, & a_2^2, & a_3^2 \\ a_1^3, & a_2^3, & a_3^3 \end{vmatrix} = b_1^1 b_2^2 b_3^3 \cdot A ,$$

so sieht man, daß sie gleich dem Produkt der einen von den oben zu multiplizierenden Determinanten mit einem Gliede der Entwicklung der andern ist. Dieses Glied muß für jede andre der sechs Determinanten ein andres sein, und somit ist ihr Aggregat gleich dem Produkt der Determinante A mit der Determinante B, was zu beweisen war.

Man beachte noch, daß das Produkt zweier Determinanten nach dem vorstehenden Satze auf vier verschiedene Arten gebildet werden kann, da nicht bloß, wie in dem Beispiel geschehen, je eine Kolonne von A mit einer Kolonne von B, sondern auch je eine Zeile von A mit einer Zeile von B, ferner je eine Zeile von A mit einer Kolonne von B und endlich je eine Kolonne von A mit einer Zeile von B verbunden werden kann.

Sollen in entsprechender Weise drei oder mehr Determinanten multipliziert werden, so kann man das Verfahren wiederholt anwenden, also zuerst das Produkt zweier gegebenen Determinanten A, B als eine einzige Determinante C darstellen, dann etwa das Produkt von C mit einer dritten gegebenen D wieder in eine einzige Determinante verwandeln und so bis zum Ende fortfahren.

Da endlich jede Determinante niedern Grades sich als eine solche von beliebig höherem Grade darstellen läßt, so kann auch die Beschränkung, nach der die zu multiplizierenden Determinanten von demselben Grade sein sollten, aufgehoben werden, d. h. man kann jedes Produkt von beliebig vielen Determinanten beliebiger Grade in eine einzige Determinante verwandeln, deren Grad gleich dem höchsten bei jenen einzelnen vorkommenden ist, und deren Elemente Aggregate aus Elementen der einzelnen sind.

4. Man kann noch auf eine andre Weise das Produkt $A \cdot B$ zweier Determinanten als eine einzige Determinante darstellen. Es sei A eine Determinante p-ten, B eine solche q-ten Grades, so bilde man eine neue Determinante $p+q$-ten Grades, indem man für die p ersten Elemente der p ersten Zeilen und die der p ersten Kolonnen die entsprechenden Elemente von A, und für die q letzten Elemente der q noch folgenden Zeilen und der q noch folgenden Kolonnen die entsprechenden Elemente von B setzt, die noch übrigen Stellen aber mit Nullen ausfüllt, also in folgender Art verfährt:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ a_p^1 & a_p^2 & \dots & a_p^p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_1^1 & b_1^2 & \dots & b_1^q \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_2^1 & b_2^2 & \dots & b_2^q \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_q^1 & b_q^2 & \dots & b_q^q \end{vmatrix}$$

Man hat also hier ein Quadrat, das aus zwei kleinern, von der Diagonale durchschnittenen Quadraten und daneben aus zwei Rechtecken, deren Elemente sämtlich gleich Null sind, besteht.

Bildet man nun die Determinante des ganzen Systems und nimmt aus ihr alle die Glieder, die dieselbe Kombination der q letzten Indices enthalten, in denen also diese Indices nicht permutiert sind, so muß das Aggregat dieser Glieder das jener Kombination entsprechende Glied der Determinante B als gemeinsamen Faktor enthalten, und nach Absonderung dieses Faktors müssen die andern Faktoren das Aggregat aller Produkte sein, die aus Elementen der übrigen p Zeilen und Kolonnen nach dem Bildungsgesetz der Determinanten entstehen können. Dieses Aggregat ist die Determinante A. Läßt man nun die q letzten

Indices eine Permutation machen und vereinigt wieder alle Glieder der ganzen Determinante, die das so entstehende neue Glied von B als gemeinsamen Faktor haben, so muß wieder das Produkt dieses Gliedes von B mit der Determinante A entstehen. Vereinigt man in dieser Weise nacheinander alle die Glieder der ganzen Determinante, die irgend ein Glied von B als Faktor haben, so muß das Aggregat aller dieser Glieder gleich dem Produkt $A \cdot B$ sein. Die noch übrigen Glieder der ganzen Determinante, die somit aus mindestens einer der q letzten Zeilen oder Kolonnen ein Element enthalten, das nicht dem System von B angehört, müssen sämtlich gleich Null sein, und somit ist bewiesen, daß die ganze Determinante gleich dem Produkt der einzelnen Determinanten A, B ist.

Diese Verwandlung des Produkts $A \cdot B$ in eine einzige Determinante unterscheidet sich von der frühern dadurch, daß die letzte nicht den gleichen Grad mit den einzelnen oder der höchsten hat, sondern daß ihr Grad gleich der Summe $p + q$ der Grade der einzelnen ist.

Es ist nicht nötig, die Elemente von A in die p ersten, die von B in die q letzten Reihen zu stellen, man kann vielmehr diese Reihen auch beliebig wählen, falls sie nur einander ausschließen und dann das Vorzeichen der ganzen Determinante nach der Anzahl der Vertauschungen von Reihen bestimmt wird, die man vornehmen muß, um die im vorigen vorausgesetzte Stellung zu bewirken.

5. Werden die Elemente in den beiden Rechtecken nicht durch Nullen ausgefüllt, sondern sind sie irgend welche gegebenen Zahlen, so enthält die Determinante des ganzen Systems außer dem Produkt $A \cdot B$ noch weitere Glieder, deren Beschaffenheit noch untersucht werden soll. Zur Erleichterung der Darstellung führen wir vorher folgende Bezeichnungen ein:

Wählt man aus dem System der n^2 Elemente einer Determinante p beliebige Zeilen und p beliebige Kolonnen in unveränderter Reihenfolge aus, so heißt die Determinante des Systems der in diesen Zeilen und diesen Kolonnen zugleich stehenden p^2 Elemente eine Unterdeterminante im weitern Sinne. Wählt man ferner die noch übrigen $n - p = q$ Zeilen und die noch übrigen q Kolonnen aus, so erhält man ein zweites partiales System, das mit dem vorigen kein Element gemeinschaftlich hat, und dieses System von q^2 Elementen liefert ebenfalls eine Unterdeterminante. Je zwei in dieser Weise zusammengehörige Unterdeterminanten werden korrespondierende genannt.

Es seien die zur Bildung einer Unterdeterminante ausgewählten p Zeilen die a-te, b-te, c-te u. s. w., und die ausgewählten p Kolonnen die a'-te, b'-te, c'-te u. s. w., wobei $a < b < c \ldots$ und $a' < b' < c' \ldots$ angenommen werde, so läßt sich die a-te Zeile dadurch, daß man sie nacheinander mit der $a - 1$-ten, $a - 2$-ten u. s. w. vertauscht, also im ganzen durch $a - 1$ Vertauschungen zur ersten Zeile, darauf die b-te in gleicher Weise durch $b - 2$ Vertauschungen zur zweiten, die c-te durch $c - 3$ Vertauschungen zur dritten Zeile machen u. s. w. Ebenso werden die a'-te, b'-te, c'-te ... Kolonne durch $a' - 1$, $b' - 2$, $c' - 3, \ldots$ Vertauschungen in die p ersten Stellen gebracht. Man kann also durch im ganzen

$$a + b + c + \ldots + a' + b' + c' + \ldots - 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots)$$

Vertauschungen bewirken, daß die p Zeilen und die p Kolonnen der Unterdeterminante die ersten sind. Berechnet man den Wert dieser Unterdeterminante, so ist zur Bestimmung ihres Vorzeichens zu unterscheiden, ob die Anzahl der Vertauschungen oder, was auf dasselbe hinauskommt, ob die Summe

$$a + b + c + \ldots + a' + b' + c' + \ldots$$

gerade oder ungerade ist; beide Fälle lassen sich dahin zusammenfassen, daß jene Unterdeterminante der ersten Reihen mit $(-1)^{a+b+c+\ldots+a'+b'+c'+\ldots}$ zu multiplizieren ist.

Schreibt man aus einer Determinante R alle Glieder heraus, die irgend ein Glied einer Unterdeterminante A als Faktor haben, so können in diesen

Gliedern keine der Elemente vorkommen, die mit einem Elemente der Unterdeterminante in derselben Zeile oder Kolonne stehen, die Werte dieser Elemente sind daher auf das Aggregat der ausgewählten Glieder von R ohne Einfluß, oder dieses Aggregat muß identisch sein mit dem Werte, den R erhalten würde, wenn die genannten Elemente sämtlich gleich Null wären. Die vorhergehende Entwicklung läßt also erkennen, daß das genannte Aggregat gleich dem Produkt der Unterdeterminante A mit der korrespondierenden Unterdeterminante B ist, und zwar mit dem Vorzeichen + oder —, je nachdem die Summe der obern und untern Indices im Anfangsglied von A gerade oder ungerade ist.

Die Auswahl von p Zeilen und von p Kolonnen aus dem System der Elemente einer Determinante n-ten Grades behufs Bildung einer Unterdeterminante kann auf verschiedene Weisen geschehen, deren Anzahl durch die Anzahl der möglichen entsprechenden Kombinationen angegeben wird. In jedem dieser Fälle erhält man eine korrespondierende Unterdeterminante und somit auch ein Produkt $A \cdot B$ der gedachten Art. Will man aber eine Determinante R nach solchen Produkten ordnen, so ist Sorge zu tragen, daß kein Glied von R, das zur Bildung eines dieser Produkte verwendet wurde, bei einem zweiten ebenfalls benutzt werde. Denken wir uns zu diesem Zweck die Glieder von R durch Permutation der untern Indices aus dem Anfangsgliede

$$a_1^1 a_2^2 a_3^3 a_4^4 \ldots a_n^n$$

entwickelt, die Faktoren jedes Gliedes also nach den obern Indices geordnet, und sondert man die n untern Indices in Gruppen zu $n - p$ Elementen, so sieht man, daß die p Elemente der ersten Gruppe sich auf so viele verschiedene Arten auswählen lassen, als Kombinationen von n Elementen zur p-ten Klasse möglich sind, d. h. auf

$$\binom{n}{p} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p}$$

Arten. Jede dieser Gruppen liefert zu dem System der n^2 Elemente eine Unterdeterminante p-ten Grades nebst der korrespondierenden Unterdeterminante; das Produkt dieser beiden Unterdeterminanten enthält alle Glieder von R, in denen eine der $p!$ Permutationen der ausgewählten Indices unter sich mit einer der $(n-p)!$ Permutationen der andern Indices unter sich verbunden ist; in dem Aggregat aller dieser Produkte kann kein Glied von R zweimal vorkommen, und die Anzahl der in ihm enthaltenen Glieder ist gleich dem Produkte von $p! \cdot (n-p)!$ mit der obigen Anzahl der Gruppen, d. i. gleich $n!$ Es sind also die $n!$ Glieder der Gesamtdeterminante sämtlich in jenen Produkten vorhanden, und man hat also den Satz:

Jede Determinante n-ten Grades kann in eine Summe von $\binom{n}{p}$ Produkten je einer Unterdeterminante p-ten Grades und der korrespondierenden Unterdeterminante $n-p$-ten Grades zerlegt werden, wobei die Vorzeichen der Produkte mittels der vorher entwickelten Regel bestimmt werden.

So ist beispielsweise

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} .$$

Die Zerlegung einer Determinante in Produkte von Unterdeterminanten kann, wie leicht ersichtlich, auf sehr verschiedene Weisen ausgeführt werden, man kann weiterhin auch jede der Unterdeterminanten wieder als Summe derartiger Produkte und somit die Gesamtdeterminante als Summe von Produkten von mehr als je zwei Unterdeterminanten darstellen.

Zweites Buch.

Planimetrie.

Nach der ersten Bearbeitung von F. REIDT in Hamm

neu bearbeitet von R. HENKE in Dresden.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung. Seite

§ 1. Die Grundbegriffe der Geometrie 211

Erster Abschnitt. Die Grundgebilde der Planimetrie.

§ 2. Die Gerade und die Strecke 213
§ 3. Der Winkel 214
§ 4. Zwei Gerade. Parallele Gerade 217
§ 5. Der Kreis 219
§ 6. Die Figur 220

Zweiter Abschnitt. Die Kongruenz.

§ 7. Kongruenz und Symmetrie 222
§ 8. Die Winkel der geradlinigen Figuren 223
§ 9. Die Seiten der Dreiecke 227
§ 10. Die Kongruenzsätze 229
§ 11. Nichtkongruenz-Sätze 232
§ 12. Anwendungen der Kongruenz 234
§ 13. Das Viereck 237
§ 14. Die Kongruenz der Vielecke 242
§ 15. Kreis, Punkt und Gerade 243
§ 16. Kreis und Winkel 247
§ 17. Kreis und Figuren 249
§ 18. Zwei Kreise 253
§ 19. Symmetrische Figuren 255
§ 20. Die Fundamentalaufgaben 256

Dritter Abschnitt.
Vergleichung von Längen und von Flächeninhalten geradliniger Figuren.

§ 21. Das Messen und das Verhältnis der Längen von Strecken 263
§ 22. Verhältnisse an geschnittenen Parallelen 267
§ 23. Innere und äußere Teilung einer Strecke. Harmonische Teilung 271
§ 24. Der Flächeninhalt geradliniger Figuren 273
§ 25. Der pythagoreische Lehrsatz 283
§ 26. Verwandlung und Teilung geradliniger Figuren 287

Vierter Abschnitt. Die Ähnlichkeit geradliniger Figuren.

§ 27. Die Ähnlichkeit der Dreiecke 294
§ 28. Proportionen beim rechtwinkligen Dreieck 296
§ 29. Proportionen beim Kreise 305
§ 30. Konstruktionsaufgaben zur Ähnlichkeit 310
§ 31. Ähnlichkeit der Vielecke 312

Fünfter Abschnitt. Messung und Teilung des Kreises. Regelmäßige Vielecke.

§ 32. Messung und Teilung von Winkeln und Kreisbogen 317
§ 33. Regelmäßige Vielecke 320
§ 34. Berechnung des Kreises 324
§ 35. Berechnung von Bogen, Sektoren und Segmenten des Kreises 330
§ 36. Die Ähnlichkeit der Kreise 335

Sechster Abschnitt. Die planimetrischen Konstruktionsaufgaben.

§ 37. Vorbegriffe 337
§ 38. Methode der Hilfsfiguren 338
§ 39. Methode der geometrischen Örter 349
§ 40. Methode der ähnlichen Figuren 354
§ 41. Methode der algebraischen Analysis 358
§ 42. Besondere Arten von Konstruktionsaufgaben 364

Siebenter Abschnitt. Die merkwürdigen Punkte, Geraden und Kreise des Dreiecks.

§ 43. Beziehungen des Dreiecks zum Umkreis, zum Inkreis und zu den Ankreisen . . 371
§ 44. Der Höhenschnittpunkt und der Schwerpunkt des Dreiecks 379
§ 45. Der FEUERBACHsche Kreis 383

Achter Abschnitt. Einführung in die Geometrie der Lage.

§ 46. Harmonische Punkte und Büschel 386
§ 47. Die Transversalen des Dreiecks. Das vollständige Viereck und Vierseit 391
§ 48. Die Potenz 398
§ 49. Pol und Polare 404
§ 50. Ähnlichkeitspunkte und Ähnlichkeitspolaren 409

Einleitung.

§ 1. Die Grundbegriffe der Geometrie.

1. Die Grundbegriffe der Geometrie, die aus der Erfahrung gegeben vorausgesetzt werden, sind die des Raumes, der Fläche, der Linie und des Punktes.

Der Raum an sich wird als unbegrenzt und stetig ausgedehnt gedacht. Er ist ferner teilbar; jeder Raumteil ist ein Raum im engern Sinne und wieder teilbar bis ins Unendliche. Die Grenze, die zwei Raumteile voneinander scheidet, ist eine Fläche. Ein Raumteil kann unvollständig oder vollständig begrenzt sein. Ein vollständig begrenzter Raum heißt ein Körper.

Der mathematische Körper ist eine Abstraktion von den physischen Körpern der Erfahrung, indem bei ihm einerseits von dem den Raum erfüllenden Inhalt, dem Stoff oder der Materie, abgesehen, andrerseits ihm die Eigenschaften der Teilbarkeit bis ins Unendliche und der Durchdringlichkeit zugeschrieben werden. Denn während die Physik annimmt, daß die Teilbarkeit des Stoffes an den Atomen eine Grenze finde, kann für den reinen Gedanken kein räumlich Ausgedehntes gesetzt werden, bei dem eine weitere Teilbarkeit nicht gedacht werden könnte. Ebenso bringt es die Abstraktion von den besondern Eigenschaften des den Raum erfüllenden Stoffes mit sich, daß in dem Raume eines mathematischen Körpers gleichzeitig ein zweiter Körper gedacht werden kann. Nur in diesem Sinne sind also jene Eigenschaften des mathematischen Körpers zu verstehen, daß es der Vorstellung erlaubt und möglich sei, von den physikalischen Eigenschaften der Materie zu abstrahieren.

Jede Fläche hat als Grenze zweier Raumteile zwei Flächenseiten. So ist z. B. die eine Seite einer Kugelfläche erhaben, die andre hohl. Eine Fläche ist ebenfalls teilbar, jeder Flächenteil ist wieder eine Fläche und wieder teilbar; die Teilung wird auch hier als ohne Ende wiederholbar gedacht. Eine Fläche kann geschlossen sein, z. B. eine Kugelfläche, indem sie einen Körper für sich allein vollständig begrenzt; sie kann sich ferner ins Unendliche erstrecken, und sie kann teilweise oder vollständig begrenzt sein. Die Grenze zweier Flächenteile gegeneinander ist eine Linie.

Jede Linie hat als Grenze zweier Flächenteile zwei Seiten. Jede Linie wird ebenfalls als ins Unendliche teilbar gedacht, und jeder Linienteil ist wieder eine Linie. Eine Linie kann geschlossen sein, d. h. eine Fläche vollständig begrenzen; sie kann sich ins Unendliche erstrecken, und sie kann teilweise oder vollständig begrenzt sein. Die Grenze zweier Linienteile ist ein Punkt.

Ein Punkt ist ein ohne Ausdehnung gedachter Ort im Raume. Der Punkt ist daher auch nicht teilbar.

Auf einer Linie können unendlich viele Punkte gedacht werden, in einer Fläche unendlich viele Linien, in einem Körper unendlich viele Flächen.

Eine Linie ist zu beiden Seiten eines in ihr liegenden Punktes, eine Fläche außerdem zu beiden Seiten einer in ihr liegenden Linie, ein Körper auch zu beiden Seiten einer in ihm liegenden Fläche ausgedehnt. Daher sagt man, eine

Linie sei nach einer Dimension, nämlich der Länge, eine Fläche nach zwei Dimensionen, nämlich Länge und Breite, ein Körper, wie überhaupt der Raum, nach drei Dimensionen, nämlich Länge, Breite und Dicke (Höhe, Tiefe) ausgedehnt.

2. Jedes der vier Raumgebilde, Körper, Fläche, Linie und Punkt, wird ferner als beweglich gedacht. Durch die Bewegung kann es in eine von der ursprünglichen verschiedene Lage zu andern Gebilden des Raumes gelangen.

Bewegt sich ein Punkt, so daß er stetig in die Lagen andrer Punkte gelangt, so ist der von ihm beschriebene Weg eine Linie. Mit dem Begriff der Bewegung nehmen wir hier den Begriff der Richtung als aus Erfahrung gegeben an, nach der in jedem Augenblick die Bewegung des Punktes erfolgt, und die in jedem Fall durch einen zweiten Punkt als Zielpunkt der Bewegung bestimmt werden kann. Ein bewegter Punkt kann immer oder zeitweilig dieselbe Richtung beibehalten, oder er kann seine Richtung ändern. Jede Änderung der Richtung nennen wir Drehung.

Behält ein bewegter Punkt beständig dieselbe Richtung, so heißt die von ihm beschriebene Linie eine gerade Linie oder schlechthin Gerade. Man pflegt Punkte mit großen lateinischen Buchstaben zu benennen, und entsprechend bezeichnet man eine Gerade durch zwei an beliebige ihrer Punkte gesetzte Buchstaben, z. B. die Gerade AB. Jede Gerade kann von einem Punkte aus auf zwei verschiedene Arten durchlaufen werden, nämlich sowohl in der Richtung von A nach B, als in der Richtung von B nach A. Jede Gerade hat also zwei Richtungen, die einander entgegengesetzt sind.

Ein Punkt, der eine Gerade beschreibt, kann nach beiden entgegengesetzten Richtungen ohne Ende bewegt, jede Gerade kann also nach beiden Richtungen als unbegrenzt, also unendlich lang gedacht werden. Sie kann ferner nach einer ihrer Richtungen oder nach beiden zugleich durch je einen Punkt begrenzt gedacht werden. Durch zwei Punkte ist also ein Teil einer Geraden vollständig begrenzt. Dieser heißt eine Strecke und hat eine bestimmte Länge. Eine Strecke kann über beide Endpunkte unbegrenzt verlängert gedacht werden, so daß aus der Strecke wieder die unbegrenzte Gerade vorgestellt werden kann.

Ein Punkt kann im Raume nach unendlich verschiedenen Richtungen bewegt werden. Es gibt daher durch einen Punkt unendlich viele Gerade, die Strahlen genannt werden. Ein Strahl ist einseitig begrenzt.

Ändert ein bewegter Punkt seine Richtung ein- oder mehrmal sprungweise, so beschreibt er eine gebrochene Linie, deren Teile gerade sind. Ändert er seine Richtung stetig, so entsteht eine krumme Linie oder Kurve. Kein Teil einer krummen Linie ist gerade. Endlich ist auch denkbar, daß eine Linie aus Geraden und Kurven besteht, wenn der bewegte Punkt seine Richtung bald sprungweise, bald stetig ändert.

3. Die Richtung eines bewegten Punktes von einem Ausgangspunkt A wird, wie die Erfahrung lehrt, durch einen zweiten, den Zielpunkt B, bestimmt. Behält also der Punkt seine Richtung, so beschreibt er einen Teil einer Geraden, die Strecke AB. Es ist also der Begriff der Richtung von einem Punkte nach einem andern zusammenfallend mit dem Begriff der Geraden durch die beiden Punkte. Somit gibt es durch zwei Punkte nur eine Gerade. Zugleich ist aus der Erfahrung bekannt, daß der von A bis B auf der durch die Punkte bestimmten Geraden zurückgelegte Weg, also die Strecke AB der kürzeste Weg zwischen diesen beiden Punkten ist. Jeder andre, auf einer gebrochenen oder krummen Linie zwischen ihnen zurückgelegte Weg ist ein Umweg, also länger als die Strecke AB. Es fällt also auch der Begriff der Geraden mit dem Begriff des kürzesten Weges zusammen.

Hiernach sieht man, daß das Lehrgebäude (System) der Geometrie sich auf den Erfahrungssatz (Axiom der Geraden) stützt:

Durch zwei Punkte ist eine Gerade bestimmt und die durch die beiden Punkte bestimmte Strecke ist der kürzeste Weg zwischen den beiden Punkten.

Die Länge der Strecke zwischen zwei Punkten heißt die Entfernung oder der Abstand der beiden Punkte.

Aus dem Axiom der Geraden lassen sich die Folgerungen ziehen:

Die Strecke AB ist von gleicher Länge wie BA, aber die Richtungen, in der sie beschrieben werden, sind entgegengesetzt.

Zwei Gerade, die durch dieselben zwei Punkte gehen, müssen ihrer ganzen Länge nach zusammenfallen, oder einander decken.

Zwei Gerade, die einander teilweise decken, fallen in ihrer ganzen unendlichen Erstreckung zusammen. Ein Teil einer Geraden kann in ihr so verschoben gedacht werden, daß er stets mit einem andern Teil der Geraden zusammenfällt.

4. Wie ein bewegter Punkt eine Linie, so beschreibt eine aus ihrer Lage heraustretende Linie eine Fläche. Ist die bewegte Linie eine Gerade, so heißt die Fläche eine Regelfläche. Durch jeden Punkt einer solchen läßt sich daher eine Gerade denken, die ihrer ganzen Länge nach in die Fläche fällt.

Die einfachste Regelfläche ist die Ebene (Ebene des Papiers, auf dem man zeichnet, der Wandtafel). Die Ebene ist eine Fläche, mit der eine Gerade, die durch zwei auf ihr liegende Punkte geht, in ihrer ganzen unendlichen Erstreckung zusammenfällt.

Man kann sich daher von einem Punkte einer Ebene nach unendlich vielen Richtungen Gerade gezogen denken, die mit der Ebene vollständig zusammenfallen.

5. Die Geometrie ist die systematische Behandlung der Raumgebilde hinsichtlich ihrer Begrenzung und Ausdehnung, d. h. ihrer Gestalt und Größe, sowie ihre Beziehung zu andern Raumgebilden nach Gestalt, Größe und Lage. Indem sie von den einfachsten, unmittelbar gewissen Erfahrungstatsachen ausgeht, kommt sie zu Sätzen (Lehrsätzen, Theoremen), deren Richtigkeit nicht ohne weiteres einleuchtet, die vielmehr eines Beweises bedürfen und lehrt mit deren Hilfe Aufgaben (Probleme) zu lösen.

Aus praktischen Gründen wird die Geometrie eingeteilt in die Planimetrie (ebene Geometrie), die Raumgebilde in derselben Ebene betrachtet und die Stereometrie (Geometrie des Raumes), die diese Beschränkung aufhebt.

Erster Abschnitt.

Die Grundgebilde der Planimetrie.

§ 2. Die Gerade und die Strecke.

Die Begriffe der Geraden und der Strecke sind bereits im vorstehenden erklärt worden. Aus den daselbst entwickelten Eigenschaften der Gebilde ergeben sich zunächst folgende Forderungen, Postulate:

1. Eine Gerade zu ziehen, und zwar beliebig oder durch einen oder durch zwei gegebene Punkte. Die letztere Forderung nennt man auch: zwei Punkte verbinden und die durch die beiden Punkte bestimmte Strecke ihre Verbindungslinie.

Die praktische Ausführung dieser Forderung geschieht mit Hilfe des Lineals in als bekannt vorauszusetzender Weise. Der Gebrauch dieses Instruments erfordert eine Prüfung seiner Richtigkeit, die in folgender Weise ausgeführt werden kann: Man ziehe durch zwei (möglichst weit voneinander entfernte) Punkte A, B

die Gerade, kehre dann das Lineal so um, daß seine beiden Enden miteinander die Plätze wechseln, lege es mit derselben Kante wie vorher an die Punkte A, B und ziehe in dieser Lage wieder die Linie AB. Ist das Lineal richtig, so müssen die beiden so gezogenen Geraden einander decken, da durch zwei Punkte nur eine einzige Gerade möglich ist.

2. Eine gegebene Strecke über einen ihrer Endpunkte oder über beide beliebig zu verlängern.

Zwei oder mehrere Strecken lassen sich miteinander in Beziehung auf ihre Länge oder auf ihre Lage vergleichen. Der Länge nach können zwei gegebene Strecken AB, CD gleich oder ungleich sein. Denkt man sich die eine so auf die andre gelegt, daß ihr einer Endpunkt C auf einen Endpunkt A der andern und sie selbst in die Richtung von AB fällt, so ist CD gleich AB, wenn auch der andre Endpunkt D der ersten Strecke auf den andern Endpunkt B der zweiten fällt. Fällt D zwischen A und B, so ist CD kleiner als AB, fällt endlich D auf die Verlängerung von AB, so ist CD größer als AB. Die Zeichen für gleich, kleiner und größer sind: $=, <, >$; so daß man die drei Fälle schreiben kann:

$$CD = AB, \quad CD < AB, \quad CD > AB \quad .$$

Ist eine Strecke AB über einen ihrer Endpunkte verlängert und die Verlängerung BE gleich einer zweiten Strecke CD, so sagt man, die ganze Strecke AE sei gleich der Summe von AB und CD. In entsprechender Weise kann man von der Summe von drei oder mehr Strecken reden. Ist dagegen auf AB von dem einen Endpunkt B aus in der Richtung nach dem andern Endpunkt A eine Strecke BE abgeschnitten, die gleich CD ist (wobei $CD < AB$ vorausgesetzt wird), so heißt AE die Differenz von AB und CD.

Zur Bezeichnung von Strecken bedient man sich, soweit ihre Länge in Betracht gezogen wird, kleiner lateinischer Buchstaben. Die Summe zweier Strecken a und b kann (entsprechend den Bezeichnungen der Arithmetik) durch $a + b$, ihre Differenz durch $a - b$ bezeichnet werden.

Ist eine Strecke c die Summe einer beliebigen Anzahl n einander gleicher Strecken, so ist sie ein Vielfaches jeder einzelnen und jede von diesen $\frac{1}{n}$ der ganzen Strecke. Man kann in diesem Falle $c = n \cdot a$ und $a = \frac{1}{n} \cdot c = \frac{c}{n}$ schreiben.

Die Vergleichung der Lage zweier Geraden erfordert die Einführung eines neuen Grundgebildes, des Winkels.

§ 3. Der Winkel.

1. Von einem gegebenen, also festliegenden, Punkte gehen in der Ebene unendlich viele verschiedene Richtungen aus, und somit lassen sich in der Ebene durch jeden gegebenen Punkt unendlich viele verschiedene Gerade ziehen. Zwei dieser Geraden bilden einen Winkel.

Bezeichnet man jede der von einem Punkt A ausgehenden Richtungen durch einen Strahl AB, AC, AD u. s w. (Fig. 1), so kann jeder einzelne dieser Strahlen durch Drehung um A nacheinander in die Lage eines jeden der andern gebracht werden. Die Größe der Drehung von AB, die nötig ist, damit AB in die Lage von AC gelange, wird im allgemeinen verschieden sein von der, durch die AB in die Lage von AD gelangt.

Die Strahlen, welche die beiden Richtungen darstellen, heißen die Schenkel, ihr gemeinschaftlicher Ausgangspunkt der Scheitel des Winkels. Man bezeichnet den Winkel, dessen Schenkel die Strahlen AB, AC sind, durch $\angle BAC$. Der

Buchstabe für den Scheitelpunkt steht bei dieser Bezeichnung durch drei Buchstaben in der Mitte.

Man sagt, der Winkel BAC werde durch Drehung des einen Schenkels um den Scheitel bis zum Zusammenfallen mit dem andern Schenkel beschrieben und man kann $\angle BAC$ mit $\angle BAD$ der Größe nach vergleichen.

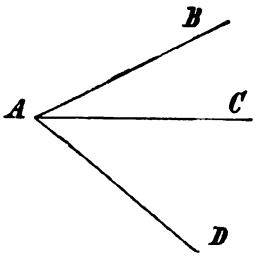


Fig. 1.

Die Schenkel eines Winkels schließen als unbegrenzte Gerade einen bestimmten, aber nicht vollständig begrenzten Teil der Ebene ein, den man den Winkelraum nennen kann. Der Kürze halber sagt man von Punkten oder Linien, die innerhalb oder außerhalb dieses Winkelraumes liegen, auch wohl, sie lägen innerhalb oder außerhalb des Winkels. — Als Schenkel eines Winkels können übrigens auch Strecken gelten, insofern auch durch sie die bestimmten Richtungen, deren Unterschied durch den Winkel angegeben werden soll, bezeichnet sind. In diesem Sinne kann man sagen, daß die Größe eines Winkels durch Verlängerung oder Verkürzung eines oder beider Schenkel nicht verändert werde.

Um zwei Winkel BAC, $B'A'C'$ ihrer Größe nach zu vergleichen, kann man sich den Winkelraum des einen in der Ebene so verschoben denken, daß der Scheitel A' auf den Scheitel A und der Schenkel $A'B'$ in die Richtung des Schenkels AB fällt, und daß die beiden andern Schenkel auf derselben Seite von AB liegen. Fällt dann auch $A'C'$ in die Richtung von AC, so sind die beiden Winkel gleich groß, fällt $A'C'$ innerhalb des Winkels BAC, so ist $\angle B'A'C' < \angle BAC$: fällt endlich $A'C'$ außerhalb des Winkels BAC, so ist $\angle B'A'C' > \angle BAC$.

Man bezeichnet einen Winkel, namentlich bei Größenvergleichungen, auch durch einen kleinen griechischen Buchstaben, der innerhalb des Winkels nahe bei dem Scheitel geschrieben wird.

2. Ein Winkel BAC kann sowohl durch Drehung des Schenkels AB bis zum Zusammenfallen mit AC, als durch Drehung des Schenkels AC in entgegengesetztem Sinne bis zum Zusammenfallen mit AB beschrieben werden. Auf die Größe des Winkels ist dieser Unterschied ohne Einfluß, und wir sehen daher vorerst von ihm ab. Jeder Schenkel aber kann außerdem auf zwei Arten durch Drehung um den Scheitel in die Lage des andern gebracht werden, denn die Drehung kann auf der einen oder auf der andern Flächenseite des bewegten Schenkels erfolgen. Man kann hierbei die Seiten des Schenkels als die rechte und die linke (entsprechend der Bewegung einer Person in der Richtung des Schenkels), und demnach eine Drehung nach rechts und eine solche nach links oder eine Drehung im Sinne oder entgegengesetzt dem Sinne der Uhrzeiger unterscheiden. Die Größe der Drehung, die AB zu machen hat, um in die Lage von AC zu gelangen, wird im allgemeinen in beiden Fällen verschieden sein: beide Drehungen aber müssen einander zu einer vollen Umdrehung ergänzen.

Es gibt also stets zwei Winkel, die denselben Scheitel und dieselben Schenkel haben. Sind diese beiden Winkel einander gleich, so heißt jeder ein gestreckter Winkel. Ein solcher entspricht der Hälfte einer vollen Umdrehung, und seine Schenkel liegen in gerader Linie, aber nach entgegengesetzten Richtungen. Aus dieser Lage der Schenkel folgt, daß zwei gestreckte Winkel, wie oben angegeben, zur Deckung gebracht werden können, und daß somit der Lehrsatz bewiesen ist:

1) Gestreckte Winkel sind einander gleich.

Daher kann man auch den gestreckten Winkel als Grundlage einer Einteilung der Winkel nach ihrer Größe benutzen. Man unterscheidet zunächst

solche Winkel, die kleiner, und solche, die größer als ein gestreckter sind. Die ersten nennt man hohle oder konkave, die zweiten erhabene oder konvexe Winkel (Fig. 2). Von den beiden Winkeln, die zu demselben Scheitel und denselben Schenkeln gehören, ist, wenn nicht beide gestreckte sind, der eine ein hohler, der andre ein erhabener. Der Einfachheit wegen ist man übereingekommen, unter einem Winkel stets den hohlen zu verstehen, falls nicht das Gegenteil ausdrücklich gesagt wird.

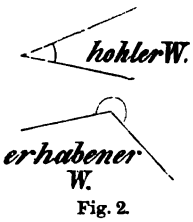


Fig. 2.

Die hiernach vorzugsweise in Betracht kommenden hohlen Winkel werden nun, wie folgt, weiter eingeteilt: Ein Winkel, der halb so groß ist als ein gestreckter, heißt ein rechter Winkel oder schlechthin ein Rechter und wird häufig durch R bezeichnet. Er ist also gleich dem vierten Teile einer vollen Umdrehung, und es gilt der Satz:

2) Rechte Winkel sind einander gleich.

Von den Schenkeln eines rechten Winkels sagt man, daß jeder auf dem andern senkrecht steht oder normal ist, und nennt dementsprechend jede Gerade, die mit einer andern Geraden einen rechten Winkel bildet, eine Senkrechte, ein Lot zu der andern oder eine Normale der andern Geraden. — Winkel, die kleiner als ein rechter sind, heißen spitze; hohle Winkel, die größer als ein rechter sind, werden stumpfe genannt (Fig. 3); erhabene Winkel sind überstumpfe.

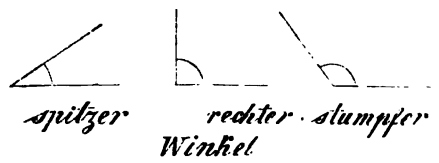


Fig. 3.

3. Zwei Winkel BAC, CAD, die den Scheitel A und einen Schenkel AC gemeinsam haben, und deren andre Schenkel auf verschiedenen Seiten des gemeinschaftlichen liegen, heißen aneinanderliegende Winkel. Die beiden äußeren Schenkel bilden dann miteinander einen dritten Winkel BAD, der gleich der Summe der beiden ersten ist. Haben zwei Winkel BAC, CAD den Scheitel und einen Schenkel AC gemeinsam, liegen aber die nicht gemeinschaftlichen Schenkel auf derselben Seite des gemeinschaftlichen, so bilden diese miteinander einen Winkel BAD, der die Differenz der beiden andern ist. Man sagt dann, der kleinere Winkel CAD sei von dem größern BAC abgetragen. In entsprechender Weise kann man durch Aneinanderlegen von mehr als zwei Winkeln oder durch Abtragen von solchen, die Summe oder irgend ein Aggregat beliebig vieler Winkel erhalten. Sind die Summanden gleich groß, so erhält man ein Vielfaches des einzelnen Winkels.

Um statt des gestreckten Winkels ein kleineres und somit bequemeres Maß für Winkelgrößen zu erhalten, ist man übereingekommen, den neunzigsten Teil eines rechten Winkels unter dem Namen Grad zu diesem Zwecke zu verwenden und als Unterabteilungen die Minute gleich $\frac{1}{60}$ Grad und die Sekunde gleich $\frac{1}{60}$ Minute beizufügen. Da alle rechten Winkel gleich groß sind, so haben auch der Grad, die Minute und die Sekunde fest bestimmte, also unveränderliche Größe. Man bezeichnet sie durch die Zeichen ^{0}, $'$, $''$ und schreibt also z. B. statt 15 Grad, 17 Minuten und 12 Sekunden: $15^0\ 17'\ 12''$. Die früher noch übliche Teilung der Sekunde in 60 Tertien ist nicht mehr gebräuchlich: man bedient sich an ihrer Stelle der Dezimalteile der Sekunde. Neuerdings findet man auch häufig für die Minute, ja selbst für den Grad die Dezimalteilung angewendet.

Ein rechter Winkel enthält also 90^0, ein gestreckter 180^0, eine volle Umdrehung 360^0.

Zwei Winkel, deren Summe 90^0 beträgt, heißen komplementär, und jeder das Komplement des andern. Für zwei Winkel, deren Summe 180^0 beträgt, gelten entsprechend die Benennungen supplementär und Supplement.

Zwei aneinanderliegende Winkel, deren nicht gemeinschaftliche Schenkel eine einzige Gerade bilden, also entgegengesetzte Richtungen haben, heißen Nebenwinkel. Aus dieser Erklärung folgt unmittelbar der Satz:

3) Die Summe zweier Nebenwinkel beträgt zwei Rechte.

Nebenwinkel sind also supplementär; durch jeden von zwei Nebenwinkeln wird die Größe des andern bestimmt. Daher gehören zu gleichen Winkeln gleiche Nebenwinkel (und umgekehrt); dagegen hat der größere von zwei Winkeln einen kleinern Nebenwinkel (und umgekehrt). Sind zwei Nebenwinkel ungleich, so ist der kleinere spitz, der größere stumpf; dagegen sind gleiche Nebenwinkel stets rechte, und der gemeinschaftliche Schenkel steht also in diesem Fall senkrecht zu der Geraden, die beide andern Schenkel miteinander bilden. — Ist die Größe eines Winkels in Zahlen gegeben, so berechnet man die seines Nebenwinkels durch Subtraktion von 180^0; so ist z. B. der Nebenwinkel zu 75^0 gleich $180^0 - 75^0 = 105^0$, der Nebenwinkel zu $15^0\,58'\,12''$ gleich $179^0\,59'\,60'' - 15^0\,58'\,12'' = 164^0\,1'\,48''$. Ist dagegen ein Winkel durch Zeichnung gegeben, so zeichnet man seinen Nebenwinkel, indem man einen der Schenkel über den Scheitel verlängert. Da hierzu jeder der beiden Schenkel gewählt werden kann, so hat jeder Winkel der Lage nach zwei Nebenwinkel, z. B. der Winkel *ABC* (Fig. 4 S. 218) die Nebenwinkel *CBD* und *ABE*.

Solche Winkel, die den Scheitel gemeinschaftlich haben, und bei denen jeder Schenkel des einen durch Verlängerung eines Schenkels des andern über den Scheitelpunkt erhalten wird, heißen Scheitelwinkel.

Da zwei Scheitelwinkel denselben Winkel zum gemeinschaftlichen Nebenwinkel haben, also mit demselben Winkel dieselbe Summe von 180^0 geben, so folgt der Satz:

4) Scheitelwinkel sind gleich.

Liegen mehrere Winkel so aneinander, daß die beiden äußersten Schenkel nach entgegengesetzten Richtungen eine Gerade bilden, so beträgt ihre Summe zwei Rechte oder 180^0. Fällt dagegen der letzte Schenkel wieder mit dem ersten zusammen, so erhält man diese Summe zweimal.

5) Die Winkel um einen Punkt betragen also zusammen vier Rechte oder 360^0.

§ 4. Zwei Gerade. Parallele Gerade.

1. Da zwei Gerade, die zwei Punkte gemeinsam haben, einander decken, so sind bei der Frage nach den möglichen Lagen zweier Geraden gegeneinander außerdem nur noch die beiden Fälle denkbar, daß sie einen und daß sie keinen Punkt gemeinsam haben.

Zwei Gerade, die einander decken, können als eine Gerade angesehen werden. Da aber jede Gerade zwei Richtungen hat, so kann auch in diesem Fall von einem Winkel der beiden Geraden, oder genauer ihrer entgegengesetzten Richtungen gesprochen werden. Der Winkel der beiden Richtungen einer Geraden (oder zweier einander deckenden Geraden) ist ein gestreckter. Der Allgemeinheit wegen spricht man auch von einem Winkel der gleichen Richtungen zweier aufeinander fallenden Geraden, und sagt, er sei gleich Null. Es ist dies eine erlaubte Ausdrucksweise, indem eben dadurch gesagt wird, daß ein Richtungsunterschied nicht mehr vorhanden ist. Denkt man sich aber, daß die eine Richtung, nachdem sie ursprünglich mit der andern zusammengefallen, durch eine volle Umdrehung wieder

die frühere geworden sei, so bezeichnet man dies durch die Angabe, der Winkel der beiden Umdrehungen sei gleich 360^0.

Von zwei Geraden, die einen Punkt gemeinsam haben, sagt man, daß sie einander schneiden, und der gemeinschaftliche Punkt heißt ihr Schnittpunkt.

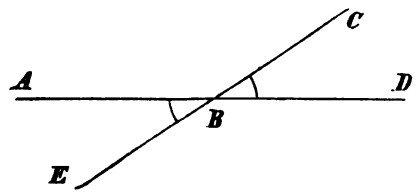


Fig. 4.

Hierbei ist es gleichgültig, ob die Geraden begrenzt oder unbegrenzt sind, und im ersten Falle ob man eine davon oder beide verlängern muß, um den Schnittpunkt zu erhalten. Man sagt ferner, daß zwei solche Gerade von zwei ihrer Punkte aus in den nach dem Schnittpunkte hinführenden Richtungen konvergieren, in den entgegengesetzten divergieren. Die Richtungen zweier einander schneidenden Geraden bilden miteinander vier hohle Winkel. (Fig. 4.) Zu jedem sind zwei der andern Nebenwinkel, der dritte ist sein Scheitelwinkel.

2. Daß zwei Gerade einen Punkt gemeinsam haben können, bedurfte nach dem vorhergegangenen keines Beweises. Daß es aber möglich ist, daß zwei Gerade in ihrer ganzen unendlichen Erstreckung keinen Punkt gemeinsam haben, kann nicht ohne weiteres bejaht werden, vielmehr bedarf diese Möglichkeit eines Nachweises. Zu diesem Zwecke denken wir uns eine Gerade SA, die eine andre Gerade MN in einem Punkte A schneidet (Fig. 5) und sodann die erste um den festbleibenden Punkt S gedreht, so daß sie in stetiger Aufeinanderfolge die Lagen aller möglichen durch S gehenden Geraden der Ebene erhält. Bei dieser Drehung muß auch der Schnittpunkt A auf der zweiten Geraden MN fortwährend seine Lage verändern und in ununterbrochener Aufeinanderfolge zunächst die Lagen aller von A aus nach derselben Richtung auf MN liegenden Punkte annehmen. Nachdem sich so der Schnittpunkt B, C, ... mehr und mehr von A entfernt hat, findet man, daß er im Verlaufe der Drehung nach der entgegengesetzten Richtung von MN übergesprungen ist und nun, ebenfalls in ununterbrochener Aufeinanderfolge die Lagen der Punkte von MN annehmend, sich A wieder nähert, bis er nach einer vollen Umdrehung der bewegten Geraden wieder mit A zusammenfällt. Unter den verschiedenen Lagen der bewegten Geraden muß hiernach eine sein, in welcher der Übergang des Schnittpunktes von der einen Richtung der Geraden MN nach der andern erfolgt.

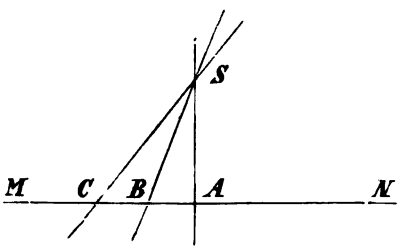


Fig. 5.

Man darf es als einleuchtend betrachten, daß in dieser Lage beide Gerade keinen Punkt gemeinsam haben, und daß die geringste Drehung der bewegten Geraden aus solcher Lage nach der einen oder andern Richtung wieder einen Schnittpunkt in der einen oder der andern Richtung von MN zur Folge hat.

Gerade, die in ihrer ganzen unendlichen Erstreckung keinen Punkt gemeinsam haben, heißen parallel, und wir können nach dem vorhergehenden als aus Erfahrung unmittelbar gewiß, als Axiom, annehmen:

Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden gibt es zu dieser nur **eine** Parallele.

Da eine Richtung durch einen festen Ausgangspunkt und einen Zielpunkt bestimmt ist, wobei der Zielpunkt auch als veränderlich gedacht werden kann, indem er in der durch die betreffende Gerade bezeichneten Richtung in immer weitere Entfernung verlegt werden darf, so kann man in der vorstehenden Erörterung den beweglichen Schnittpunkt der beiden Geraden als gemeinsamen

Zielpunkt für ihre konvergierenden Richtungen ansehen. Hierbei bleibt die Richtung von MN beständig dieselbe, während die der bewegten Geraden sich beständig verändert. Daher verändert sich auch fortwährend der Unterschied der beiden Richtungen, d. h. ihr am Schnittpunkt gebildeter Winkel. Da nun die Entfernung des Schnittpunktes vom Punkte A zuerst immer größer wird, und da dieser Schnittpunkt nacheinander die Lagen aller in der betreffenden Richtung liegenden Punkte von MN ihrer ganzen unendlichen Erstreckung nach annehmen muß, ehe er nach der entgegengesetzten Richtung überspringen kann (denn es gibt keinen Punkt in der ersten Richtung auf MN, der nicht mit S durch eine Gerade verbunden gedacht werden könnte), so kann man sagen, daß der Schnittpunkt bei der parallelen Lage beider Linien in unendliche Entfernung gerückt, und daß hiermit auch der Richtungsunterschied der beiden Geraden nach diesem Zielpunkt hin aufgehoben sei.

In diesem Sinne kann man parallele Gerade als solche definieren, deren Schnittpunkt unendlich fern liegt. Diese Erklärung wiederspricht nur scheinbar der früheren, nach der parallele Gerade einander in keinem Punkte schneiden, denn die Negation bei dieser findet sich bei der neuen in dem Worte »unendlich« wieder, ist also hier nur unter einer Form versteckt, die den Vorzug hat, bei vielen Untersuchungen die getrennte Behandlung der beiden Fälle: a) die Linien schneiden einander; b) die Linien sind parallel; unnötig zu machen. Aber die zweite Definition leistet noch mehr, als die Unterordnung zweier verschiedener Fälle unter dieselbe Ausdrucksform, sie versteckt nicht etwa bloß das »einander nicht schneiden« hinter dem »einander in einem unendlich fernen Punkt schneiden«, sondern sie enthält auch die Tatsache, daß der Schnittpunkt zweier konvergierenden Geraden in immer größere Entfernung von einem beliebigen endlichen Anfangspunkte rückt, je mehr die Geraden sich dem Parallelismus nähern, und daß diese Entfernung über jede Grenze hinaus vergrößert gedacht werden kann.

Nach welcher der Richtungen zweier parallelen Geraden ihr unendlich ferner Schnittpunkt anzunehmen sei, bleibt unbestimmt. Der Sprung, den der Durchschnittspunkt der beiden Geraden vermittels ihrer parallelen Lage von der einen Richtung von MN nach der andern macht, nötigt zu der Ausdrucksweise, daß der unendlich ferne Punkt nach beiden Richtungen zugleich liege, aber man darf ihn gleichwohl nur als einen einzigen Punkt in diese Art der Darstellung einführen, als den unendlich fernen Punkt beider Geraden. Der Unterschied der beiden Richtungen einer Geraden hat nur Sinn, wenn es sich um die Bewegung von einem Ausgangspunkt nach einem endlich entfernten Zielpunkte handelt; es ist offenbar gleichgültig, nach welcher der beiden Richtungen man eine ohne Ende fortdauernde Bewegung begonnen denkt.

Die fernere Annahme, nach der parallele Gerade gleiche Richtungen haben, bedarf ebenfalls einer nähern Erläuterung. Man könnte zunächst ebensogut sagen, daß parallele Gerade entgegengesetzte Richtungen haben, je nachdem man die eine oder die andre Richtung in derselben Geraden in Betracht zieht. Genauer ist also: die Richtungen in zwei parallelen Geraden sind, je nachdem man die eine oder die andre wählt, entweder gleich oder entgegengesetzt.

§ 5. Der Kreis.

Bei der Drehung der Geraden SA um einen in ihr angenommenen festen Punkt S beschreibt jeder andre Punkt der Geraden eine Linie, die zufolge dieser Entstehung die Eigenschaft hat, daß jeder ihrer Punkte von dem festen Punkt S dieselbe Entfernung hat. Da nach Vollendung einer ganzen Umdrehung von SA der beschreibende Punkt in seine ursprüngliche Lage zurückgekehrt sein muß, so hat auch die beschriebene Linie die Eigenschaft, daß sie geschlossen ist und also einen Teil der Ebene vollständig begrenzt. Eine solche Linie heißt ein Kreis.

Ein Kreis ist also eine geschlossene krumme Linie von der Eigenschaft, daß jeder ihrer Punkte von einem bestimmten, im Innern der von ihr begrenzten Fläche liegenden Punkte gleich weit entfernt ist. Dieser feste Punkt heißt der Mittelpunkt oder das Centrum, jede von einem Punkt des Kreises und dem Mittelpunkt begrenzte Strecke ein Radius oder Halbmesser, jede von zwei Punkten des Kreises begrenzte Strecke eine Sehne und wenn sie durch den Mittelpunkt geht, ein Durchmesser oder Diameter des Kreises. Jeder Teil des Kreises wird ein Kreisbogen genannt.

Aus diesen Erklärungen folgt: Alle Radien eines Kreises sind gleich. Der Durchmesser ist doppelt so groß als der Radius desselben Kreises. Alle Durchmesser eines Kreises sind gleich.

Zur Zeichnung von Kreisen dient der Zirkel, dessen Einrichtung und Gebrauch hier als bekannt vorausgesetzt wird. Er dient zugleich zur Lösung der Aufgabe:

Auf einer gegebenen Geraden eine Strecke abzutragen, die einer andern gegebenen Strecke gleich ist, oder überhaupt eine Strecke zu zeichnen, die eine gegebene Länge hat.

Dazu bedient man sich eines Zirkels mit festen Spitzen (Stech- oder Meßzirkel). Der Endpunkt der aufgetragenen Strecke wird durch einen Zirkelstich bezeichnet und dieser durch einen Bleistiftring markiert.

Hiernach können folgende Fundamentalkonstruktionen ausgeführt werden:

a) Einen Kreis zu zeichnen, und zwar entweder beliebig oder mit gegebenem Radius oder um einen gegebenen Punkt, oder endlich mit gegebenem Radius und Mittelpunkt zugleich.
b) Eine gegebene Strecke über einen ihrer Endpunkte um eine andre gegebene Strecke zu verlängern.
c) Eine Strecke zu zeichnen, die gleich der Summe zweier oder mehrerer Strecken oder gleich einem Vielfachen einer gegebenen Strecke ist.
d) Eine Strecke zu zeichnen, die gleich der Differenz zweier gegebener Strecken ist.
e) In einem gegebenen Kreise einen Radius oder einen Durchmesser zu zeichnen, der selbst oder in dessen Verlängerung durch einen gegebenen Punkt geht.
f) Ebenso in einem gegebenen Kreise eine Sehne zu zeichnen, die durch zwei gegebene Punkte geht.
g) In einen gegebenen Kreis eine Sehne von gegebener Länge einzutragen.

§ 6. Die Figur.

1. Aus der Untersuchung über die verschiedenen möglichen Lagen zweier Geraden zueinander geht hervor, daß durch zwei Gerade ein Teil der Ebene nicht vollständig begrenzt werden kann. Es sind aber hierzu drei Gerade hinreichend, denn verbindet man je zwei von drei nicht in gerader Linie liegenden Punkten durch die betreffenden Strecken miteinander, so schließen diese Strecken einen vollständig begrenzten Teil der Ebene ein. Dagegen kann schon mit einer einzigen krummen Linie ein Teil der Ebene vollständig begrenzt werden.

Unter einer Figur versteht man im weitern Sinne eine jede Zusammenstellung von Punkten oder Linien, im engern Sinne dagegen die Gesamtheit gerader oder krummer Linien, die einen Teil der Ebene vollständig begrenzen. Eine Figur heißt geradlinig, wenn sie nur gerade Linien, krummlinig, wenn sie nur eine oder mehrere krumme Linien, und gemischtlinig, wenn sie gerade und krumme Linien zugleich enthält.

Insbesondere erhält man ein n-Eck (Drei-, Vier-, Fünf-Eck u. s. w.), wenn man einen Punkt mit einem zweiten, diesen mit einem dritten u. s. w. bis zum n-ten (dritten, vierten, fünften u. s. w.) durch Strecken verbindet und zuletzt in

gleicher Weise vom n-ten zum ersten zurückkehrt. Jene Punkte heißen die Eckpunkte, ihre Verbindungslinien die Seiten der Figur. Ein n-Eck hat also n Eckpunkte und n Seiten. Man nennt solche Figuren auch Vielecke oder Polygone; im engern Sinne wird diese Bezeichnung jedoch nur dann gebraucht, wenn die Anzahl der Seiten größer als vier ist.

An jedem Eckpunkte eines n-Ecks bilden die zwei in ihm zusammenstoßenden Seiten einen Winkel. Somit hat jedes n-Eck n Winkel. Hierbei bedarf es, da im allgemeinen an jedem Eckpunkt zwei solche Winkel, ein hohler und ein erhabener, entstehen, einer nähern Bestimmung. Zu diesem Zwecke denken wir uns einen Punkt, der die Seiten der Figur nacheinander durchläuft und schließlich zu seiner Anfangslage zurückkehrt. Diese Bewegung kann auf zwei entgegengesetzte Weisen geschehen, z. B. (Fig. 6) von A über B, C u. s. w. oder von A über G, F u. s. w. In jedem Falle kann man mit Beziehung auf die Bewegung des Punktes eine rechte und eine linke Flächenseite jeder von ihm beschriebenen Strecke unterscheiden, und man versteht dann unter den Winkeln des Polygons entweder diejenigen, deren Winkelräume nur auf den rechten, oder diejenigen, deren Winkelräume nur auf den linken Flächenseiten liegen. Die Wahl zwischen beiden Annahmen ist in jedem einzelnen Falle zu treffen.

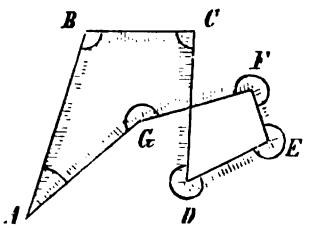


Fig. 6.

Im nachstehenden werden wir zunächst nur solche geradlinige Figuren voraussetzen, deren Umfänge (d. i. die Gesamtheit ihrer Seiten) sich nicht selbst schneiden, die also einen einzigen bestimmten Flächenteil begrenzen. In diesem Falle werden immer diejenigen Winkel als die Winkel des Vielecks angesehen, in deren Winkelräumen die Punkte der begrenzten Fläche liegen. Schneidet dabei auch keine Verlängerung einer Seite eine der andern Seiten (vgl. Fig. 7 *a* und *b*), so sind diese Winkel sämtlich hohl. — Der bewegte Punkt, der den Umfang eines Vielecks durchläuft, verändert an jedem Eckpunkt seine Richtung. Diese Richtungsänderung wird bestimmt durch den Winkel, den die Verlängerung der vorhergehenden Seite in der Richtung der Bewegung mit der Richtung der folgenden Seite bildet, in der sich der Punkt nach erfolgter Drehung weiter bewegt. Dieser Winkel heißt der Außenwinkel des Vielecks an dem betreffenden Eckpunkt. Dabei hat man sich die Drehung immer in demselben Sinne zu denken, entweder in oder entgegengesetzt der Uhrzeigerrichtung. Ist der an demselben Eckpunkte liegende innere Winkel des Vielecks hohl, so ist der zugehörige Außenwinkel sein Nebenwinkel.

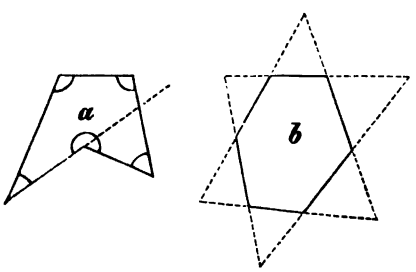


Fig. 7.

Zieht man alle möglichen Verbindungslinien zwischen je zwei von n Punkten (von denen nie mehr als zwei in gerader Linie liegen), so erhält man, da jeder der n Punkte mit jedem der $n - 1$ übrigen verbunden werden kann, jede Verbindungsstrecke aber an zwei Punkten vorkommt, im ganzen $\frac{1}{2}n(n-1)$ Strecken. Von diesen sind bei einem n-Eck n Seiten; die übrigen werden Diagonalen des n-Ecks genannt. Von jedem Eckpunkt eines n-Ecks aus lassen sich $n - 3$ Diagonalen ziehen; die Gesamtzahl der Diagonalen eines n-Ecks ist also $\frac{1}{2}n(n-3)$.

Ein Dreieck hat keine, ein Viereck zwei, ein Fünfeck fünf Diagonalen u. s. w.

Die Elemente der Planimetrie behandeln die Eigenschaften der geradlinigen Figuren und von den krummlinigen oder gemischtlinigen nur diejenigen, die von Kreisen oder von Teilen von Kreisen und einer oder mehreren Geraden begrenzt werden.

Man kann daher sagen, die elementare Planimetrie beschränke sich auf diejenigen Eigenschaften der Figuren, die sich mit alleiniger Hilfe von Lineal und Zirkel entwickeln lassen. Eine Konstruktion, die mit Hilfe von Lineal und Zirkel erledigt werden kann, heißt daher eine elementare Konstruktion.

2. Die elementaren Untersuchungen der Eigenschaften der Figuren lassen sich in drei Hauptabschnitte gliedern. An jeder Figur im engern Sinne kann man zunächst Größe und Gestalt des zugehörigen Flächenraums unterscheiden. Figuren, die vollständig miteinander übereinstimmen, die also gleiche Größe und gleiche Gestalt haben, so daß man die eine als eine Kopie der andern ansehen kann, heißen kongruent; Figuren, die gleiche Größe haben, heißen gleich; Figuren, die nur in der Gestalt übereinstimmen, heißen ähnlich. Kongruente Figuren sind also gleich und ähnlich.

Ein Dreieck kann z. B. einem Viereck gleich, aber nicht ihm ähnlich sein; ein Dreieck auf dem Felde kann einem Dreieck auf dem kleinern Papier ähnlich, aber nicht kongruent sein.

Das Zeichen der Gleichheit ist $=$, das der Ähnlichkeit $\sim$ (ein liegendes s, der Anfangsbuchstabe von »similis«); das der Kongruenz ist aus den beiden vorigen zusammengesetzt, nämlich $\simeq$. Man schreibt also, daß eine Figur A einer andern B gleich, ähnlich oder kongruent sei: $A = B$, $A \sim B$, $A \simeq B$.

Hiernach kann der Inhalt der nachfolgenden Untersuchungen in drei Hauptabschnitte zerlegt werden, deren erster von der Kongruenz und den mit ihr zusammenhängenden Eigenschaften der Seiten, Winkel u. s. w., deren zweiter von der Gleichheit und deren dritter von der Ähnlichkeit der Figuren handelt.

Zweiter Abschnitt.

Die Kongruenz.

§ 7. Kongruenz und Symmetrie.

Zwei Raumgebilde sind kongruent, wenn sie sich so aufeinander gelegt denken lassen, daß jedes Stück, d. h. jeder Punkt, jede Linie, jeder Flächen- und Raumteil der einen mit einem entsprechenden Stück der andern zusammenfällt.

Von zwei Raumgebilden, die sich in solcher Lage zueinander befinden, sagt man, daß sie einander decken. Je zwei Stücke zweier kongruenten Raumgebilde, die bei der Deckung zusammenfallen, sind entsprechende Stücke.

Damit zwei geradlinige ebene Figuren kongruent sind, ist es notwendig und hinreichend, daß jede Seite der einen einer Seite der andern und jeder Winkel der einen einem Winkel der andern gleich ist, und daß diese gleichen Stücke in beiden Figuren in gleicher Weise gegen die andern liegen, also in gleicher Reihenfolge angeordnet sind. Doch sind hierbei zwei Fälle zu unterscheiden: Folgen die entsprechenden Stücke beider Figuren nicht bloß in derselben Ordnung, sondern auch in demselben Sinne aufeinander, d. h. bewegen sich zwei Punkte, die nacheinander den Umfang je einer der Figuren so durchlaufen, daß sie in gleicher Weise die einander entsprechenden Seiten nacheinander beschreiben, beide in demselben Sinne, also entweder beide in oder beide entgegengesetzt der Uhrzeigerrichtung, so lassen sich die Figuren durch bloße Verschiebung in der Ebene zur Deckung bringen (Fig. 8, 1 und 2). Folgen dagegen die entsprechenden Stücke in entgegengesetztem Sinne aufeinander, so läßt sich im allgemeinen die Deckung nicht bloß durch eine solche Verschiebung bewirken (Fig. 8, 2 und 3). Daher unterscheidet man den ersten Fall vom zweiten, und nennt in jenem die Figuren kongruent im engern Sinne, in diesem dagegen symmetrisch.

Dreht man eine Figur aus ihrer Ebene heraus so, daß die beiden Flächenseiten (die obere und die untere) ihre Lagen vertauschen, was z. B. dadurch geschehen kann, daß man die Ebene der einen Figur um eine in dieser Ebene liegende Gerade eine halbe Umdrehung machen läßt, so wird der Sinn, in dem die Stücke aufeinander folgen, entgegengesetzt dem ursprünglichen. Die eine Flächenseite einer Figur ist also der andern symmetrisch. Hiernach können auch zwei symmetrische Figuren zur Deckung gebracht werden, wenn man zuvor die Flächenseiten der einen miteinander vertauscht (also die eine Figur umwendet). Aus diesem Grunde wird im folgenden, außer wo es besonders erwähnt wird, die Symmetrie zweier Figuren nicht von der Kongruenz unterschieden.

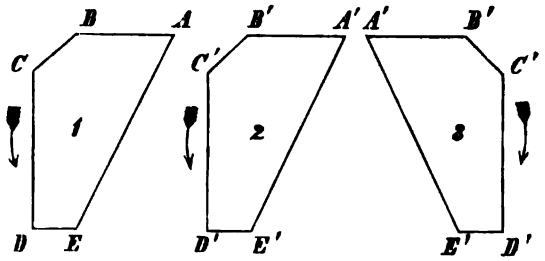


Fig. 8.

Die Gleichheit zweier Strecken, sowie die zweier Winkel wurde früher durch Aufeinanderlegen erprobt. Es ergibt sich hieraus, daß gleiche Strecken und ebenso gleiche Winkel auch kongruent sind.

§ 8. Die Winkel der geradlinigen Figuren.

1. Werden zwei Gerade AB, CD (Fig. 9) von einer dritten EF geschnitten, so entstehen acht hohle Winkel, die durch kleine griechische Buchstaben bezeichnet werden mögen, und für die zunächst die Bedingungen der Gleichheit und Ungleichheit untersucht werden sollen.

Von diesen acht Winkeln liegen vier, nämlich γ, δ, ε, ζ, zwischen den geschnittenen Linien und sollen innere Winkel genannt werden; die vier andern, α, β, η, ϑ, heißen äußere Winkel. Man kann ferner vier Winkel auf der einen Seite der schneidenden Geraden (α, γ, ε, η) und vier Winkel auf der andern Seite (β, δ, ζ, ϑ) unterscheiden.

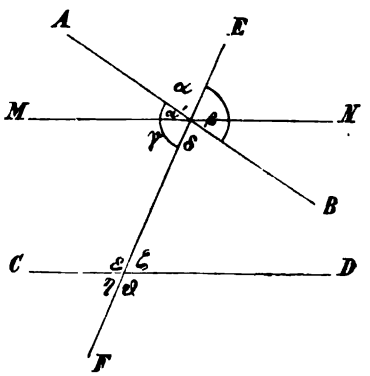


Fig. 9.

Die Beziehungen zwischen je zwei Winkeln, die an demselben Schnittpunkt liegen, sind aus dem früheren bekannt: sie sind entweder Nebenwinkel oder Scheitelwinkel. Betrachtet man dagegen einen der Winkel an dem einen Schnittpunkt mit einem der Winkel an dem andern Durchschnittspunkt als zusammengehörig, so erhält man neue Beziehungen. Die so entstehenden Winkelpaare lassen sich wie folgt gruppieren.

a) Die beiden Winkel liegen auf derselben Seite der schneidenden Geraden EF, und sind entweder gleichartig, d. h. beide äußere oder beide innere, oder sie sind ungleichartig, d. h. der eine ist ein äußerer, der andre ein innerer. Im ersten Fall heißen die Winkel Gegenwinkel im zweiten korrespondierende Winkel. Es gibt vier Paare Gegenwinkel, nämlich α und η, β und ϑ, γ und ε, δ und ζ, sowie vier Paare korrespondierende Winkel, nämlich α und ε, β und ζ, γ und η, δ und ϑ.

b) Die beiden Winkel liegen auf verschiedenen Seiten der schneidenden Geraden EF. Sie heißen Wechselwinkel, und es gibt wieder vier Paare, näm-

lich α und ϑ, β und η, γ und ζ, δ und ε, die gleichartig und vier Paare, die ungleichartig sind, wie α und ζ, β und ε, γ und ϑ, δ und η.

Sind zwei korrespondierende Winkel z. B. α und ε, einander gleich, so läßt sich das von CD und EF an ihrem Schnittpunkt gebildete Winkelkreuz so in der Ebene verschoben denken, daß der Winkel ε den Winkel α deckt. In diesem Falle muß offenbar das ganze genannte Winkelkreuz mit dem von AB und EF gebildeten so zusammenfallen, daß auch ζ und β, η und γ, ϑ und δ einander decken. Hierbei kommt ϑ in die Lage des Scheitelwinkels, dagegen kommen η und ζ in die Lage je eines Nebenwinkels von α u. s. w. Somit ergibt sich der Satz:

Werden zwei Gerade von einer dritten geschnitten und sind zwei korrespondierende Winkel einander gleich, so sind auch je zwei andre korrespondierende Winkel und je zwei Wechselwinkel einander gleich, und je zwei Gegenwinkel sind Supplemente.

Setzt man umgekehrt voraus, daß zwei Wechselwinkel, z. B. α und ϑ, einander gleich seien, oder daß die Summe zweier Gegenwinkel, z. B. α und η, zwei Rechte betrage, so kann man in gleicher Weise beide Winkelkreuze zur Deckung bringen, indem man ϑ mit dem Scheitelwinkel δ von α bezw. η mit dem Nebenwinkel γ von α zur Deckung bringt.

Ist dagegen an einem der genannten Winkelpaare die betreffende Bedingung nicht erfüllt, ist z. B. α nicht gleich ε, so kann man durch den Schnittpunkt von AB und EF eine andre Gerade MN ziehen, die an ihm zu jedem der vier bisherigen Winkel einen entsprechenden α', β', γ', δ' liefert und zwar so, daß diese die betreffenden Bedingungen erfüllen, daß also $\alpha' = \varepsilon$ und folglich auch $\beta' = \zeta$, $\gamma' = \eta$ u. s. w. ist. Da nun β' nicht gleich β ist, so kann auch β nicht gleich ζ sein u. s. w. für die übrigen Fälle. Somit ergeben sich folgende Sätze:

1) Werden zwei Gerade von einer dritten geschnitten, so sind entweder gleichzeitig a) je zwei korrespondierende Winkel gleich und b) je zwei Wechselwinkel gleich und c) je zwei Gegenwinkel zusammen gleich zwei Rechten, oder es finden diese Beziehungen gleichzeitig bei sämtlichen Winkelparen nicht statt. Ist also die betreffende Beziehung bei einem einzigen Winkelpaar erfüllt, so ist sie es auch bei jedem andern Paar, und ist sie bei einem einzigen Paar nicht erfüllt, so ist sie es auch bei keinem andern Paar.

Sind die im vorigen aufgestellten Beziehungen zwischen den Winkelpaaren erfüllt, so sind die geschnittenen Geraden parallel: Denn werden AB und CD von EF in G und H geschnitten, und sind die Wechselwinkel γ und ζ, ε und δ einander gleich, so kann man infolge dieser Gleichheit die Figur $AGHC$ so auf $BGHD$ legen, daß ε und δ, sowie γ und ζ einander decken, also HC auf GB und GA auf HD fällt. Schnitten nun die Geraden AB und CD einander auf der einen Seite von EF in einem Punkte M, so müßte bei dem Aufeinanderlegen auch M mit einem zweiten gemeinschaftlichen Punkte auf der andern Seite von EF zusammenfallen. Die Geraden AB und CD würden einander also in zwei Punkten schneiden, was unmöglich ist.

Durch diesen Lehrsatz wird zugleich die in § 4 Nr. 2 gemachte Annahme, daß parallele Gerade möglich sind, und daß sich durch jeden Punkt außerhalb einer Geraden zu dieser eine Parallele ziehen läßt, bewiesen. Die Gleichheit der Wechselwinkel hat also den Parallelismus der geschnittenen Geraden mit Notwendigkeit zur Folge; jedoch ist dadurch noch nicht bewiesen, daß umgekehrt bei parallelen Geraden die Wechselwinkel gleich sein müssen. Diese Umkehrung des im vorstehenden bewiesenen Satzes könnte als bewiesen gelten, wenn gezeigt würde, daß nur bei der Gleichheit der Wechselwinkel die geschnittenen Geraden parallel sein könnten. Der Beweis dieser Behauptung ergibt sich jedoch aus dem in § 4 Nr. 2 aufgestellten Axiom, daß sich durch einen gegebenen Punkt außer-

halb einer Geraden zu dieser nur eine Parallele ziehen läßt. Denn in diesem Falle würde die Annahme, daß AB parallel zu CD und z. B. γ nicht gleich ζ wäre, auf den Widerspruch führen, daß man durch Anlegen eines Winkels $\gamma' = \zeta$ an GH im Punkte G eine zweite durch diesen Punkt gehende Parallele zu CD erhalten könnte.

Die vorstehenden Entwicklungen lassen sich nunmehr kurz, wie folgt zusammenfassen:

2) Bei parallelen Geraden sind alle oben genannten Bedingungen für die Winkelpaare erfüllt, und umgekehrt, ist eine dieser Bedingungen erfüllt, so sind die geschnittenen Geraden parallel. Bei nicht parallelen Geraden ist keine dieser Bedingungen erfüllt und umgekehrt.

Diese Fundamentaleigenschaft paralleler Geraden kann dazu dienen, den Parallelismus zweier Geraden zu beweisen. Man schneidet sie durch eine dritte Gerade und beweist, daß zwei korrespondierende oder zwei Wechselwinkel gleich oder zwei Gegenwinkel Supplemente sind.

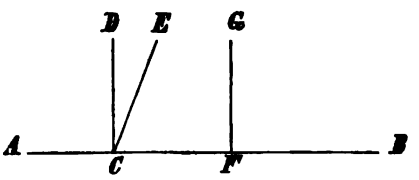


Fig. 10.

2. Hieraus ergeben sich die Folgerungen:

3) Auf einer Geraden AB läßt sich in demselben Punkte C (Fig. 10) nur eine Senkrechte errichten; denn ist CD in C senkrecht auf AB, und CE eine beliebige andre durch C gehende Gerade, so sind die Winkel ECB und DCB ungleich, also kann ECB kein rechter sein, wenn DCB ein rechter Winkel ist.

Errichtet man dagegen in jedem von zwei verschiedenen Punkten C, F einer Geraden AB auf dieser die Senkrechte, so sind die korrespondierenden Winkel GFB und DCF als rechte gleich, und somit sind:

4) Senkrechte auf derselben Geraden parallel. Dieser Satz ist gleichbedeutend mit dem folgenden:

5) Von einem Punkte außerhalb einer Geraden läßt sich auf diese nur eine einzige Senkrechte fällen.

Umgekehrt folgt: 6) Alle Geraden, die einer andern parallel sind, stehen auf jeder Geraden senkrecht, auf der diese senkrecht ist; denn dies folgt unmittelbar aus der Gleichheit der korrespondierenden Winkel.

Errichtet man dagegen auf jeder von zwei Geraden AB, CD eine Senkrechte EF und GH (Fig. 11), so ist nach dem vorigen EF zu CD senkrecht oder nicht senkrecht, je nachdem CD parallel oder nicht parallel zu AB ist. Im ersten Falle muß EF zu der andern Senkrechten GH parallel, im zweiten Falle muß EF zu GH nicht parallel sein.

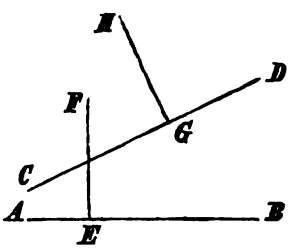


Fig. 11.

7) Senkrechte auf parallelen Geraden sind also parallel, Senkrechte auf nicht parallelen Geraden sind nicht parallel, müssen sich also schneiden.

Der vorstehende Satz läßt sich auch auf schiefe Gerade ausdehnen, welche mit parallelen oder nicht parallelen Linien in einer näher zu bestimmenden Weise gleiche Winkel bilden. Wichtiger für die späteren Anwendungen ist der umgekehrte Satz:

8) Winkel mit paarweise parallelen und gleich gerichteten Schenkeln sind gleich.

Ist nämlich $BA \parallel ED$, $BC \parallel EF$ (Fig. 12), und schneidet ED den Schenkel BC in G, so ist $\angle ABC = DGC$ als korrespondierende Winkel für die Parallelen BA

und GD, und $\angle DGC = DEF$ als korrespondierende Winkel für die Parallelen GC und EF; mithin ist auch $\angle ABC = DEF$.

Es sei ferner BI die Verlängerung von CB, BH die Verlängerung von AB. Dann ergibt die Vergleichung der Winkel IBA und IBH mit ABC die Sätze: Winkel mit parallelen Schenkeln, von denen das eine Paar gleich gerichtet, das andre Paar entgegengesetzt gerichtet ist, sind supplementär. Sind dagegen beide Paare entgegengesetzt gerichtet, so sind die Winkel einander gleich.

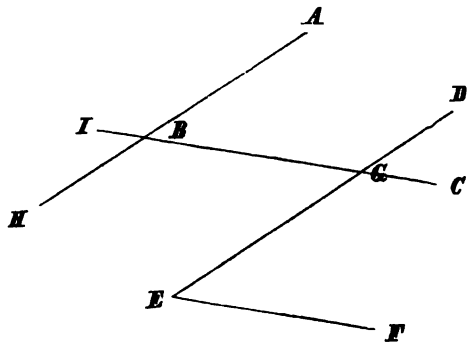


Fig. 12.

Daß in dem vorstehenden Beweise ED den Schenkel BC schneiden muß, folgt daraus, daß durch E sich außer EF keine zweite Parallele zu BC ziehen läßt. Aus diesem Axiom folgt also:

9) Gerade, die einer und derselben Geraden parallel sind, sind parallel. Schnitten nämlich zwei solche Gerade einander, so wären durch ihren Schnittpunkt zwei zu derselben dritten parallele Gerade vorhanden.

3. Werden zwei sich schneidende Gerade von einer dritten Geraden geschnitten, so entsteht ein Dreieck, und es genügt, behufs einer genaueren Kenntnis der Beziehungen zwischen den Winkeln an zwei solchen Geraden, die Eigenschaften der Winkel eines Dreiecks zu untersuchen. Der Einfachheit halber sollen im folgenden im Dreieck ABC (Fig. 13), die an den Eckpunkten A, B, C liegenden innern Winkel schematisch durch α, β, γ bezeichnet werden.

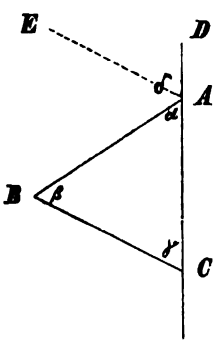


Fig. 13.

Verlängert man CA über A, so entsteht der Außenwinkel $BAD = \delta$, der Nebenwinkel von α ist. Zieht man AE parallel zu CB, so muß AE innerhalb des Winkels DAB fallen, denn fiele AE innerhalb BAC, so müßte sie den Umfang der geschlossenen Figur ABC in einem zweiten Punkte, und somit BC schneiden. Daher teilt AE den Außenwinkel in zwei Teile, und von diesen ist $\angle EAD = \gamma$ als korrespondierender, und $\angle EAB = \beta$ als Wechselwinkel an den Parallelen AE und CB. Hieraus folgt, daß

$$\angle EAD + \angle EAB = \angle DAB = \beta + \gamma$$

ist, oder der Satz:

10) Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden ihm gegenüberliegenden inneren Winkel.

Hieraus folgt, daß jeder Außenwinkel eines Dreiecks größer als jeder ihm gegenüberliegende innere Winkel, und daß die Differenz eines Außenwinkels und des einen ihm gegenüberliegenden inneren Winkels gleich dem andern gegenüberliegenden Winkel ist.

Da also $\delta = \beta + \gamma$, und da außerdem $\alpha + \delta = 2R$, so ist auch

$$\alpha + \beta + \gamma = 2R \quad ,$$

d. h.

11) Die Summe der Winkel eines Dreiecks ist gleich zwei Rechten.

Hiernach ist durch zwei Winkel eines Dreiecks der dritte bestimmt und kann, wenn jene durch Zeichnung oder durch Zahlen gegeben sind, entsprechend durch Zeichnung oder Rechnung gefunden werden. Ist z. B. $\alpha = 70^0$, $\beta = 50^0$, so ist $\gamma = 180^0 - (70^0 + 50^0) = 60^0$; ist $\beta = 15^0\,12'\,19{,}4''$ und $\gamma = 107^0\,14'\,48{,}7''$, so ist $\alpha = 179^0\,59'\,60'' - 122^0\,27'\,8{,}1'' = 57^0\,32'\,51{,}9''$.

Durch einen Winkel eines Dreiecks ist ebenso die Summe der andern bestimmt. Ist insbesondere ein Winkel eines Dreiecks ein rechter, so ist die Summe der beiden andern ebenfalls gleich einem Rechten, diese sind also spitz. Ist ein Winkel eines Dreiecks stumpf, so ist die Summe der beiden andern kleiner als ein rechter. Hiernach hat jedes Dreieck mindestens zwei spitze Winkel; der dritte kann stumpf, recht oder ebenfalls spitz sein. Man kann somit nach der Beschaffenheit der Winkel drei Arten von Dreiecken unterscheiden: ein stumpfwinkliges Dreieck hat einen stumpfen, ein rechtwinkliges einen rechten, ein spitzwinkliges nur spitze Winkel.

In einem rechtwinkligen Dreieck nennt man die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite die Hypotenuse, die ihm anliegenden Seiten die Katheten.

Durch einen der spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks ist der andre bestimmt: man findet ihn durch Rechnung, indem man den gegebenen von 90^0 subtrahiert. Die spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks sind also Komplemente.

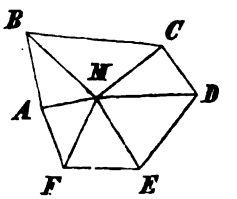


Fig. 14.

Um die Summe der Winkel eines n-Ecks zu bestimmen, verbindet man einen beliebigen Punkt M (Fig. 14) im Innern des Vielecks mit sämtlichen Eckpunkten. Hierdurch entstehen n Dreiecke, und die Gesamtsumme aller Winkel dieser Dreiecke muß $n \cdot 2R = n \cdot 180^0$ betragen. In dieser Summe sind die n Winkel, die um den angenommenen Punkt M liegen, und die zusammen $4R = 360^0$ betragen, inbegriffen. Durch Subtraktion erhält man hiernach für die Summe der Winkel des n-Ecks

$$(2n - 4)R = n \cdot 180^0 - 360^0 \ .$$

So ist die Summe der Winkel eines Vierecks $4R = 360^0$, eines Fünfecks $6R = 540^0$ u. s. w.

Bei Vielecken mit überstumpfen Winkeln kann der Fall vorkommen, daß die Annahme eines einzigen Punktes im Innern nicht genügt, um es in Dreiecke zerlegen zu können. In solchen Fällen läßt sich die Richtigkeit des vorstehenden Satzes durch entsprechende Benutzung von zwei oder mehreren solchen Punkten nachweisen. (Vgl. Fig. 15.)

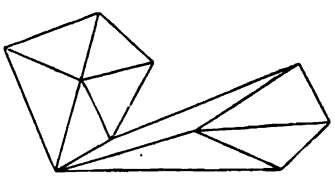


Fig. 15.

§ 9. Die Seiten der Dreiecke.

1. Nach der Beschaffenheit ihrer Seiten kann man die Dreiecke unterscheiden in solche mit drei oder zwei oder keinen gleichen Seiten. Ein Dreieck hat im allgemeinen keine gleichen Seiten, es ist ungleichseitig. Jede Seite kann man als Grundlinie des Dreiecks betrachten; der ihr gegenüberliegende Eckpunkt heißt dann Spitze des Dreiecks. Ein Dreieck mit zwei gleichen Seiten ist gleichschenklig; die gleichen Seiten heißen die Schenkel, die dritte Seite die Grundlinie oder Basis und derjenige Eckpunkt, welcher der Grundlinie gegenüberliegt, die Spitze des Dreiecks. Sind alle drei Seiten eines Dreiecks einander gleich, so ist es ein gleichseitiges. Ein solches kann als ein gleichschenkliges betrachtet werden, in dem die Basis den Schenkeln gleich ist.

Die von der Spitze eines Dreiecks auf die Grundlinie gefällte Senkrechte ist die Höhe des Dreiecks. Das Dreieck hat drei Höhen, jede steht auf einer Seite. Im gleichschenkligen Dreieck nennt man Höhe schlechtweg die auf der ungleichen Seite stehende; die Höhe auf einem Schenkel heißt Schenkelhöhe.

Jedes gleichschenklige Dreieck hat die Eigenschaft, daß seine beiden Flächenseiten nicht bloß symmetrisch, sondern auch kongruent sind. Denn denkt man

sich zu dem Dreieck ABC (Fig. 16), in dem $AB = AC$ ist, ein zweites $A'B'C'$, das mit ihm in Deckung befindlich ist, und wendet man dann ABC um, so kann man so ABC auf $A'B'C'$ legen, daß A auf A', AB in die Richtung von $A'C'$ und — da die Winkel A und A' gleich sind — AC in die Richtung von $A'B'$ fällt. Dann muß infolge der Gleichheit der Schenkel auch B auf C' und C auf B', also BC auf $C'B'$ fallen, und beide Dreiecke decken einander mithin auch in dieser Lage.

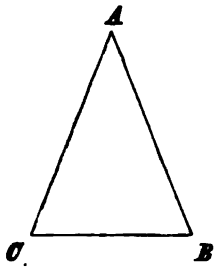


Fig. 16.

Hierbei kommt der Winkel B mit C' und C mit B' zur Deckung, woraus der Satz folgt:

1) Gleichen Seiten eines Dreiecks liegen gleiche Winkel gegenüber, oder, was dasselbe ist, die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks sind gleich.

Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes auf ein gleichseitiges Dreieck ergibt sich:

2) In jedem gleichseitigen Dreieck sind alle drei Winkel gleich.

Da ihre Summe $2R$ beträgt, so folgt hieraus weiter, daß jeder Winkel eines gleichseitigen Dreiecks $\frac{2}{3}R = 60^0$ ist.

Sind dagegen die Seiten AB, AC eines Dreiecks ungleich (Fig. 17), so fällt bei entsprechendem Verfahren, wie vorher, der Endpunkt C der kürzern Seite zwischen A' und B' und der Endpunkt B auf die Verlängerung von $A'C'$. Die Seite CB schneidet daher $C'B'$ in einem Punkte D, und der Winkel ACB ist als Außenwinkel des Dreiecks DCB' größer als der ihm gegenüberliegende innere $A'B'C'$. Hieraus folgt:

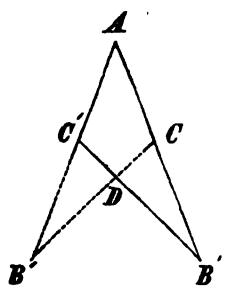


Fig. 17.

3) Der größern Seite eines Dreiecks liegt der größere Winkel gegenüber.

Demnach muß auch der größten von allen drei Seiten eines Dreiecks der größte Winkel gegenüberliegen.

4) Umgekehrt liegen gleichen Winkeln eines Dreiecks gleiche Seiten, und dem größern Winkel liegt die größere Seite gegenüber; denn die Annahme des Gegenteils widerspricht einem der vorstehenden Sätze. Ist nämlich $\angle B = C$, und wäre $AB \leqslant AC$, so müßte nach dem zweiten Satze $\angle C \leqslant \angle B$ sein; ist aber $\angle B \leqslant \angle C$, und wäre $AB = AC$, so müßte nach dem ersten Satze $\angle B = \angle C$ sein.

Daher ist auch jedes Dreieck, dessen drei Winkel einander gleich sind, ein gleichseitiges, und dem größten von allen drei Winkeln eines Dreiecks liegt die größte Seite gegenüber.

In einem rechtwinkligen Dreieck ist also die Hypotenuse die größte Seite und daher größer als jede Kathete, und in einem stumpfwinkligen Dreieck ist die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Seite die größte.

Als weitere Anwendungen des vorstehenden sind noch folgende Sätze bemerkenswert:

In jedem gleichschenkligen Dreieck ist durch einen Winkel jeder der andern bestimmt. Ist z. B. der Winkel α an der Spitze gegeben, so ist jeder der Winkel an der Grundlinie gleich der Hälfte von $180^0 - \alpha$, also gleich $90^0 - \frac{1}{2}\alpha$. Ist dagegen ein Winkel an der Basis gleich β gegeben, so ist der andre Winkel an der Basis ebenfalls gleich β und der Winkel an der Spitze gleich $180^0 - 2\beta$. — Stimmen daher zwei gleichschenklige Dreiecke in den Winkeln an der Spitze, oder in einem der Winkel an der Grundlinie überein, so stimmen sie auch in je zwei andern gleichliegenden Winkeln überein.

Ferner sind in jedem gleichschenkligen Dreieck die Winkel an der Grundlinie spitze, da kein Dreieck zwei rechte oder zwei stumpfe Winkel haben kann.

Die Außenwinkel an der Basis sind stets stumpfe Winkel. Der Außenwinkel an der Spitze ist doppelt so groß als jeder der innern Winkel an der Grundlinie. — Ein rechtwinkliges oder ein stumpfwinkliges Dreieck kann nie gleichseitig sein; es kann gleichschenklig sein, und dann ist der rechte oder stumpfe Winkel der Winkel an der Spitze. Im rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck ist jeder Winkel an der Grundlinie $\frac{1}{2}R = 45^0$.

2. Aus dem Axiom der Geraden folgt:

5) Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks ist größer als die dritte Seite. Die Seite AB des Dreiecks ABC ist der kürzeste Weg zwischen den Punkten A und B, folglich ist

$$AC + CB > AB \quad .$$

Umgekehrt ist jede Seite eines Dreiecks kleiner als die Summe der beiden andern Seiten.

Aus diesem Fundamentalsatz folgt auch, daß

$$AC + CB - CB > AB - CB \quad ,$$

also

$$AC > AB - CB \quad ,$$

ist. Eine Seite ist größer als die Differenz der beiden andern Seiten oder die Differenz zweier Seiten ist kleiner als die dritte Seite.

Verbindet man einen beliebigen im Innern eines Dreiecks liegenden Punkt D mit zwei Eckpunkten B, C des Dreiecks (Fig. 18), so schließen die Verbindungslinien einen Winkel BDC ein, der größer ist als der gegenüberliegende Winkel des Dreiecks. Denn verlängert man CD bis zum Durchschnitt mit AB in E, so ist $\angle CDB > \angle DEB$ (als Außenwinkel des Dreiecks DEB), und ebenso $\angle DEB > \angle CAB$, folglich um so mehr $\angle CDB > \angle CAB$.

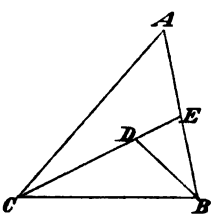


Fig. 18.

Dagegen ist die Summe der Verbindungslinien $CD + DB$ kleiner als die Summe der einschließenden Seiten $CA + AB$, denn es ist

$$CA + AE > CD + DE, \quad DE + EB > DB, \text{ mithin auch}$$
$$CA + AE + DE + EB > CD + DE + DB, \text{ und da}$$
$$DE = DE,$$
$$\text{so ist } CA + AE + EB > CD + DB, \text{ oder}$$
$$CA + AB > CD + DB.$$

§ 10. Die Kongruenzsätze.

1. Nach den Begriffen der Kongruenz und Symmetrie werden zwei Dreiecke vollständig übereinstimmen, wenn sie gleiche Seiten und gleiche Winkel haben. Sind dabei die entsprechenden Stücke in demselben Sinne angeordnet, so lassen sich die Dreiecke durch Verschiebung in der Ebene zur Deckung bringen. Ist die Anordnung der Stücke in beiden Dreiecken in entgegengesetztem Sinne, so sind die Dreiecke symmetrisch; sie lassen sich zur Deckung bringen, wenn man das eine umwendet und dann in der Ebene verschiebt. Bei der folgenden Betrachtung kann die Umwendung des einen Dreiecks schon als geschehen angenommen und Kongruenz und Symmetrie braucht nicht unterschieden zu werden.

2. Zeichnet man, um ein Dreieck ABC zu konstruieren, zunächst eine Seite AB und dann an diese in ihren Endpunkten A, B die Winkel α und β, so sieht man, daß die Längen der beiden andern Seiten AC und BC nicht mehr willkürlich angenommen werden können, sondern sich durch den Schnittpunkt C der an AB

angelegten Schenkel von selbst ergeben. Daß auch der dritte Winkel γ nicht mehr willkürlich annehmbar ist, folgt schon aus dem Satze von der Winkelsumme des Dreiecks.

Durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel sind also die übrigen Stücke des Dreiecks unzweideutig bestimmt, und daher müssen Dreiecke, die in diesen Stücken übereinstimmen, auch in den andern übereinstimmen, also kongruent sein. Somit ergibt sich der erste Kongruenzsatz:

1) Wenn zwei Dreiecke in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen, so sind sie kongruent.

Der Beweis dieses Satzes kann auch dadurch geführt werden, daß man unmittelbar zeigt, wie zwei solche Dreiecke zur Deckung gebracht werden können. Denn ist $AB = A'B'$ (Fig. 19), $\angle \alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, so denke man sich das Dreieck $A'B'C'$ so auf ABC gelegt, daß A' auf A und $A'B'$ in die Richtung von AB, also zufolge der Gleichheit von $A'B'$ und AB auch B' auf B, und daß beide Dreiecke auf dieselbe Flächenseite der gemeinschaftlichen Strecke fallen. Dann muß infolge der Gleichheit von β und β' auch $B'C'$ in die Richtung von BC, und infolge der Gleichheit von α und α' auch $A'C'$ in die Richtung von AC fallen. Da aber zwei Gerade nur einen Schnittpunkt haben, so fällt auch C' auf C, und das Dreieck $A'B'C'$ deckt mithin das Dreieck ABC.

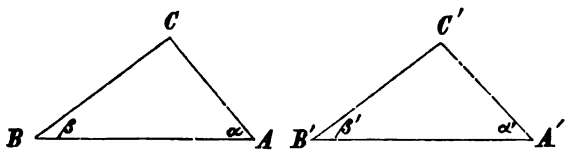


Fig. 19.

Stimmen zwei Dreiecke in einer Seite, einem ihr anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel überein, so müssen sie infolge des Satzes von der Winkelsumme des Dreiecks auch in dem andern anliegenden Winkel übereinstimmen und somit nach dem eben bewiesenen Satze kongruent sein. Man kann also den Satz 1) erweitern:

2) Wenn zwei Dreiecke in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen, so sind sie kongruent.

3. Es sei ferner angenommen, daß $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ und $\angle \alpha = \alpha'$, so kann man sich wieder das Dreieck $A'B'C'$ so auf das Dreieck ABC gelegt denken, daß A' auf A, $A'B'$ in die Richtung von AB und mithin zufolge der Gleichheit von $A'B'$ und AB auch B' auf B fällt. Dann wird wegen der Gleichheit von α' und α auch $A'C'$ in die Richtung von AC und somit, infolge der Gleichheit von $A'C'$ und AC, auch C' auf C fallen. Da nun durch die Punkte B und C die Strecke BC bestimmt ist, so fällt auch $B'C'$ auf BC, und das Dreieck $A'B'C'$ deckt also das Dreieck ABC. Somit erhält man den zweiten Kongruenzsatz:

3) Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, so sind sie kongruent.

Durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel sind also auch die drei übrigen Stücke des Dreiecks der Größe nach bestimmt. Dies läßt sich auch dadurch zeigen, daß, wenn man AB zeichnet, an AB in A den Winkel α anlegt, und dem angelegten Schenkel die bestimmte Länge AC gibt, die Verbindungslinie BC und mit ihr die Winkel an B und C nicht mehr beliebig angenommen werden können.

4. Stimmen ferner die Dreiecke ABC, $A'B'C'$ (Fig. 20) in zwei Seiten AB, $A'B'$ und AC, $A'C'$, sowie in einem der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel $\beta = \beta'$ überein, und denkt man sich wieder das Dreieck $A'B'C'$ so auf ABC gelegt, daß A' auf A, $A'B'$ in die Richtung von AB, mithin wegen der Gleichheit von $A'B'$ und AB auch B' auf B und weiterhin wegen der Gleichheit von β' und β auch $B'C'$ in die Richtung von BC fällt, so kann zunächst nicht

behauptet werden, daß auch C' auf C fallen müsse. Nimmt man nun an, $B'C'$ sei kleiner als BC, es fiele also C' zwischen B und C, etwa nach D, und mithin $A'C'$ nach AD, so müßte wegen der Gleichheit von $A'C'$ und AC auch $AD = AC$, also das Dreieck ACD gleichschenklig und folglich $\angle ACB = \angle ADC$ sein. Der Winkel BDA des Dreiecks BDA oder, was dasselbe ist, der Winkel γ' des Dreiecks $A'B'C'$ muß also in diesem Falle, wie den Winkel ADC, so auch den Winkel ACB oder γ des Dreiecks ABC zu zweiRechten ergänzen. Umgekehrt, ist $\gamma' = 180^0 - \gamma$,

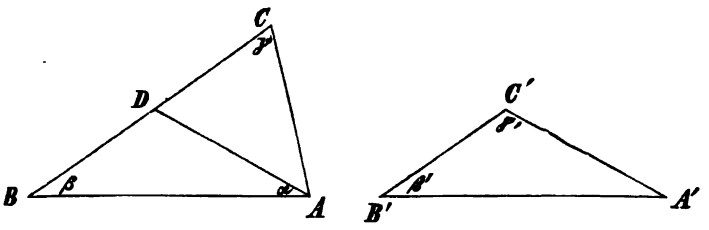


Fig. 20.

so läßt sich das Dreieck $A'B'C'$ in die Lage des Dreiecks ABD bringen. — Nimmt man dagegen an, daß $B'C' > BC$ sei, also C' auf die Verlängerung von BC falle, so kann man durch ein entsprechendes Verfahren, oder auch indem man umgekehrt ABC auf $A'B'C'$ legt, wobei derselbe Fall wie vorher eintreten muß, zeigen, daß $\gamma = 180^0 - \gamma'$ sein muß. — Aus beiden Annahmen vereinigt ergibt sich, daß, wenn γ und γ' nicht zusammen zwei Rechte betragen, C' auf C fallen, das Dreieck $A'B'C'$ also das Dreieck ABC decken muß. Somit hat man den Satz:

4) Dreiecke, die in zwei Seiten und dem der einen Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, sind kongruent, wenn die andern gegenüberliegenden Winkel nicht supplementär zueinander sind.

Selbstverständlich müssen die Dreiecke auch dann kongruent sein, wenn die andern gegenüberliegenden Winkel beide rechte sind, denn in diesem Falle sind diese nicht nur supplementär, sondern auch gleich. — Sollen Dreiecke, die in zwei Seiten und einem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, nicht kongruent sein, so muß der andre gegenüberliegende Winkel notwendig in dem einen Dreieck ein spitzer, in dem andern ein stumpfer sein, und dieses Merkmal, obgleich ungenauer als das vorher angegebene, genügt in praktischen Fällen meist zur Entscheidung der Frage. In diesem Sinne kann man den Satz 4) auch dahin fassen, daß Dreiecke kongruent sind, die in zwei Seiten und dem der einen gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, und in denen die andern gegenüberliegenden Winkel gleichartig, d. h. beide entweder spitz oder beide recht oder beide stumpf sind. — Da ferner der größern der beiden Seiten auch der größere Winkel gegenüberliegt, und ein Winkel, der einer kleinern Seite gegenüberliegt, somit notwendig ein spitzer sein muß, so kann man dem obigen Satz auch als dritten Kongruenzsatz die Fassung geben:

5) Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem der größern von ihnen gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, so sind sie kongruent.

Aus der vorstehenden Entwicklung folgt noch, daß durch zwei Seiten b, c und dem der einen gegenüberliegenden Winkel β die übrigen Stücke des Dreiecks im allgemeinen nicht völlig bestimmt sind, sondern daß, damit dies der Fall sei, noch eine weitere Bedingung, wie $b > c$, oder die schärfere $\gamma + \gamma' \gtrless 180^0$ hinzutreten muß. Ist nicht bekannt, daß diese Bedingung erfüllt sei, so sind jedoch die übrigen Stücke auch nicht völlig unbestimmt, sondern es bleibt nur die Wahl zwischen zwei Möglichkeiten, d. h. es gibt höchstens zwei nicht kongruente Dreiecke aus jenen Stücken. Man kann also sagen, das Dreieck sei in diesem Falle zweideutig bestimmt.

5. Stimmen endlich zwei Dreiecke in den drei Seiten überein, ist also (Fig. 21) $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, und denkt man sich wieder das Dreieck $A'B'C'$ so auf ABC gelegt, daß beide Dreiecke die Seite AB gemeinschaftlich haben, so kann zunächst nicht behauptet werden, daß $B'C'$ in die Richtung von BC fallen müsse. Nimmt man an, dies finde in der Tat nicht statt, sondern es falle $B'C'$ etwa nach BD, also $A'C'$ nach AD, und zieht man dann CD, so muß, da $BD = BC$ ist, das Dreieck BCD gleichschenklig, also $\angle BCD = \angle BDC$ sein. Hieraus würde folgen, daß $\angle ACD > \angle ADC$ sein müßte, da ACD um ACB größer als BCD und außerdem ADC kleiner als BDC ist. Im Dreieck ACD müßte also, da dem größern Winkel eines Dreiecks die größere Seite gegenüberliegt, $AD > AC$ sein, und somit wäre auch $A'C' > AC$. Dies widerspricht der Voraussetzung und es kann also $B'C'$ nicht in die Lage von BD fallen. — Hierbei ist in der Figur angenommen worden, daß AD die Seite BC schneidet. Diese Annahme ist die einzige gestattete, denn bei jeder andern Lage von D, wie in den Figuren 22, würde $AD + DB \gtrless AC + CB$ sein, was wieder der vorausgesetzten Gleichheit der entsprechenden Seiten widersprechen würde. Somit muß BD in die Richtung von BC und in gleicher Weise AD in die Richtung von AC fallen; die beiden Dreiecke müssen also einander decken. Man hat somit den vierten Kongruenzsatz:

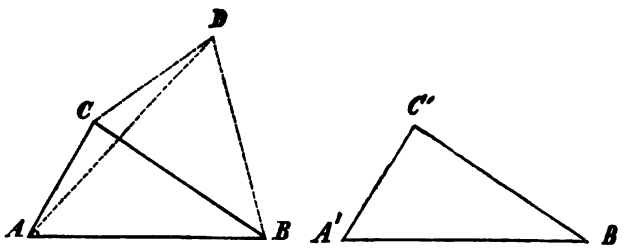


Fig. 21.

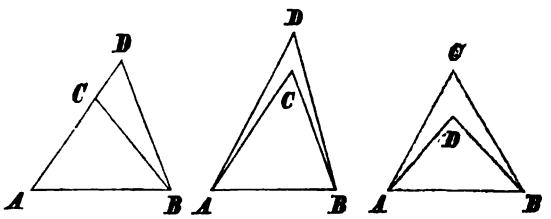


Fig. 22.

6) Wenn zwei Dreiecke in den drei Seiten übereinstimmen, so sind sie kongruent.

Durch die drei Seiten eines Dreiecks sind daher auch seine Winkel bestimmt.

§ 11. Nichtkongruenz-Sätze.

1. Die Kongruenzsätze zeigen, daß in vier Fällen drei Stücke eines Dreiecks seine Gestalt und Größe bestimmen. Aber nicht immer ist ein Dreieck durch drei Stücke bestimmt. Eine solche Ausnahme ist zunächst der Fall, in dem diese Stücke die drei Winkel sind. Daß Dreiecke, die in den drei Winkeln übereinstimmen, nicht kongruent zu sein brauchen, kann leicht gezeigt werden, wenn man in einem Dreieck ABC (Fig. 23) zu einer Seite AB eine Parallele DE zwischen den beiden andern Seiten zieht. Aus der Gleichheit der korrespondierenden Winkel folgt, daß das abgeschnittene Dreieck CDE mit dem größeren CAB in den Winkeln übereinstimmt. Diese Ausnahme erklärt sich dadurch, daß durch zwei Winkel eines Dreiecks der dritte mit bestimmt ist, daß also die drei Winkel nicht voneinander unabhängige Bestimmungsstücke sind. Eine andre Ausnahme ist der Fall, in dem zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel gegeben sind; doch ist

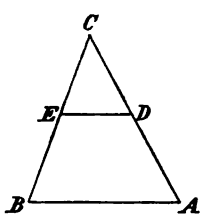


Fig. 23.

in diesem Falle das Dreieck nicht unbestimmt, sondern nur zweideutig bestimmt. Man kann hiernach die Kongruenzsätze dahin zusammenfassen: Ein Dreieck ist seiner Gestalt und Größe nach eindeutig oder zweideutig bestimmt, wenn drei Stücke unter denen sich wenigstens eine Seite befindet, gegeben sind.

Der für den vierten Kongruenzsatz gegebene Beweis zeigt außerdem unmittelbar die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten, aber nicht in dem eingeschlossenen Winkel überein, so ist die dritte Seite in dem Dreieck, das den größern eingeschlossenen Winkel hat, größer als in dem andern.

Umgekehrt muß daher auch der Satz gelten: Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten, aber nicht in der dritten Seite überein, so ist der von jenen Seiten eingeschlossene Winkel in dem Dreieck, das die größere dritte Seite hat, größer als in dem andern. Denn ist (Fig. 24) $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, aber $BC > B'C'$, so kann zunächst α nicht gleich α' sein, da in diesem Falle aus der Übereinstimmung beider Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die Kongruenz der Dreiecke, also die der Voraussetzung widersprechende Gleichheit der dritten Seiten folgen würde. Wäre aber $\alpha' > \alpha$, so müßte nach dem vorhergehenden Satz gegen die Voraussetzung, $B'C' > BC$ sein. Somit ist nur möglich, daß $\alpha > \alpha'$ ist.

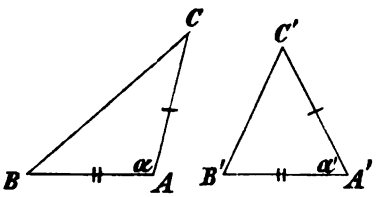


Fig. 24.

Man kann die beiden vorstehenden Sätze als Nichtkongruenz-Sätze mit den entsprechenden Kongruenzsätzen verbinden: Stimmt ein Dreieck mit einem andern in zwei Seiten überein, so ist der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel in diesem Dreieck größer, ebenso groß oder kleiner als in dem andern, je nachdem die dritte Seite des ersten größer, ebenso groß oder kleiner als die dritte Seite des zweiten ist, und umgekehrt.

2. Noch andre Nichtkongruenz-Sätze lassen sich ebenfalls im Anschluß an die Kongruenzsätze ableiten. Wir führen die nachstehenden, die später gebraucht werden, an:

Stimmt ein Dreieck mit einem andern in einer Seite und einem ihr anliegenden Winkel überein, so ist der andre anliegende Winkel in demjenigen Dreieck der größere, in dem ihm eine größere Seite gegenüberliegt, und umgekehrt. — Der Beweis kann nach Analogie des Beweises zum ersten Kongruenzsatz geführt werden.

Stimmen zwei Dreiecke in der größten Seite und in dem dieser Seite gegenüberliegenden Winkel überein, ist aber eine zweite Seite des einen Dreiecks größer als eine zweite Seite des andern, so ist die dritte Seite des ersten kleiner als die dritte Seite des zweiten. — Zum Beweise denke man sich beide Dreiecke so aneinander gelegt, daß ihre gleichen Seiten zusammenfallen, beide Dreiecke aber auf verschiedenen Flächenseiten liegen. Es seien ABC und BCD (Fig. 25) die beiden Dreiecke in dieser Lage. Ist nun $AB > BD$, und zieht man AD, so ist im Dreieck ABD der der größern Seite gegenüberliegende Winkel BDA größer als BAD. Da aber die ganzen Winkel BAC und BDC nach Voraussetzung gleich sind, so muß der Rest ADC kleiner als DAC, mithin auch in dem Dreieck ACD die Seite AC kleiner als DC sein, was zu beweisen war. — Die Forderung, daß BC die größte Seite sei, ist deshalb gestellt,

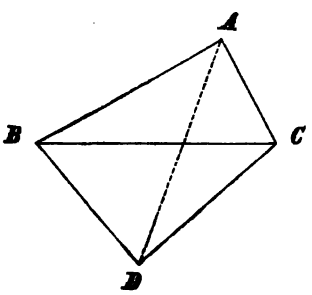


Fig. 25.

damit AD die Seite BC zwischen B und C schneiden müsse. Schnitte nämlich AD die Linie BC in C oder auf der Verlängerung über C in F, so wären die Winkel AFB, DFB entweder beide rechte, oder einer von ihnen, z. B. AFB, ein stumpfer, in beiden Fällen also $AB > BF$ und mithin auch $AB > BC$, die gestellte Forderung also nicht erfüllt, wie auch der vorstehende Beweis nicht anwendbar.

Insbesondere ist also in zwei rechtwinkligen Dreiecken mit gleichen Hypotenusen die zweite Kathete des einen größer, ebenso groß oder kleiner als die zweite des andern, je nachdem die erste Kathete des einen kleiner, ebenso groß oder größer als die erste des andern ist.

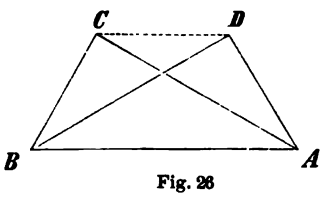


Fig. 26

Haben zwei rechtwinklige Dreiecke gleiche Hypotenusen, und ist ein Winkel des einen größer als ein Winkel des andern, so liegt dem größern Winkel eine größere Kathete gegenüber. Zum Beweise denke man sich beide Dreiecke so aufeinander gelegt, daß die gleichen Hypotenusen einander decken. Ist nun AB (Fig. 26) die gemeinschaftliche Hypotenuse und $\angle CBA > \angle DBA$, so ist — wie aus der Winkelsumme folgt — $\angle CAB < \angle DAB$, also fällt AD außerhalb des Dreiecks ABC, und BD schneidet CA. Zieht man nun CD, so ist $\angle CDA > \angle BDA$, also ein stumpfer Winkel, mithin ist im Dreieck CDA die Seite CA die größte, also auch $CA > DA$, was zu beweisen war.

§ 12. Anwendungen der Kongruenz.

1. Die vorhergehenden Sätze dieses Abschnitts bieten zunächst die nötigen Hilfsmittel für eine Untersuchung der gegenseitigen Lagen von Punkten und Geraden.

Von einem Punkte A außerhalb einer gegebenen Geraden MN (Fig. 27) lassen sich unendlich viele Verbindungslinien nach Punkten der Geraden ziehen.

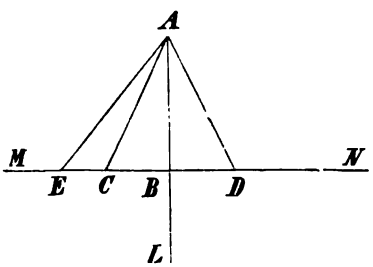


Fig. 27

1) Unter allen diesen Strecken ist die senkrechte die kürzeste; denn ist AB senkrecht und AC schief zu BC, so ist im rechtwinkligen Dreieck ABC die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite AC die größte. Die Senkrechte AB wird daher auch der Abstand oder die Entfernung des Punktes A von der Geraden MN genannt. Die Höhe eines Dreiecks ist der Abstand der Spitze von der Grundlinie.

2) Von den vom Punkte A nach der Geraden MN gehenden Strecken sind ferner je zwei, die auf verschiedenen Seiten der Senkrechten AB so liegen, daß ihre Endpunkte C, D vom Fußpunkte B der Senkrechten gleich weit abstehen, von gleicher Länge. Denn ist $BC = BD$, so stimmen die Dreiecke ABC und ABD in zwei Seiten und dem eingeschlossenen rechten Winkel überein, sind also kongruent, und mithin ist $AC = AD$.

Umgekehrt läßt sich in entsprechender Weise zeigen, daß aus der Gleichheit der Strecken AC, AD auch die der Strecken BC und BD folgt, sowie ferner, daß in diesem Falle auch die Winkel ACB und ADB gleich sind.

3) Sind dagegen die Abstände der Endpunkte zweier Verbindungslinien vom Fußpunkte der Senkrechten ungleich, so gehört zu dem größern Abstande die längere Verbindungslinie und der kleinere Winkel gegen die Gerade.

Ist nämlich $EB > CB$ und nimmt man an, daß C und E nach derselben Richtung der Geraden MN von B aus liegen — was immer erlaubt ist, da man andernfalls nur eine der beiden Strecken durch die ihr nach dem vorhergehenden Satze gleiche zu ersetzen braucht — so ist $\angle ACE$ als Außenwinkel des Dreiecks ABC größer als der ihm gegenüberliegende rechte ABC. Jener ist also ein stumpfer, und es liegt ihm also im Dreieck ACE die größte Seite gegenüber. Somit ist $AE > AC$.

Der Winkel ACB aber ist als Außenwinkel des Dreiecks ACE größer als der Winkel AEC.

Auch dieser Satz läßt sich, wie leicht zu beweisen, umkehren.

Von einem Punkte A lassen sich nach dem vorstehenden nach Punkten einer Geraden MN nie mehr als zwei Strecken von gleicher, gegebener Länge ziehen. Diese Strecken AC, AD bilden mit der Verbindungsstrecke CD ihrer Fußpunkte ein gleichschenkliges Dreieck, das durch die Senkrechte AB in zwei kongruente rechtwinklige geteilt wird. Dies führt zu Sätzen über das gleichschenklige Dreieck.

2. Fällt man in einem gleichschenkligen Dreieck ABC (Fig. 28) die Senkrechte CD von der Spitze auf die Grundlinie, so sind die Dreiecke BCD, ACD kongruent, denn es ist $BC = AC$ nach Voraussetzung, $CD = CD$ und $\angle CDB = \angle CDA$ als Rechte; die beiden Dreiecke stimmen also in zwei Seiten und dem der größern gegenüberliegenden Winkel überein. Hieraus folgt weiter, daß auch $BD = DA$ und $\angle BCD = \angle ACD$ sein muß. Da ferner nur eine einzige Gerade existieren kann, die den Winkel an der Spitze halbiert, so muß umgekehrt, wenn der Winkel BCA halbiert wird, die Halbierungslinie mit der gefällten Senkrechten identisch sein. In gleicher Weise muß die Verbindungslinie der Spitze C mit der Mitte D der Basis, und ebenso die in dem Halbierungspunkte D der Grundlinie auf dieser errichtete Senkrechte dieselbe Gerade wie vorher sein. Man kann hiernach folgende Sätze aufstellen:

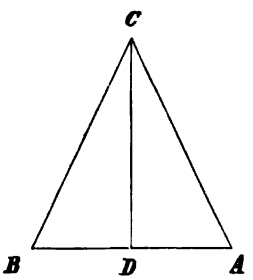


Fig. 28.

Die von der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Grundlinie gefällte Senkrechte halbiert die Grundlinie und den Winkel an der Spitze.

Die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks steht senkrecht zu der Grundlinie und halbiert diese.

Die Verbindungslinie der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks mit dem Halbierungspunkte der Grundlinie steht senkrecht zu dieser und halbiert den Winkel an der Spitze.

Die auf der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks in ihrem Halbierungspunkte senkrecht stehende Gerade geht durch die Spitze und halbiert den Winkel an der Spitze.

In einem Dreieck nennt man die Verbindungslinie einer Ecke mit dem Halbierungs- oder Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seite die Mittellinie dieser Seite. Damit kann man die Sätze zusammenfassen:

4) In einem gleichschenkligen Dreieck fallen Höhe, Mittellinie der Basis und Halbierungslinie des Winkels an der Spitze zusammen.

Aus diesem Satze folgt weiter: Die Spitzen aller gleichschenkligen Dreiecke, die eine gemeinschaftliche Basis haben, liegen auf der zur Basis in deren Halbierungspunkt senkrechten Geraden.

Verbindet man also die Spitzen zweier gleichschenkligen Dreiecke, die eine gemeinschaftliche Basis haben, miteinander, so muß die Verbindungslinie senkrecht zu der Basis stehen.

Umgekehrt haben alle Punkte der Geraden, die auf einer Strecke in ihrem Halbierungspunkte senkrecht steht, von den beiden Endpunkten dieser Strecke

gleiche Entfernungen. Punkte, die nicht auf dieser Senkrechten liegen, haben von den Endpunkten ungleiche Entfernungen.

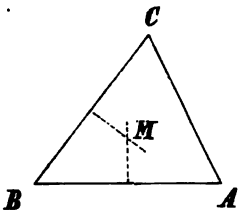


Fig. 29.

Eine gerade oder krumme Linie von der Eigenschaft, daß jeder ihrer Punkte, und außerdem kein andrer Punkt, eine gewisse Bedingung erfüllt, heißt der geometrische Ort der verlangten Punkte.

Nennt man die in dem Mittelpunkte einer Strecke auf dieser errichtete Senkrechte die Mittelsenkrechte der Strecke, so hat man den Satz:

5) Der geometrische Ort aller Punkte, die von zwei gegebenen Punkten gleich weit entfernt sind, ist die Mittelsenkrechte der Verbindungslinie der beiden Punkte.

Konstruiert man die Mittelsenkrechten der drei Seiten des Dreiecks *ABC* (Fig. 29), so müssen je zwei als Senkrechte auf nicht parallelen Geraden einander schneiden. Es sei *M* der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von *AB* und *BC*, so muß $MA = MB$ und ebenso $MB = MC$ sein; daher ist auch $MA = MC$, mithin *M* auch ein Punkt der Mittelsenkrechten von *AC*. Somit hat man den Satz:

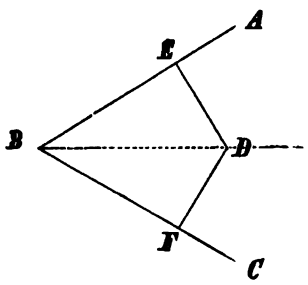


Fig. 30.

6) Die drei Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkte. Dieser Punkt ist von den drei Eckpunkten des Dreiecks gleich weit entfernt und er ist der einzige Punkt, der diese Eigenschaft hat.

3. Fällt man von einem Punkte *D* der Halbierungslinie eines Winkels *ABC* (Fig. 30) die Senkrechten *DE*, *DF* auf die Schenkel, so stimmen die Dreiecke *BED*, *BFD* in der Seite *BD*, einem anliegenden ($\angle EBD = \angle DBF$) und dem gegenüberliegenden rechten Winkel überein, sind also kongruent. Daher ist $DE = DF$.

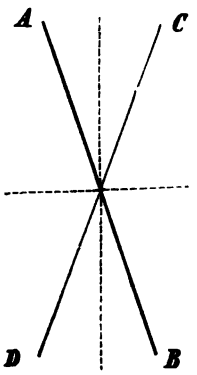


Fig. 31.

7) Jeder Punkt der Halbierungslinie eines Winkels ist also von den beiden Schenkeln gleich weit entfernt.

Umgekehrt muß jeder von den beiden Schenkeln gleich weit entfernte Punkt auf der Halbierungslinie des Winkels liegen, denn ist $DE = DF$, und sind die Winkel *BED* und *BFD* rechte, so stimmen die Dreiecke *BED*, *BFD* in zwei Seiten und dem der größern gegenüberliegenden Winkel überein, folglich müssen die Winkel *EBD*, *FBD* als entsprechende Stücke kongruenter Dreiecke gleich sein.

Soll ein Punkt von zwei einander schneidenden Geraden *AB*, *CD* gleich weit entfernt sein, so muß er hiernach auf einer der Halbierungslinien der vier von diesen Geraden gebildeten hohlen Winkel liegen. Diese vier Halbierungslinien (Fig. 31) bilden nur zwei Gerade, da jede Halbierungslinie eines Winkels auch seinen Scheitelwinkel halbieren muß, und diese Geraden stehen senkrecht aufeinander, da die Hälften zweier Nebenwinkel zusammen die Hälfte eines gestreckten Winkels betragen müssen. Man hat also den Satz:

8) Der geometrische Ort der von zwei einander schneidenden Geraden gleich weit entfernten Punkte wird von den zwei zueinander senkrechten Geraden gebildet, welche die Winkel der Geraden halbieren.

Halbiert man die drei innern Winkel eines Dreiecks ABC (Fig. 32), so müssen je zwei der Halbierungslinien einander in einem innerhalb des Dreiecks liegenden Punkte schneiden. Es sei O der Schnittpunkt der Halbierungslinien der Winkel an A und B, und von O seien auf die Seiten AB, AC, BC die Senkrechten OC', OB', OA' gefällt, so muß $OC' = OA'$ und ebenso $OC' = OB'$ sein. Mithin ist auch $OA' = OB'$, und O ist daher auch ein Punkt der Halbierungslinie des Winkels an C. Somit hat man den Satz:

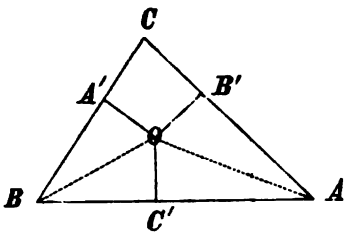


Fig. 32.

9) Die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkte. Dieser Punkt ist von allen Seiten des Dreiecks gleich weit entfernt.

Halbiert man auch die Außenwinkel des Dreiecks (Fig. 33), so findet man, daß die Halbierungslinien der Außenwinkel an je zwei Eckpunkten sich mit der Halbierungslinie des innern Winkels am dritten Eckpunkt in einem Punkte schneiden, und daß dieser Punkt von den über die Eckpunkte verlängerten Seiten gleich weit entfernt ist. Man erhält so außer dem zuerst gefundenen Punkte noch drei andre von dieser Eigenschaft; der erste ist hierbei der einzige, der innerhalb des Dreiecks liegt, und für den der Fußpunkt keiner der auf die Seiten gefällten Senkrechten auf die Verlängerung der betreffenden Seite fällt. Es gibt also vier Punkte, die von drei sich schneidenden Geraden gleich weit entfernt sind.

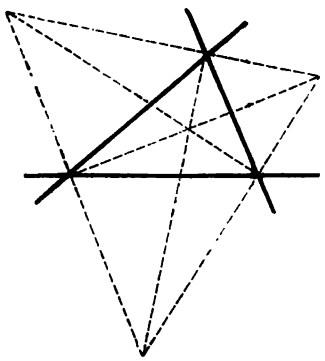


Fig. 33.

§ 13. Das Viereck.

1. Ein Viereck $ABCD$ (Fig. 34) hat zwei Paare gegenüberliegender Seiten, die keinen Eckpunkt gemeinschaftlich haben, AB und CD, BC und DA; AB und BC u. s. w. sind anstoßende Seiten. Sind beide Paare parallel, so heißt das Viereck ein Parallelogramm, hat es nur ein Paar parallele Seiten, so heißt das Viereck ein Trapez.

Zieht man in dem Parallelogramm $ABCD$ (Fig. 35), in dem $AB \parallel CD$, $BC \parallel DA$ ist, eine Diagonale AC, so stimmen die entstehenden Dreiecke ABC, ADC außer in der gemeinschaftlichen Seite AC in den ihr anliegenden Winkeln überein, weil die Winkel BAC und ACD, und ebenso ACB und DAC als Wechselwinkel an parallelen Linien gleich sind.

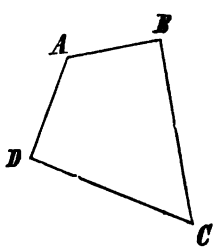


Fig. 34.

1) Ein Parallelogramm wird also durch eine Diagonale in zwei kongruente Dreiecke geteilt.

Aus dieser Haupteigenschaft des Parallelogramms folgt, daß $AB = CD$, $BC = DA$ und $\angle ABC = \angle CDA$ sein muß, weil entsprechende Stücke der kongruenten Dreiecke gleich sein müssen; man hat also den Satz bewiesen:

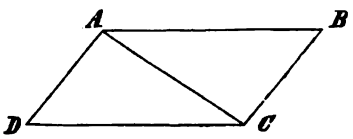


Fig. 35.

2) In einem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten und die gegenüberliegenden Winkel einander gleich.

Aus diesem Satze folgt wieder:

Schneidet man zwei Parallele durch zwei andre Parallele, so sind die Strecken des einen Paares, die zwischen dem andern Paare liegen, einander gleich oder kurz: Parallelen zwischen Parallelen sind gleich lang. Stehen insbesondere die Geraden des einen Paares auf denen des andern senkrecht, so erhält man die Eigenschaft einer Parallelen zu einer Geraden, daß jeder ihrer Punkte die gleiche Entfernung von der Geraden hat, die man den Abstand der beiden Parallelen nennen kann.

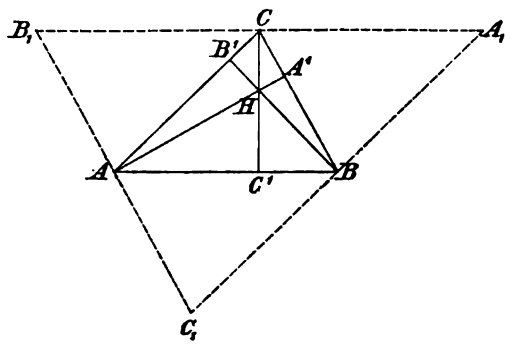


Fig. 36.

Eine Gerade ist einer andern parallel, wenn alle ihre Punkte gleich weit von der andern entfernt sind.

Zieht man durch jeden Eckpunkt eines Dreiecks ABC (Fig. 36) eine Parallele zur gegenüberliegenden Seite, so bilden sie das neue Dreieck $A_1B_1C_1$. Als Parallelen zwischen Parallelen ist aber

$$A_1C = AB = B_1C \quad ,$$

mithin ist C der Halbierungspunkt von A_1B_1; ebenso ist B der von A_1C_1 und A der von B_1C_1. Die in C auf A_1B_1 errichtete Senkrechte CC' ist also die Mittelsenkrechte von A_1B_1, zugleich aber, da sie auch senkrecht zu AB sein muß, die Höhe des Dreiecks ABC. Nun schneiden sich nach § 12 Nr. 2, 6) die Mittelsenkrechten eines Dreiecks in einem Punkte, also:

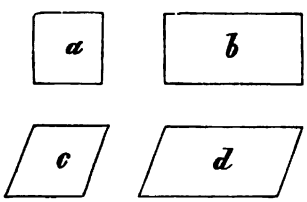


Fig. 37.

3) Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

Durch einen Winkel eines Parallelogramms sind die übrigen bestimmt; ist z. B. $\angle A = \alpha$ gegeben so ist $\angle B = 180^0 - \alpha$, $\angle C = \alpha$, $\angle D = 180^0 - \alpha$. Insbesondere folgt hieraus: Ist ein Winkel eines Parallelogramms ein rechter, so sind alle rechte; im allgemeinen sind zwei spitz und zwei stumpf. Hiernach kann man rechtwinklige Parallelogramme und schiefwinklige unterscheiden.

Sind zwei anstoßende Seiten eines Parallelogramms gleich, so sind alle vier Seiten gleich. Man kann daher gleichseitige Parallelogramme und ungleichseitige unterscheiden. Durch Verbindung dieser Einteilung mit der nach den Winkeln erhält man vier Arten von Parallelogrammen (vgl. Fig. 37),

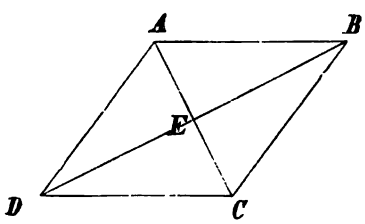


Fig. 38.

a) das rechtwinklige und gleichseitige, oder das Quadrat,
b) das rechtwinklige und ungleichseitige, oder das Rechteck,
c) das schiefwinklige und gleichseitige, oder der Rhombus (Raute),
d) das schiefwinklige und ungleichseitige.

2. Zieht man beide Diagonalen AC, BD des Parallelogramms $ABCD$ (Fig. 38), die sich in E schneiden, so entstehen vier Dreiecke, von denen je zwei gegenüberliegende, AEB, CED und ebenso AED, BEC, in einer Seite und den gleichliegenden Winkeln übereinstimmen und also kongruent sind. Aus dieser Kongruenz folgt, daß $AE = EC$, $BE = ED$ ist, oder der Satz:

4) Die Diagonalen eines Parallelogramms halbieren einander.

Ist das Parallelogramm dabei gleichseitig, also $AB = AD$, so stimmen somit auch je zwei aneinanderliegende Dreiecke wie AEB und AED in den drei Seiten überein; es sind also alle vier Dreiecke kongruent. Daher sind in diesem Falle auch die Nebenwinkel AED und AEB gleich, also rechte. Ebenso sind die Winkel DAE, BAE als entsprechende Stücke kongruenter Dreiecke gleich. Daher gilt der Satz:

5) In einem Rhombus stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander und halbieren die Winkel des Rhombus.

Ist das Parallelogramm rechtwinklig, so sind je zwei Dreiecke, die eine Seite des Parallelogramms gemeinschaftlich haben, wie ADC und BCD (Fig. 39), kongruent, denn sie stimmen in zwei Seiten und dem eingeschlossenen rechten Winkel überein. Daher ist $AC = BD$, oder:

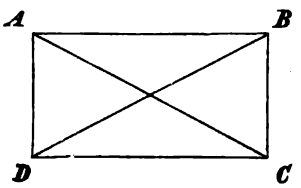


Fig. 39.

6) In einem Rechteck sind die Diagonalen gleich.

Zieht man durch den Schnittpunkt der Diagonalen eines beliebigen Parallelogramms eine Gerade und begrenzt diese durch ihre Schnittpunkte mit zwei paralelen Seiten des Parallelogramms oder deren Verlängerungen, so läßt sich mittels Kongruenz von Dreiecken beweisen,

7) daß die Strecke durch den Schnittpunkt der Diagonalen halbiert wird.

3. Die Sätze über die Winkel, Seiten und Diagonalen der Parallelogramme gestatten folgende Umkehrungen:

1) Sind in einem Viereck je zwei Gegenseiten gleich, so ist es ein Parallelogramm.

Denn ist $AB = CD$, $AD = BC$ (Fig. 40) und zieht man die Diagonale AC, so stimmen die Dreiecke ABC, ADC in den drei Seiten überein und sind also kongruent. Daher sind die Winkel BAC und DCA als entsprechende Stücke in kongruenten Dreiecken gleich und da sie Wechselwinkel an den Geraden AB und DC sind, so sind diese parallel. In gleicher Weise ergibt sich, daß die Winkel DAC und ACB gleich, und hieraus, daß auch AD und BC parallel sind.

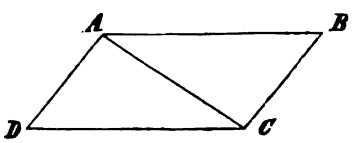


Fig. 40.

2) Sind in einem Viereck je zwei einander gegenüberliegende Winkel gleich, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

Denn ist (Fig. 40) $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$, so ist $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$, mithin jede dieser Summen gleich der Hälfte der Gesamtsumme aller vier Winkel. Diese beträgt aber in jedem Viereck $4\,R$, also ist $\angle A + \angle B = 2\,R$, und da $\angle A$ und $\angle B$ innere Gegenwinkel an den Linien AD, BC sind, so muß $AD \parallel BC$ sein. In derselben Weise läßt sich zeigen, daß auch $AB \parallel CD$ ist.

3) Sind in einem Viereck zwei Gegenseiten gleich und parallel, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

Denn ist (Fig. 40) $AB = DC$ und $AB \parallel DC$ und zieht man wieder AC, so stimmen die entstehenden Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, weil $\angle BAC$ und $\angle ACD$ als Wechselwinkel an parallelen Geraden gleich sind. Aus der Kongruenz der Dreiecke folgt, daß auch $AD \parallel BC$ ist.

Ist dagegen von einem Viereck bekannt, daß zwei Seiten parallel und die beiden andern Seiten gleich sind, so kann nicht behauptet werden, daß das Viereck notwendig ein Parallelogramm sein müsse; denn zieht man wieder eine Diagonale, so stimmen die entstehenden Dreiecke in zwei Seiten und einem

gegenüberliegenden Winkel überein, und es bleibt also die Möglichkeit bestehen, daß sie nicht kongruent sind.

4) Halbieren die Diagonalen eines Vierecks einander, so ist dieses ein Parallelogramm.

Der Beweis dieses Satzes geschieht leicht mit Hilfe der Kongruenz je zweier einander gegenüberliegender Dreiecke, die durch die Diagonalen entstehen und die in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

5) Stehen die Diagonalen eines Parallelogramms senkrecht aufeinander, so ist es ein Rhombus. Dieselbe Behauptung gilt, wenn die Diagonalen eines Parallelogramms die Winkel halbieren.

Der Beweis folgt aus der Kongruenz zweier aneinanderliegender Dreiecke, die in zwei Seiten und entweder dem eingeschlossenen rechten oder in dem der größern gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

6) Sind die Diagonalen eines Parallelogramms einander gleich, so ist es ein Rechteck.

Der Beweis folgt aus der Kongruenz zweier Dreiecke, die eine Seite des Parallelogramms gemeinschaftlich haben, und die in den drei Seiten übereinstimmen. Daher sind zwei innere Gegenwinkel an jener gemeinschaftlichen Seite einander gleich, also rechte.

Durch Verbindung dieser Umkehrungssätze mit den Sätzen in Nr. 1 ergibt sich noch folgendes:

7) Der geometrische Ort aller Punkte, die von einer gegebenen Geraden eine gegebene Entfernung haben, besteht aus den zwei Geraden, die zu ihr in dem gegebenen Abstand parallel sind.

8) Der geometrische Ort aller Punkte, die von zwei parallelen Geraden gleich weit entfernt sind, ist die zu beiden parallele Gerade, die ihren Abstand halbiert.

In einem Parallelogramm sind die Diagonalen im allgemeinen schief zueinander und teilen die Winkel in ungleiche Teile.

In einem Parallelogramm sind die Diagonalen im allgemeinen ungleich; die größere Diagonale geht durch die Scheitel der beiden spitzen Winkel.

4. Wie bereits gezeigt wurde, können in einem Viereck zwei Seiten parallel und die beiden andern gleich sein, ohne daß diese parallel zu sein brauchen. Man erhält ein solches gleichschenkliges Trapez, wenn man an eine Seite BE eines Parallelogramms $ABED$ (Fig. 41) in der der Forderung entsprechenden Weise das gleichschenklige Dreieck BEC anlegt.

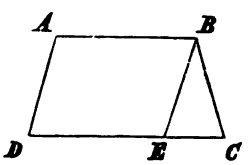


Fig. 41.

Das gleichschenklige Trapez $ABCD$ (Fig. 41) läßt sich in ein Parallelogramm und ein gleichschenkliges Dreieck zerlegen, denn ist $AB \parallel DC$, $AD = BC$ und zieht man BE parallel zu AD bis zum Schnittpunkt E mit DC, so ist $ABED$ ein Parallelogramm, mithin $BE = AD$, und somit BE auch gleich BC, also BEC ein gleichschenkliges Dreieck.

Hieraus folgt weiter, daß $\angle BEC = \angle BCE$, und da $\angle BEC = \angle ADE$ sein muß (als korrespondierender an Parallelen), so ist auch $\angle BCD = \angle ADC$. Ferner betragen die Gegenwinkel an den parallelen Trapezseiten, also BAD und ADC, und ebenso ABC und BCD zusammen zwei Rechte. Nach Abzug der gleichen Winkel an D und C von je zwei Rechten bleiben daher auch für die beiden andern Winkel des Trapezes gleiche Werte übrig. Somit gilt der Satz:

1) In einem gleichschenkligen Trapez sind die an einer der parallelen Seiten liegenden Winkel gleich. An der größern liegen spitze, an der kleinern die stumpfen Supplemente.

Zieht man ferner in dem gleichschenkligen Trapez $ABCD$ die Diagonalen AC, BD (Fig. 42), so sind die Dreiecke ADC, BCD kongruent, da $DC = DC$, $AD = BC$, $\angle ADC = \angle BCD$ ist. Hieraus folgt:

2) Die Diagonalen eines gleichschenkligen Trapezes sind gleich.

Wie von den beiden vorstehenden Sätzen richtige Umkehrungen gebildet und bewiesen werden können, bedarf keiner näheren Erörterung.

Ein Trapez wird im allgemeinen durch die Parallele zu einer nichtparallelen Seite, die durch den Endpunkt einer parallelen Seite gezogen wird, in ein Parallelogramm und ein ungleichseitiges Dreieck zerlegt.

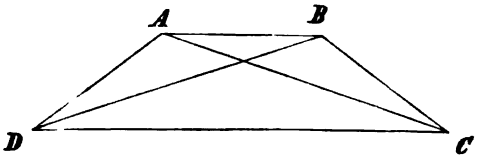


Fig. 42.

Zieht man in einem beliebigen Trapez durch den Halbierungspunkt einer der nicht parallelen Seiten die Parallele zu den parallelen Seiten, so muß diese die andre nicht parallele Seite ebenfalls halbieren. Denn ist $AB \parallel EF \parallel DC$ (Fig. 43) und $AE = ED$, und zieht man $BG \parallel AE$ bis zum Durchschnitt mit EF und $FH \parallel ED$ bis zum Durchschnitt mit DC, so ist $BG = AE$ und $FH = ED$ (als Parallele zwischen Parallelen), mithin auch $BG = FH$. Da ferner die Winkel BFG und FCH und ebenso die Winkel FBG und CFH als korrespondierende an Parallelen gleich sind, so sind die Dreiecke BGF und FHC kongruent, und mithin die entsprechenden Seiten BF und FC einander gleich.

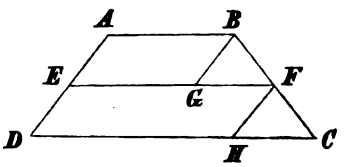


Fig. 43.

Umgekehrt muß die Verbindungslinie der Halbierungspunkte der nicht parallelen Seiten eines Trapezes den parallelen Seiten parallel sein, denn aus der Annahme des Gegenteils würde folgen, daß die durch E zu AB und DC gezogene, von der Verbindungslinie EF verschiedene Parallele die Seite BC in einem zweiten Halbierungspunkte treffen müßte, was nicht möglich ist.

Die Gerade EF, die somit die doppelte Eigenschaft hat, daß sie die nicht parallelen Seiten des Trapezes halbiert und den parallelen Seiten parallel ist, heißt die Mittelparallele des Trapezes.

Aus der Kongruenz der Dreiecke BGF und FHC folgt noch, daß auch $GF = HC$ ist. Da nun $EG = AB$, $DH = EF$ (als Parallele zwischen Parallelen), so ist $EF - AB = DC - EF$, oder wenn man $AB = a$, $DC = b$ und $EF = m$ setzt,

$$m - a = b - m, \quad 2m = a + b, \quad m = \frac{a+b}{2}.$$

Die Hälfte der Summe zweier Größen heißt ihr arithmetisches Mittel. Man kann daher den Satz aufstellen:

3) Die Mittelparallele eines Trapezes ist das arithmetische Mittel der beiden parallelen Seiten.

Die vorstehenden Sätze gelten auch dann, wenn die kleinere parallele Seite des Trapezes infolge stetiger Abnahme schließlich verschwindet, in welchem Falle sich das Trapez auf ein Dreieck reduziert. Die Beweise bleiben im wesentlichen unverändert; der einzige Unterschied besteht darin, daß BG mit AE zusammenfällt, also nicht konstruiert zu werden braucht. Die Verbindungslinie der Halbierungspunkte zweier Seiten eines Dreiecks ist also der dritten Seite parallel und halb so groß als diese.

Die vorstehenden Sätze erleiden ferner keine Ausnahme, wenn die nicht parallelen Seiten des Trapezes durch parallele ersetzt werden, das Trapez also zu einem Parallelogramm wird; die Beweise werden in diesem Falle nur wesentlich vereinfacht, indem BF und FC bezüglich mit BG und FH zusammenfallen.

Durch eine noch weitergehende Verallgemeinerung führt die vorstehende Untersuchung zur Aufstellung folgender Sätze:

4) Sind auf einer von zwei Geraden beliebig gleiche Strecken AB, CD, DE, . . . (Fig. 44) abgetragen und durch ihre Endpunkte nach beliebiger Richtung unter sich Parallelen gezogen, welche die andre Gerade schneiden, so sind auch die auf dieser abgeschnittenen Strecken, die mit je einer der Strecken AB, CD, DE, . . . zwischen denselben Parallelen liegen, einander gleich.

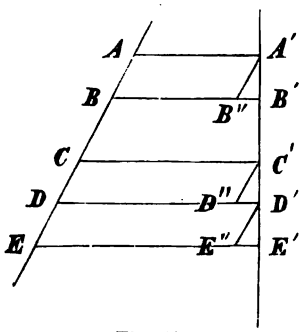


Fig. 44.

Zum Beweise ziehe man, wenn die gegebenen Geraden nicht parallel sind, die Parallelen $A'B''$, $C'D''$, $D'E''$ u. s. w. zu AB, CD, DE u. s. w. und benutze ebenso, wie bei dem obigen einfachsten Fall dieses Satzes für ein Trapez, die Kongruenz der Dreiecke $A'B'B''$, $C'D'D''$, $D'E'E''$ u. s. w. Sind dagegen die gegebenen Geraden selbst parallel, so folgt die Richtigkeit des Satzes ohne weiteres daraus, daß die Strecken $A'B'$, $C'D'$ u. s. w. den Strecken AB, CD u. s. w. als Parallele zwischen Parallelen gleich sind. — Geht eine der parallelen Geraden AA' u. s. w. durch den Schnittpunkt der beiden ersten Geraden, so gilt dieser Punkt für beide Gerade zugleich, ohne daß eine wesentliche Änderung des Beweises eintritt; liegt der Schnittpunkt S zwischen zweien der Parallelen CC' und DD' (Fig. 45), so bleibt der Beweis ebenfalls im wesentlichen derselbe, nur trifft die durch C' zu CD gezogene Parallele $C'D''$ die Gerade DD' auf ihrer Verlängerung über D.

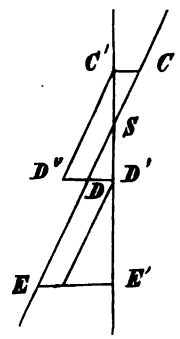


Fig. 45.

§ 14. Die Kongruenz der Vielecke.

Ein Vieleck kann auf verschiedene Arten, z. B. durch die von einem Eckpunkt ausgehenden Diagonalen oder durch Verbindung eines im Innern gelegenen Punktes mit allen Eckpunkten, in Dreiecke zerlegt werden (vgl. § 8 Nr. 3).

Ist jedes von zwei n-Ecken in n Dreiecke zerlegt, ist ferner jedes der Dreiecke des einen einem entsprechenden Dreiecke des andern kongruent, und liegen endlich diese kongruenten Dreiecke in beiden Vielecken in demselben Sinne aneinander, so können die beiden Vielecke so aufeinander gelegt werden, daß jedes Dreieck des einen das ihm entsprechende des andern, und daß somit die Vielecke selbst einander decken. Mithin sind diese kongruent. In der Zerlegung in kongruente Dreiecke ist somit ein Mittel gegeben, um die Kongruenz von Vielecken zu beweisen.

Jedes n-Eck läßt sich durch eine Diagonale in ein $(n - 1)$-Eck und ein Dreieck zerlegen. Sind die Stücke des n-Ecks, die zur Bestimmung des $(n - 1)$-Ecks erforderlich sind, gegeben, so ist mit diesem auch eine Seite des Dreiecks bestimmt. Man bedarf also nur noch zweier Bestimmungsstücke des Dreiecks, um auch dieses und somit das n-Eck selbst zu bestimmen. Somit ergibt sich, daß man zur Bestimmung eines n-Ecks zwei voneinander unabhängige Stücke mehr braucht, als zur Bestimmung eines $(n - 1)$-Ecks. Da nun ein Dreieck im allgemeinen durch drei Stücke bestimmt ist, so beträgt die Anzahl der erforderlichen Bestimmungsstücke bei einem Viereck 5, bei einem Sechseck 7, u. s. w., allgemein bei einem n-Eck: $2n - 3$. Es sind also im allgemeinen je drei Stücke eines n-Ecks durch die $2n - 3$ übrigen bestimmt. Diese müssen voneinander unabhängig sein und dürfen daher z. B. nicht alle n Winkel des Vielecks enthalten.

Ein solches Bestimmungsstück kann durch eine anderweite Bedingung für Stücke des Vielecks ersetzt werden, wie z. B. durch die, daß zwei bestimmte Seiten

einander parallel sein sollen. Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich u. a. aus den folgenden besondern Fällen:

Parallelogramme, die in zwei anstoßenden Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, sind kongruent. Der Beweis dieses Satzes kann sowohl durch Zerlegung der Parallelogramme in kongruente Dreiecke, als auch unmittelbar durch Deckung geführt werden.

Ein Parallelogramm kann also schon durch drei voneinander unabhängige Stücke bestimmt werden, während für ein Viereck im allgemeinen fünf Bestimmungsstücke nötig sind. Dies rührt offenbar daher, daß die Bedingungen des Parallelismus je zweier Gegenseiten die fehlenden Bestimmungsstücke ersetzt.

Ein Parallelogramm ist im allgemeinen bestimmt, wenn eins der beiden kongruenten Dreiecke bestimmt ist, in die das Parallelogramm durch eine Diagonale zerlegt wird.

Ein Rechteck ist durch zwei anstoßende Seiten, ein Rhombus durch eine Seite und einen Winkel, ein Quadrat durch eine Seite bestimmt. — Nimmt man, wie bei dem Parallelogramm überhaupt, die Diagonalen und die von ihnen mit den Seiten und unter sich gebildeten Winkel unter die Bestimmungsstücke auf, so ist ein Rechteck und ebenso ein Rhombus im allgemeinen durch zwei voneinander unabhängige Stücke, ein Quadrat durch ein (nicht, wie die betreffenden Winkel, ohnedies bekanntes) Stück bestimmt.

Ein gleichschenkliges Trapez ist durch drei, ein Trapez im allgemeinen durch vier Stücke bestimmt.

§ 15. Kreis, Punkt und Gerade.

1. Ein Punkt kann innerhalb der von einem Kreise eingeschlossenen Fläche oder außerhalb dieser Fläche oder auf dem Kreise selbst liegen. Der Kürze halber sagt man in den beiden ersten Fällen, der Punkt liege innerhalb oder außerhalb des Kreises. Überhaupt wird, wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist, das Wort Kreis sowohl für die Kreisfläche als auch für die Kreislinie, d. h. den Umfang oder die Peripherie der Kreisfläche gebraucht.

Aus der Erklärung des Kreises folgt unmittelbar: Je nachdem ein Punkt innerhalb eines Kreises, auf dem Kreise oder außerhalb des Kreises liegt, ist sein Abstand vom Mittelpunkt kleiner, ebenso groß oder größer als der Radius des Kreises. Umgekehrt, je nachdem der Abstand eines Punktes vom Mittelpunkt eines Kreises kleiner, ebenso groß oder größer als der Radius ist, liegt der Punkt innerhalb des, auf der Peripherie des oder außerhalb des Kreises.

Hieraus ergeben sich folgende Sätze:

1) Kreise mit gleichen Radien sind kongruent, denn sie lassen sich zur Deckung bringen, indem man sie so aufeinander legt, daß ihre Mittelpunkte zusammenfallen. Fiele nämlich hierbei irgend ein Punkt des einen Kreises nicht auf einen entsprechenden Punkt des andern, so müßte er außerhalb oder innerhalb dieses Kreises liegen, und in diesem Falle könnte sein Abstand vom gemeinschaftlichen Mittelpunkt nicht gleich dem gemeinschaftlichen Radius sein.

Ebenso wie die Kreise, sind zufolge dieses Beweises die von ihnen begrenzten Kreisflächen kongruent. — Umgekehrt ist von zwei Kreisflächen mit ungleichen Radien diejenige größer als die andre, die den größern Radius hat. Alle Kreise sind ähnlich; gleiche Kreise sind auch kongruent.

2) Jeder Durchmesser eines Kreises teilt diesen und die zugehörige Kreisfläche in zwei kongruente Teile. Der Beweis kann in gleicher Weise, wie der des vorigen Satzes, durch Deckung geführt werden.

Man nennt jeden der beiden gleichen Teile eines Kreises einen Halbkreis.

Zu jeder Sehne eines Kreises gehören zwei durch sie begrenzte Bogen des Kreises. Diese Bogen sind nach dem vorstehenden einander gleich, wenn die Sehne ein Durchmesser ist: dagegen sind sie in jedem andern Fall ungleich.

Verbindet man die Endpunkte eines Bogens mit dem Mittelpunkt, so begrenzen die beiden verbindenden Radien mit dem Bogen einen Teil der Kreisfläche, der Sektor oder Kreisausschnitt genannt wird. Derjenige Teil einer Kreisfläche, der von einem Bogen und der zugehörigen Sehne begrenzt wird, heißt ein Segment oder Kreisabschnitt. Jeder Winkel, dessen Scheitel der Mittelpunkt ist, dessen Schenkel also zwei Radien sind, heißt ein Centriwinkel. Zu jedem Centriwinkel α (Fig. 46) gehört ein bestimmter, zwischen seinen Schenkeln liegender Bogen AB, eine bestimmte Sehne AB, ein bestimmter Sektor ACB und ein bestimmtes Segment. Ist der Centriwinkel ein gestreckter, so wird der Bogen ein Halbkreis, die Sehne ein Durchmesser, und Sektor und Segment werden beide zur Halbkreisfläche. — Ebenso gehört zu jedem Bogen AB ein bestimmter Centriwinkel α, eine bestimmte Sehne AB u. s. w. Dagegen gehören zu jeder Sehne AB, wie zwei im allgemeinen verschiedene Bogen, so auch zwei Centriwinkel, zwei Sektoren und zwei Segmente. Die beiden Centriwinkel betragen zusammen vier Rechte, daher ist im allgemeinen der eine hohl (spitz oder stumpf), der andre erhaben (überstumpf). Die beiden Sektoren und ebenso die beiden Segmente bilden zusammen die ganze Kreisfläche. Durch Deckung kann, entsprechend wie in den vorhergehenden Sätzen, bewiesen werden:

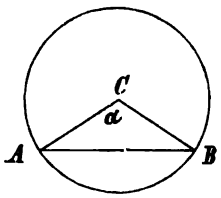


Fig. 46.

3) Zu gleichen Centriwinkeln gehören in demselben Kreise oder in gleichen Kreisen gleiche Bogen, gleiche Sehnen, gleiche Sektoren und gleiche Segmente.

Umgekehrt gehören zu gleichen Bogen gleiche Centriwinkel, gleiche Sehnen u. s. w., und zu gleichen Sehnen gehören gleiche hohle und gleiche erhabene Centriwinkel, gleiche Bogen, die kleiner als ein Halbkreis, und gleiche Bogen, die größer als ein Halbkreis sind u. s. w.

Gleiche Bogen desselben Kreises oder gleicher Kreise, und ebenso gleiche Sektoren und Segmente sind kongruent.

2. Fällt man vom Mittelpunkt eines Kreises auf eine Gerade die Senkrechte, so sind alle Punkte der Geraden, die nicht der Fußpunkt der Senkrechten sind, vom Mittelpunkt des Kreises weiter entfernt als dieser Fußpunkt (vgl. § 12 Nr. 1, 1)). Hieraus folgt:

Ist der Abstand einer Geraden vom Mittelpunkt eines Kreises größer als der Radius, so liegen alle Punkte der Geraden außerhalb des Kreises; ist der Abstand gleich dem Radius, so hat die Gerade mit dem Kreise einen einzigen Punkt gemeinsam, und alle andern Punkte der Geraden liegen außerhalb des Kreises; ist endlich jener Abstand kleiner als der Radius, so geht die Gerade durch einen Punkt im Innern des Kreises. Im ersten Falle sagt man, die Gerade meidet, im zweiten, die Gerade berührt den Kreis, im dritten, sie schneidet den Kreis. Eine Gerade, die einen Kreis berührt, heißt eine Tangente des Kreises, und der beiden Linien gemeinschaftliche Punkt heißt der Berührungspunkt. Eine Gerade, die einen Kreis schneidet, heißt eine Sekante, und jeder gemeinschaftliche Punkt beider Linien heißt ein Schnittpunkt.

Da der Kreis eine geschlossene Figur ist, so muß eine unendliche Gerade, die durch einen Punkt im Innern des Kreises geht, die begrenzende Linie in mindestens zwei Punkten schneiden: denn denkt man sich die Gerade durch einen bewegten Punkt beschrieben, so muß dieser an der Stelle eines Schnittpunktes ins Innere der Figur ein-, und an der Stelle eines andern aus ihr austreten. Es seien A und B (Fig. 47) diese beiden Schnittpunkte einer Sekante, C der Fußpunkt der vom Mittelpunkt M des Kreises auf die Sekante gefällten Senkrechten, so ist $MA = MB$. Verbindet man einen Punkt der Sekante zwischen A und B mit M, so ist die Verbindungslinie kürzer als der Radius: verbindet man dagegen einen Punkt der Sekante, der weiter von C entfernt ist, als

A oder B, mit M, so ist die Verbindungslinie länger als der Radius. Demnach kann eine gerade Linie einen Kreis nicht in mehr als zwei Punkten schneiden. Alle zwischen diesen Schnittpunkten liegenden Punkte der Sekante liegen innerhalb, alle andern außerhalb des Kreises. Drei Punkte eines Kreises können niemals auf derselben Geraden liegen, kein Teil des Kreises kann also gerade sein, oder der Kreis ist eine krumme Linie.

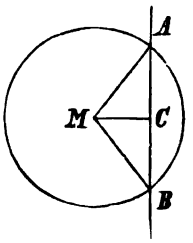


Fig. 47.

Jede Sekante hat nach dem vorstehenden mit dem Kreise eine Sehne gemeinsam. Verbindet man die Endpunkte A, B einer Sehne mit dem Mittelpunkte M des Kreises, so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck. Durch Anwendung der Sätze des § 12 Nr. 2 auf dieses und entsprechende Erweiterung oder Umkehrung erhält man folgende Sätze über Sehnen:

1) Die vom Mittelpunkt auf eine Sehne gefällte Senkrechte halbiert die Sehne und die zu ihr gehörigen Centriwinkel. Daher halbiert sie oder ihre Verlängerung auch die beiden zur Sehne gehörigen Bogen.

2) Der durch den Halbierungspunkt einer Sehne gehende Durchmesser steht senkrecht zur Sehne und halbiert die zugehörigen Centriwinkel und Bogen.

3) Die Halbierungslinie eines Centriwinkels steht senkrecht auf der zu ihm gehörigen Sehne und halbiert diese sowie die zugehörigen Bogen.

4) Die auf einer Sehne in ihrem Halbierungspunkt senkrechte Gerade geht durch den Mittelpunkt des Kreises u. s. w.

5) Der Durchmesser, der einen Bogen halbiert, halbiert auch die zugehörige Sehne und steht senkrecht auf ihr u. s. w.

6) Die durch den Halbierungspunkt eines Bogens und den Halbierungspunkt der zugehörigen Sehne gehende Gerade geht auch durch den Mittelpunkt und steht senkrecht auf der Sehne u. s. w.

7) Dasselbe gilt von der Verbindungslinie der Halbierungspunkte der beiden Bogen, die zu derselben Sehne gehören.

8) Die vom Halbierungspunkt eines Bogens auf die zugehörige Sehne gefällte Senkrechte geht durch den Mittelpunkt u. s. w

9) Ist ein Punkt von drei Punkten eines Kreises gleich weit entfernt, so ist er der Mittelpunkt. Denn sind A, B, C jene Punkte, so müssen die Mittelsenkrechten der Sehnen AB, BC beide einander nach 4) im Mittelpunkt, aber auch beide nach § 12 Nr. 2 in dem gleich weit von A, B und C entfernten Punkte schneiden.

10) Durch drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, läßt sich ein Kreis legen.

11) Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die eine gemeinschaftliche Sehne haben, die also durch dieselben zwei Punkte gehen, ist die Mittelsenkrechte dieser Sehne.

3. Es seien ferner AB, CD zwei Sehnen eines Kreises und M der Mittelpunkt (Fig 48). Fällt man von M die Senkrechten ME, MF auf AB und CD und zieht MA und MC, so entstehen die rechtwinkligen Dreiecke MEA und MFC, deren Hypotenusen als Radien gleich sind. Sind nun die Sehnen AB, CD, und also auch ihre Hälften gleich, so sind diese Dreiecke kongruent, und mithin ist auch $ME = MF$. Ist umgekehrt bekannt, daß $ME = MF$ ist, so sind wieder die Dreiecke kongruent, woraus $AB = CD$ folgt. Ist dagegen eins der Kathetenpaare ungleich, so ist die andre Kathete in dem Dreieck die größere, in dem die erste die kleinere ist (vgl. § 11 Nr. 2).

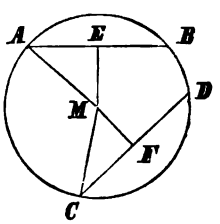


Fig. 48.

Somit hat man die Sätze:

12) Gleiche Sehnen eines Kreises oder gleicher Kreise haben gleiche Abstände vom Mittelpunkt, und umgekehrt, Sehnen, die gleiche Abstände vom Mittelpunkt haben, sind gleich.

13) Von zwei ungleichen Sehnen hat die größere den kleineren Abstand vom Mittelpunkt, und umgekehrt, je kleiner der Abstand einer Sehne vom Mittelpunkt, desto größer ist die Sehne.

Daher ist der Durchmesser größer als jede nicht durch den Mittelpunkt gehende Sehne. — Streng genommen findet der vorstehende Beweis auf diesen besondern Fall keine Anwendung, da für einen Durchmesser AB von keinem Dreieck MEA die Rede sein kann. Man kann den Beweis dadurch führen, daß man die beiden Endpunkte der Sehne CD mit dem Mittelpunkt M verbindet; dann ist im Dreieck MCD die Summe der Seiten MC und MD größer als die dritte Seite CD; da aber der Durchmesser $AB = MC + MD$, so ist auch $AB > CD$. Der Durchmesser ist also die größte Sehne des Kreises.

Eine kleinste Sehne eines Kreises gibt es nicht. Läßt man eine Sekante sich so bewegen, daß ihr Abstand vom Mittelpunkt stetig kleiner wird, so wird die zugehörige Sehne ebenfalls stetig kleiner und verschwindet, indem sie sich auf einen Punkt reduziert, wenn der Abstand der bewegten Geraden vom Mittelpunkt gleich dem Radius wird. Die Sekante wird in diesem Falle zu einer Tangente. In diesem Sinne kann man eine Tangente als eine Sekante betrachten, deren beide Schnittpunkte mit dem Kreise in **einen** Punkt zusammengefallen sind.

4. Die fundamentalen Sätze über Tangenten des Kreises knüpfen sich an den in Nr. 2 bewiesenen Satz, der sich auch, wie folgt, aussprechen läßt:

1) Eine Gerade, die auf einem Radius in seinem auf der Peripherie liegenden Endpunkte senkrecht steht, berührt den Kreis in diesem Punkte.

Dieser Satz gestattet zunächst folgende Umkehrungen:

2) Eine Tangente eines Kreises steht senkrecht auf dem durch ihren Berührungspunkt gezogenen Radius. Ist nämlich eine Gerade AB auf einem Radius MC in C schief, so muß die vom Mittelpunkt M auf AB gefällte Senkrechte kleiner als der Radius MC sein, und somit muß AB den Kreis schneiden.

Daher läßt sich durch einen Punkt eines Kreises nur eine Tangente an diesen legen.

Da ferner nur eine einzige Senkrechte vom Mittelpunkt auf die Tangente möglich ist, so folgt umgekehrt:

3) Die vom Mittelpunkt auf eine Tangente gefällte Senkrechte trifft diese in ihrem Berührungspunkt und

4) Die auf einer Tangente in ihrem Berührungspunkt errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunkt.

Zieht man an einen Kreis zwei Tangenten, so können diese nur dann parallel sein, wenn die nach ihren Berührungspunkten gezogenen Radien in eine Gerade fallen, und umgekehrt: die an den Endpunkten eines Durchmessers an den Kreis gelegten Tangenten sind parallel.

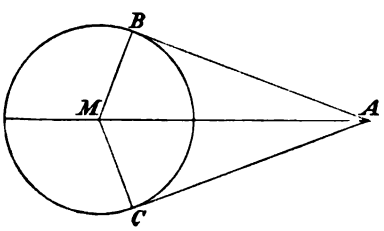


Fig. 49.

Zwei Tangenten, deren Berührungspunkte nicht Endpunkte desselben Durchmessers sind, schneiden einander in einem außerhalb des Kreises liegenden Punkte. Umgekehrt lassen sich von jedem außerhalb eines Kreises liegenden Punkte zwei Tangenten an den Kreis legen: denn ist A jener Punkt und M der Mittelpunkt des Kreises (Fig. 49), und läßt man die durch A und M gehende Sekante sich um A drehen, so erhält sie bei gleichen Winkeln mit ihrer ursprünglichen Lage AM gleiche Abstände vom Mittelpunkt (denn die betreffenden rechtwinkligen Dreiecke sind kongruent), dagegen bei verschiedenen Winkeln zufolge der Nichtkongruenz der

betreffenden rechtwinkligen Dreiecke auch verschiedene Abstände, und zwar wächst der Abstand stetig bei stetig wachsendem Winkel. Es gibt daher auf jeder Seite von AM nur eine Lage der Sekante, bei der ihr Abstand vom Mittelpunkt gleich dem Radius ist, sie selbst also zur Tangente wird.

Sind AB und AC die beiden von A an den Kreis M gelegten Tangenten, so stimmen die Dreiecke ABM und ACM außer in den Radien MB, MC und der gemeinschaftlichen Seite AM auch in den rechten Winkeln bei B und C überein und sind also kongruent. Hieraus folgt:

5) Die beiden von einem Punkt an einen Kreis gelegten Tangenten sind (von diesem Punkt bis zu den Berührungspunkten gerechnet) gleich lang.

6) Der Winkel der beiden von demselben Punkt an einen Kreis gelegten Tangenten wird durch die Verbindungslinie des Punktes mit dem Mittelpunkt halbiert.

Dasselbe gilt von dem Winkel, den die beiden nach den Berührungspunkten gezogenen Radien miteinander bilden.

Umgekehrt liegt der Mittelpunkt eines Kreises, der die Schenkel eines Winkels berührt, auf der Halbierungslinie dieses Winkels, oder

7) Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die zwei einander schneidende Gerade berühren, wird von den Halbierungslinien der Winkel dieser Geraden gebildet.

Wir fügen diesem Satze noch die folgenden hinzu, die sich leicht aus den vorhergegangenen Sätzen beweisen lassen:

Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die zwei Parallele berühren, ist die parallele Gerade, die den Abstand der beiden Parallelen halbiert.

Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die eine Gerade in einem ihrer Punkte berühren, ist die Senkrechte in diesem Punkt auf der Geraden.

Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise mit demselben Radius, die eine Gerade berühren, besteht aus den beiden Parallelen, deren Abstand von dieser Geraden gleich dem Radius ist.

§ 16. Kreis und Winkel.

1. Ein Winkel, dessen Scheitel auf der Peripherie eines Kreises liegt, dessen Schenkel Sehnen des Kreises sind, heißt ein Peripheriewinkel. Zu jedem Peripheriewinkel ABC (Fig. 50) gehört ein zwischen seinen Schenkeln liegender Bogen AC. Man sagt, der Peripheriewinkel steht auf diesem Bogen. Zu jedem Peripheriewinkel gehört daher auch ein Centriwinkel, der auf demselben Bogen steht, sowie eine Sehne.

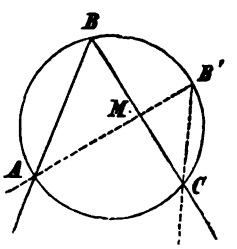


Fig. 50.

Dagegen gehören zu demselben Bogen AC oder zu demselben Centriwinkel AMC unendlich viele Peripheriewinkel, denn jeder Punkt des Kreises, der nicht auf dem Bogen AC liegt, kann Scheitelpunkt eines solchen Peripheriewinkels sein. Denkt man sich den Scheitel B des Peripheriewinkels auf dem Bogen ABC stetig von A bis C bewegt, so geht in jeder der beiden Grenzlagen, also wenn B mit A oder mit C zusammenfällt, der eine Schenkel des Winkels in die durch diesen Punkt mögliche Tangente über, während die Sehne des andern mit der Sehne AC zusammenfällt. Man erhält so einen Winkel, dessen Scheitel ebenfalls auf der Peripherie liegt, und dessen Schenkel den Bogen AC zwischen sich fassen, bei denen aber nur der eine Schenkel durch eine Sehne, dagegen der andre durch eine Tangente angegeben wird. Auch Winkel dieser Art, die Sehnen-Tangentenwinkel genannt werden, gehören zu den Peripheriewinkeln.

1) Ein Peripheriewinkel ist halb so groß als der Centriwinkel, der mit ihm auf demselben Bogen steht.

Zum Beweise dieses wichtigen Lehrsatzes unterscheiden wir vier mögliche Fälle (Fig. 51, a, b, c, d): Ist der Peripheriewinkel zunächst ein solcher im engern Sinne, und liegt a) der Mittelpunkt M auf einem Schenkel CA des Peripheriewinkels ACB, so ist der Centriwinkel AMB Außenwinkel des gleichschenkligen Dreiecks MCB, folglich doppelt so groß als der an der Grundlinie liegende Winkel MCB.

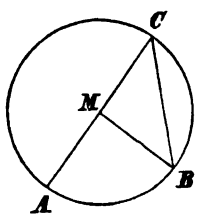


Fig. 51a.

b) Liegt der Mittelpunkt M innerhalb des Peripheriewinkels ACB, so ziehe man den Durchmesser CD. Dann ist nach dem vorigen Fall $\angle AMD = 2 \cdot \angle ACD$ und $\angle DMB = 2 \cdot \angle DCB$, also auch

$$\angle AMD + \angle DMB = 2 \cdot (\angle ACD + \angle DCB) \quad ,$$

$$\text{d. i. } \angle AMB = 2 \cdot \angle ACB \quad .$$

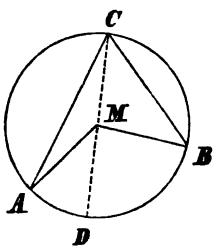


Fig. 51b.

c) Liegt der Mittelpunkt M außerhalb des Peripheriewinkels ACB, so ziehe man wieder den Durchmesser CD; dann ist wieder der Fall a) zweimal anwendbar, und man erhält diesmal

$$\angle AMB = \angle DMB - \angle DMA$$
$$= 2 \cdot (\angle DCB - \angle DCA) = 2 \cdot \angle ACB \quad .$$

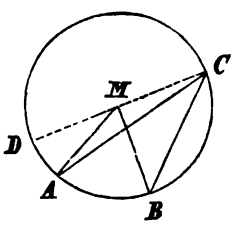


Fig. 51c.

d) Ist der eine Schenkel des Peripheriewinkels ABC, eine Tangente BC und ABC ein spitzer Winkel, so ist, weil CB senkrecht auf MB, $\angle ABC = 90^0 - \angle MBA$, dagegen $\angle AMB = 180^0 - 2 \cdot \angle MBA = 2 \cdot (90^0 - \angle MBA)$, also wieder $\angle AMB = 2 \cdot \angle ABC$.

Ist dagegen der Peripheriewinkel ein stumpfer ABD, so ist der zugehörige Centriwinkel der erhabene AMB. Da dieser den hohlen Winkel AMB zu vier Rechten, dagegen $\angle ABD$ den Winkel ABC zu zwei Rechten ergänzt, so folgt die Richtigkeit des Satzes auch in diesem Falle aus dem vorhergehenden. Ist endlich der Peripheriewinkel ABC ein rechter, so muß AB ein Durchmesser sein, und der zugehörige Centriwinkel ist ein gestreckter.

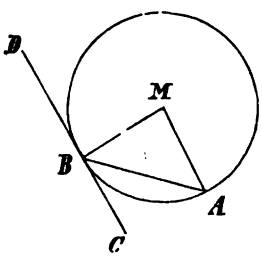


Fig. 51d.

Aus diesem Lehrsatz ergeben sich unmittelbar die folgenden Sätze:

2) Peripheriewinkel, die auf demselben Bogen stehen, sind gleich, denn sie sind sämtlich gleich der Hälfte desselben Centriwinkels.

Ein Sehnen-Tangentenwinkel ist gleich einem Peripheriewinkel, der auf dem zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogen steht.

Ebenso sind Peripheriewinkel, die auf gleichen Bogen stehen, gleich, denn es gehören zu ihnen gleiche Centriwinkel.

3) Ein Peripheriewinkel, der auf einem Halbkreise steht, ist ein rechter, denn der zugehörige Centriwinkel ist ein gestreckter.

Dagegen sind Peripheriewinkel, deren Bogen kleiner als ein Halbkreis sind, spitz, und solche, deren Bogen größer als ein Halbkreis sind, stumpf.

Da zu jeder Sehne zwei Bogen gehören, so gehören auch zu jeder Sehne zwei Peripheriewinkel. Die beiden zugehörigen Centriwinkel ergänzen einander zu vier Rechten. Hieraus folgt:

4) Zwei Peripheriewinkel, die auf derselben Sehne, aber auf entgegengesetzten Bogen stehen, sind Supplemente oder zwei Peripheriewinkel eines Kreises, deren Bogen einander zum Kreise ergänzen, sind Supplemente.

Man sagt, wenn ein Peripheriwinkel auf einem Bogen steht, so wird er von dem Bogen, der den ersten zum Kreise ergänzt, gefaßt.

2. Schneiden zwei Sekanten einander außerhalb des Kreises, so bilden sie miteinander einen Winkel, der gleich der Differenz zweier Peripheriewinkel ist, von denen jeder auf einem der zwischen den Sekanten liegenden Kreisbogen steht. Denn zieht man AD (Fig. 52a), so ist β Außenwinkel am Dreieck SAD, also $\beta = \alpha + \gamma$ oder $\alpha = \beta - \gamma$. Der Winkel α ist also kleiner als β.

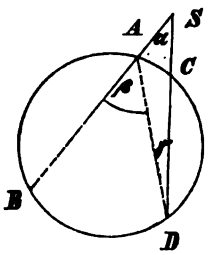


Fig. 52a.

Schneiden sich dagegen zwei Sekanten innerhalb des Kreises, so ist jeder von ihnen gebildete Winkel gleich der Summe der beiden Peripheriewinkel, die auf den von den Schenkeln des ersten Winkels und denen seines Scheitelwinkels eingeschlossenen Bogen stehen. Denn zieht man AD (Fig. 52b), so ist als Außenwinkel des Dreiecks ASD, $\alpha = \beta + \gamma$. Der Winkel α ist also größer als jeder der Winkel β und γ.

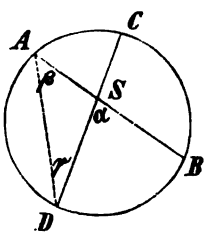


Fig. 52b.

Hieraus folgt weiter, daß, wenn über derselben Strecke als Grundlinie beliebig viele Dreiecke errichtet werden, deren Winkel an der Spitze sämtlich einander gleich sind, die Spitzen selbst auf einem Kreisbogen liegen müssen, von dem die Strecke Sehne ist, und den man erhält, wenn man durch die Endpunkte dieser Sehne und eine jener Spitzen den Kreis legt. Jedes Dreieck über derselben Geraden, dessen Spitze innerhalb des betreffenden Kreisabschnitts liegt, hat einen größern, jedes, dessen Spitze außerhalb dieses Abschnitts liegt, einen kleinern Winkel an der Spitze. Somit hat man den Satz:

5) Der geometrische Ort der Spitzen aller Dreiecke, die dieselbe Grundlinie und denselben Winkel an der Spitze haben, ist ein Kreisbogen, der die Grundlinie als Sehne hat und den Winkel als Peripheriewinkel faßt.

Davon ist ein besonderer Fall:

6) Der geometrische Ort der Spitzen aller rechtwinkligen Dreiecke mit derselben Hypotenuse, ist der Halbkreis, der die Hypotenuse als Durchmesser hat.

§ 17. Kreis und Figuren.

1. Verbindet man von drei oder mehr auf einem Kreise angenommenen Punkten je zwei benachbarte durch eine Sehne, so entsteht eine geradlinige Figur. Dasselbe ist der Fall, wenn man durch jeden dieser Punkte an den Kreis die Tangente legt, vorausgesetzt, daß nicht zwei aufeinander folgende Punkte Endpunkte desselben Durchmessers sind, in welchem Fall die betreffenden Tangenten parallel sein würden.

Ein n-Eck, dessen Eckpunkte auf der Peripherie eines Kreises liegen, dessen Seiten also Sehnen sind, ist dem Kreise eingeschrieben und heißt ein Sehnenvieleck: ein n-Eck, dessen Seiten Tangenten eines Kreises sind, ist diesem umschrieben und heißt ein Tangentenvieleck. Im ersten Fall heißt der Kreis der Umkreis, im zweiten der Inkreis der Figur.

Ein Vieleck hat im allgemeinen weder einen Um- noch einen Inkreis. Nur dann hat es einen Umkreis, wenn es einen Punkt gibt, der von allen Ecken, und nur

dann einen Inkreis, wenn es einen Punkt gibt, der von allen Seiten gleich weit entfernt ist.

Hat ein Vieleck einen Umkreis, so müssen die Mittelsenkrechten sämtlicher Seiten einander in demselben Punkte schneiden. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt des Umkreises.

Hat ein Vieleck einen Inkreis, so müssen die Halbierungslinien sämtlicher Winkel einander in demselben Punkte schneiden. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt des Inkreises.

2. Diese beiden Bedingungen sind zunächst erfüllt bei jedem Dreieck. Nach § 12 Nr. 2, 6) schneiden sich die Mittelsenkrechten eines Dreiecks in einem Punkte, der von den drei Eckpunkten gleich weit entfernt ist. Dieser Punkt ist also der Mittelpunkt des Umkreises.

Ein Dreieck hat also einen Umkreis. Da das Dreieck durch die Eckpunkte bestimmt ist, so kann man diesen Satz auch ausdrücken: Drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, müssen auf einem Kreise liegen, oder: ein Kreis ist bestimmt durch drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen.

Da jeder Winkel des Dreiecks ein Peripheriewinkel des Umkreises ist, so ergibt sich, daß der Mittelpunkt des Umkreises bei einem rechtwinkligen Dreieck der Halbierungspunkt der Hypotenuse ist, und bei einem spitzwinkligen innerhalb, bei einem stumpfwinkligen außerhalb des Dreiecks liegt.

Die drei Halbierungslinien der Innenwinkel eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, der von den Seiten gleich weit entfernt ist (§ 12 Nr. 3, 9)). Dieser Punkt ist der Mittelpunkt des Inkreises. Die Fußpunkte der von ihm auf die Seiten gefällten Senkrechten sind die Berührungspunkte des Inkreises mit den Seiten; die Senkrechten selbst Radien des Inkreises.

Das Dreieck hat einen Inkreis. Er liegt innerhalb des Dreiecks.

Im allgemeinen ist der Mittelpunkt des Inkreises von dem des Umkreises verschieden; nur beim gleichseitigen Dreieck fallen beide zusammen. Beim gleichschenkligen Dreieck liegen beide auf der Höhe (vgl. § 12 Nr. 2).

In jedem Dreieck existieren außer dem Mittelpunkt des Inkreises nach § 12 Nr. 3 noch drei andre Punkte, von denen jeder von den drei Seiten oder deren Verlängerungen gleich weit entfernt ist. Diese Punkte sind die Schnittpunkte der Halbierungslinien von je zwei Außenwinkeln des Dreiecks und der Halbierungslinie des am dritten Eckpunkt liegenden Innenwinkels. Um jeden dieser Punkte läßt sich hiernach ebenfalls ein Kreis beschreiben, der die drei Seiten des Dreiecks oder deren Verlängerungen berührt, und zwar liegt jedesmal ein Berührungspunkt auf einer Seite selbst, während die andern auf den Verlängerungen der beiden andern Seiten liegen. Diese drei Kreise heißen Ankreise des Dreiecks. Ihre Mittelpunkte und die Kreise selbst liegen außerhalb des Dreiecks.

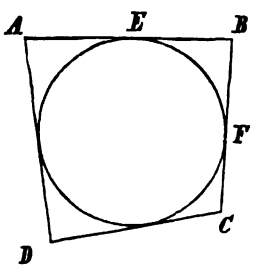


Fig. 53.

3. Ist ein Viereck einem Kreise einbeschrieben, so sind je zwei gegenüberliegende Winkel Peripheriewinkel, deren Bogen einander zum ganzen Kreise ergänzen. Daher gilt nach § 16 Nr. 1, 4) der Satz:

1) In einem Sehnenviereck beträgt die Summe je zweier gegenüberliegender Winkel zwei Rechte und daraus folgt:

2) Ein Innenwinkel eines Sehnenvierecks ist gleich dem gegenüberliegenden Außenwinkel.

Ist ferner *ABCD* (Fig. 53) ein Tangentenviereck, so sind je zwei Seitenabschnitte, die zwischen demselben Eckpunkt und den Berührungspunkten der anliegenden Seiten liegen, wie z. B. *BE* und *BF*, gleich lang (§ 15 Nr. 4). Je zwei gegenüberliegende Seiten *AB* und *DC*, sowie *AD* und *BC* enthalten vier solche Abschnitte, dergestalt, daß jeder Abschnitt des einen Paares einem Abschnitt des andern Paares gleich ist. Hieraus folgt der Satz:

3) In einem Tangentenviereck ist die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der beiden andern.

Die beiden vorstehenden Sätze lassen sich umkehren:

4) Ist in einem Viereck die Summe zweier gegenüberliegender Winkel gleich zwei Rechten, so hat das Viereck einen Umkreis.

Es gibt nämlich stets einen Kreis, der durch drei Eckpunkte A, B, C des Vierecks (Fig. 54) geht. Läge nun der vierte Eckpunkt D außerhalb dieses Kreises, so müßte wenigstens eine der Seiten AD, CD den Kreis schneiden. Dieser Schnittpunkt E wäre dann der vierte Eckpunkt eines Sehnenvierecks $ABCE$, und es müßte daher $\angle ABC + \angle CEA = 2R$ sein. Da aber $\angle CEA$ als Außenwinkel des Dreiecks AED größer als der Winkel CDA ist, so würde hieraus folgen, daß $\angle ABC + \angle CDA < 2R$ wäre. Läge dagegen D innerhalb des Kreises, so könnte man CD bis zum Schnittpunkt E mit dem Kreise verlängern und durch die entsprechende Beweisführung folgern, daß $\angle ABC + \angle CDA > 2R$ sein müsse. Soll also $\angle ABC + \angle CDA = 2R$ sein, so muß D auf dem durch A, B und C gehenden Kreise liegen.

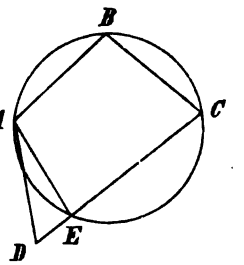


Fig. 54.

5) Ist in einem Viereck die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der beiden andern, so hat das Viereck einen Inkreis.

Es gibt nämlich stets einen Kreis, der drei Seiten AB, BC, CD des Vierecks (Fig. 55) berührt. Schnitte nun die vierte Seite AD den Kreis, so könnte man mittels einer von D an ihn gelegten Tangente ein Tangentenviereck $EBCD$ konstruieren, und es müßte dann

$$EB + CD = BC + DE$$

sein. Da nun $EB = AB + AE$ und $DE < AE + AD$, so müßte

$$AB + AE + CD < BC + AE + AD \quad ,$$

oder, wenn auf beiden Seiten AE subtrahiert,

$$AB + CD > BC + AD$$

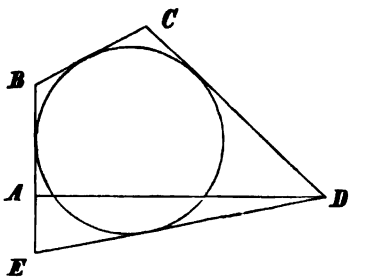


Fig. 55.

sein. — Fiele dagegen AD ganz außerhalb des Kreises, so könnte man wieder mittels einer von D an ihn gelegten Tangente ein Tangentenviereck $EBCD$ konstruieren und durch die entsprechende Beweisführung folgern, daß

$$AB + CD < BC + AD$$

sein müsse. Soll also $AB + CD = BC + AD$ sein, so muß auch DA den Kreis berühren.

4. Aus diesen Sätzen folgert man: Ein Quadrat hat einen Um- und einen Inkreis, deren Mittelpunkte zusammenfallen in den Schnittpunkt der Diagonalen. Ein Rechteck hat einen Umkreis, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der Diagonalen ist; aber keinen Inkreis. Ein Rhombus hat einen Inkreis aber keinen Umkreis. Ein Parallelogramm und ein Trapez hat wie das Viereck im allgemeinen weder einen Um- noch einen Inkreis. Ein gleichschenkliges Trapez hat immer einen Umkreis.

Den Bedingungen für die Existenz eines Um- und Inkreises (Nr. 1) genügen auch die regelmäßigen Vielecke. Ein Vieleck ist regelmäßig, wenn seine Seiten und seine Winkel gleich sind. Das gleichseitige Dreieck ist hiernach das regelmäßige Dreieck, weil aus der Gleichheit der Seiten die der Winkel folgt. Das gleichseitige Viereck, der Rhombus, ist nicht regelmäßig, weil die Seiten

eines Vierecks einander gleich sein können, ohne daß es die Winkel sind. Das regelmäßige Viereck ist das Quadrat. Die Möglichkeit eines regelmäßigen n-Ecks ergibt sich, wenn man in einem Kreise n Radien zieht, so daß je zwei aufeinander folgende miteinander gleiche Winkel, nämlich $\frac{360^0}{n}$ bilden. Zieht man zu jedem dieser Centriwinkel die zugehörige Sehne, so sind die n Sehnen einander gleich. Diese sind die Seiten eines Sehnen-n-Ecks, das aus n kongruenten gleichschenkligen Dreiecken zusammengesetzt erscheint. Jeder Innenwinkel des n-Ecks besteht aber aus zwei aneinanderliegenden Basiswinkeln zweier anstoßender gleichschenkliger Dreiecke. Jeder Innenwinkel ist also

$$180^0 - \frac{360^0}{n} .$$

Da nun das n-Eck gleiche Seiten und gleiche Winkel hat, so ist es regelmäßig. Denkt man sich ein regelmäßiges n-Eck gegeben, unabhängig von einem Kreise, so müssen also dessen Seiten und Winkel gleich sein. Da nach § 8 Nr. 3 die Summe der Winkel eines n-Ecks

$$(2n - 4)R = n \cdot 180^0 - 360^0$$

sein muß, so ist, wenn sie alle einander gleich sind, jeder

$$\frac{(2n - 4)R}{n} = 180^0 - \frac{360^0}{n} ,$$

sein: wie vorhin gefunden worden ist.

5. Ist $ABCDEF$ (Fig. 56) ein regelmäßiges Vieleck, so mögen zwei benachbarte Winkel FAB und ABC halbiert und der Schnittpunkt M der Halbierungslinien mit allen noch übrigen Eckpunkten des Vielecks verbunden sein. Da die Winkel FAB, ABC zufolge der Voraussetzung gleich groß sind, so müssen auch ihre Hälften α, β einander gleich sein: daher ist das Dreieck ABM gleichschenklig, d. h. es ist $AM = BM$. Es stimmen ferner die Dreiecke ABM, BCM in der gemeinschaftlichen Seite BM, den nach Voraussetzung gleichen Seiten AB, BC und in den Hälften β, γ des Winkels B überein und sind also kongruent. Hieraus folgt, daß $CM = AM$ ist und mithin muß auch $CM = BM$, also das Dreieck BCM gleichschenklig sein. Da hiernach wieder die Winkel δ und γ einander gleich sind, so ergibt sich mit Berücksichtigung der Gleichheit der ganzen Winkel B und C, und daß γ die Hälfte von B ist, daß auch δ die Hälfte von C, oder δ gleich ε sein muß. Nun läßt sich in gleicher Weise, wie vorher die Kongruenz der Dreiecke ABM und BCM, auch die der Dreiecke BCM und CDM beweisen und daraus wieder folgern, daß das Dreieck CDM gleichschenklig oder $CM = DM$ ist. Man kann dann in derselben Weise fortfahren und für jede beliebige Anzahl von Teildreiecken den Beweis bis zum letzten fortsetzen. Somit folgt, daß die Strecken AM, BM, CM, DM u. s. w. sämtlich gleich lang sind, oder daß M von allen Ecken des Vielecks gleich weit entfernt ist. AM, BM, CM, . . . sind aber die Halbierungslinien der Winkel, die sich daher in einem Punkte schneiden müssen, der von allen Seiten gleich weit entfernt ist. Somit hat man den Satz bewiesen:

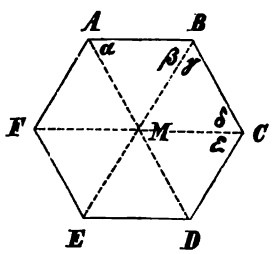


Fig. 56.

In einem regelmäßigen Vieleck gibt es einen Punkt, der von allen Eckpunkten und von allen Seiten gleich weit entfernt ist.

Dieser Punkt wird der Mittelpunkt des Vielecks genannt. Er ist der Mittelpunkt des Um- und des Inkreises des regelmäßigen n-Ecks.

Aus dieser Betrachtung ergibt sich zugleich, daß und warum ein n-Eck im allgemeinen keinen Mittelpunkt hat.

Verbindet man den Mittelpunkt M eines regelmäßigen Vielecks mit zwei benachbarten Eckpunkten A und B, so bilden die Verbindungslinien mit AB ein gleichschenkliges Dreieck, das als Bestimmungsdreieck des regelmäßigen Vielecks gelten kann. Es enthält alle zur Bestimmung des regelmäßigen Vielecks wesentliche Stücke. Die Basis AB (Fig. 57) ist die Seite, der Schenkel $MA = MB$ ist der Radius des Umkreises, die Höhe MN ist der Radius des Inkreises. $\angle MAB = \angle MBA$ ist die Hälfte eines Innenwinkels; es ist ferner

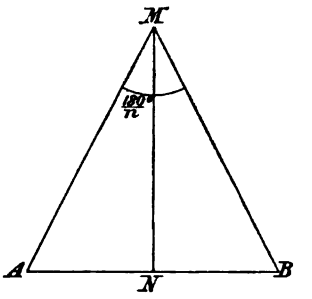


Fig. 57.

$$\angle AMB = \frac{360^0}{n}, \quad \angle AMN = \angle BMN = \frac{180^0}{n}.$$

§ 18. Zwei Kreise.

1. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte A, B zweier Kreise (Fig. 58) heißt ihre Centrale. Die Centrale der Kreise A, B schneidet den Kreis B in einem Punkte C, und ihre Verlängerung über den Mittelpunkt B schneidet denselben Kreis in einem Punkte D. Es sei nun E ein beliebiger andrer Punkt des Kreises B, den man mit beiden Mittelpunkten A, B verbunden hat, so ist in dem Dreieck ABE, $AB + BE > AE$ und $AB - BE < AE$. Da nun $BE = BD = BC$, so ist auch $AB + BD > AE$ und $AB - BC < AE$, d. h. es ist $AD > AE$ und $AC < AE$. Von allen Punkten des Kreises B hat also D die größte und C die kleinste Entfernung vom Mittelpunkt des Kreises A. Hieraus ergeben sich folgende Sätze:

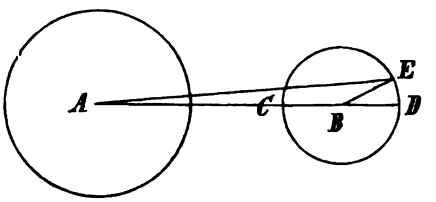


Fig. 58.

Ist die Centrale zweier Kreise größer als die Summe der Radien, so liegt jeder der beiden Kreise außerhalb des andern, die beiden Kreise schließen einander aus. Denn ist $AB > r_1 + r_2$, wenn die Radien der beiden Kreise mit r_1 und r_2 bezeichnet werden, so ist $AC > r_1$ und es liegt C, und folglich auch jeder andre Punkt des Kreises B außerhalb des Kreises A.

Ist die Centrale zweier Kreise gleich der Summe der Radien, so haben beide Kreise einen Punkt gemeinsam und liegen sonst ganz außerhalb einander. Denn in diesem Falle ist $AC = AB - BC = r_1$, es liegt also C auf dem Kreise A, und jeder andre Punkt von B außerhalb A.

Ist die Centrale zweier Kreise kleiner als die Summe und größer als die Differenz der Radien, so schneiden die Kreise einander. Denn ist $AB < r_1 + r_2$, so ist $AC < r_1$ und C liegt innerhalb des Kreises A. Ist dabei $AB > r_1 - r_2$, wobei man immer $r_1 > r_2$ voraussetzen darf, so ist AD oder $AB + r_2 > r_1$, also liegt D außerhalb des Kreises A. Da also der Kreis B zum Teil außerhalb und zum Teil innerhalb des Kreises A liegt, so müssen die Kreise einander schneiden.

Ist die Centrale zweier ungleicher Kreise gleich der Differenz der Radien, so haben die Kreise einen Punkt gemeinsam, und jeder andre Punkt des kleinern Kreises liegt innerhalb des größern. Denn ist $AB = r_1 - r_2$, so ist AD oder $AB + r_2 = r_1$, also liegt D auf dem Kreise A, und jeder andre Punkt von B innerhalb des Kreises A.

Ist die Centrale zweier ungleicher Kreise kleiner als die Differenz der Radien, so liegen alle Punkte des kleinern Kreises innerhalb des größern. Denn in diesem Falle ist auch $AD < r_2$. Der größere Kreis schließt den kleinern ein.

Ist insbesondere die Centrale zweier ungleicher Kreise gleich Null, d. h. fallen ihre Mittelpunkte zusammen, so sind die Kreise konzentrisch.

2. Von zwei Kreisen, die einen Punkt gemeinschaftlich haben, sagt man, sie berühren einander, und der gemeinschaftliche Punkt heißt ihr Berührungspunkt. Aus dem vorstehenden geht hervor, daß es zwei Arten von Berührungen zweier Kreise gibt: bei der einen liegt ein Kreis sonst außerhalb des andern, sie berühren einander von außen: bei der andern liegt der kleinere Kreis innerhalb des andern, er berührt den größern von innen, und der größere berührt den kleinern umschließend. Die beiden betreffenden Sätze können daher ausgesprochen werden:

1) Ist die Centrale zweier Kreise gleich der Summe der Radien, so berühren die Kreise einander von außen.

2) Ist die Centrale zweier ungleicher Kreise gleich der Differenz der Radien, so berührt der kleinere Kreis den größern von innen.

Zugleich geht aus den obigen Entwicklungen hervor, daß der Berührungspunkt im ersten Fall auf der Centrale, im zweiten auf der Verlängerung der Centrale über dem Mittelpunkt des kleinern Kreises liegt.

Auch ergibt sich, daß zwei Kreise einander nur unter den angegebenen Bedingungen berühren können, da für jeden andern möglichen Fall eine andre Lage der Kreise nachgewiesen wurde. Es gelten daher auch die Umkehrungen:

3) Berühren zwei Kreise einander von außen, so liegt der Berührungspunkt auf der Centrale, und diese ist gleich der Summe der Radien.

4) Berührt ein Kreis einen andern von innen, so liegt der Berührungspunkt auf der Verlängerung der Centrale über den Mittelpunkt des kleinern Kreises, und die Centrale ist gleich der Differenz der Radien.

Schneiden zwei Kreise einander, so geschieht dies in zwei Punkten, denn ist C ein Schnittpunkt der Kreise A, B (Fig. 59), so bildet die Centrale AB mit den nach C gehenden Radien ein Dreieck, und denkt man sich dieses um AB auf die andre Flächenseite von AB gedreht, so kommt es in die Lage ADB, so daß $AD = AC$ und $BD = BC$, also D ebenfalls ein auf beiden Kreisen zugleich liegender Punkt ist. Daß aber zwei Kreise einander nicht in mehr als zwei Punkten schneiden können, folgt daraus, daß durch drei Punkte ein Kreis bestimmt ist, daß also zwei Kreise, die drei Punkte gemeinsam haben, einander decken müssen.

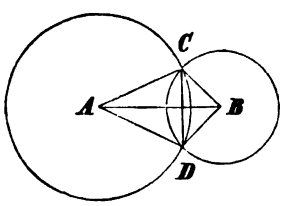


Fig. 59.

Verbindet man die Schnittpunkte C, D zweier Kreise A, B, so erhält man ihre gemeinschaftliche Sehne CD. Da ACD und BCD gleichschenklige Dreiecke sind, so steht die Verbindungslinie ihrer Spitzen A, B senkrecht zu der gemeinschaftlichen Basis CD, oder, was dasselbe ist,

5) die gemeinschaftliche Sehne zweier einander schneidenden Kreise steht senkrecht auf der Centrale.

Haben die beiden sich schneidenden Kreise gleiche Radien, so werden auch die Dreiecke ABC und ABD gleichschenklig und die gemeinsame Sehne halbiert die Centrale.

Der Fall, daß sich die beiden Kreise berühren, ist der besondere Fall, daß die beiden gemeinsamen Punkte in einen auf der Centrale zusammenfallen.

Man kann hiernach sagen, zwei sich berührende Kreise haben zwei zusammenfallende Punkte gemeinsam (vgl. § 15 Nr. 3).

Im ganzen können zwei Kreise auf fünf verschiedene Arten zueinander liegen. Sie haben entweder keinen oder zwei in einen zusammenfallende oder zwei getrennt liegende Punkte gemeinsam.

§ 19. Symmetrische Figuren.

1. In § 7 ist der Begriff der Symmetrie als ein den Begriff der Kongruenz ergänzender aber nicht wesentlich von ihm verschiedener erörtert worden. Durch Umwendung einer Figur, die einer andern symmetrisch ist, läßt sie sich in eine der zweiten kongruente verwandeln. Es ist daher auch bei der Betrachtung der Kongruenz die Symmetrie als stillschweigend mit eingeschlossen anzusehen. Der Begriff der Symmetrie hat aber auch eine weitere Bedeutung als eine Beziehung der Lage von Figuren zueinander.

Ein ebenes Gebilde (Figur im weitern Sinne, vgl. § 6) heißt symmetrisch, wenn eine Gerade der Ebene existiert, die es in zwei Teile teilt, so daß der eine durch Umdrehung um diese Gerade mit dem andern zur Deckung gebracht werden kann. Diese Gerade ist eine Symmetrieachse der Figur. Nach der Drehung wird immer ein Punkt des einen Teils mit einem entsprechenden Punkt des andern Teils zusammenfallen, wenn diese beiden Punkte so liegen, daß ihre Verbindungslinie durch die Symmetrieachse normal halbiert wird. So liegen in Fig. 60 die Punkte A und A' symmetrisch zu MN, wenn AA' senkrecht zu MN und $AQ = QA'$ ist. Man kann also auch sagen, daß die Symmetrieachse für zwei Punkte die Mittelsenkrechte ihrer Verbindungslinie ist. Dann wird auch nach der Umdrehung AQ auf $A'Q$ fallen müssen, d. h. die Symmetrieachse einer Strecke ist ihre Mittelsenkrechte. Damit ist der Punkt Q, der in der Symmetrieachse liegt, sich selbst entsprechend, weil er seine Lage bei der Drehung behält. Der Mittelpunkt Q ist also als ein Punkt anzusehen, in dem zwei Punkte, die Endpunkte der Strecken AQ und $A'Q$ zusammenfallen. Zieht man durch A eine Gerade, welche die Symmetrieachse MN in S schneidet, so muß $A'S$ die zu ihr in Bezug auf MN symmetrisch liegende Gerade sein. Zwei Gerade liegen also symmetrisch zu einer dritten, wenn diese den Winkel der beiden Geraden halbiert; ihr Schnittpunkt muß auf der Symmetrieachse liegen. Da die vier Winkel, die zwei Gerade bilden, durch zwei aufeinander senkrechte Gerade halbiert werden, so hat die aus zwei sich schneidenden Geraden gebildete Figur zwei aufeinander senkrechte Symmetrieachsen.

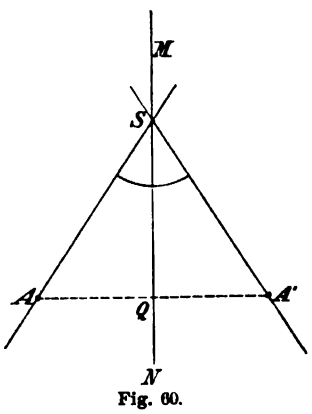


Fig. 60.

2. Aus diesem Begriffe der Symmetrie folgt:

Das gleichschenklige Dreieck ist symmetrisch zur Höhe. Daraus ergeben sich alle Eigenschaften des gleichschenkligen Dreiecks, die in § 12 Nr 2 erörtert worden sind. Das Rechteck ist symmetrisch zu den beiden Verbindungslinien der Halbierungspunkte der Gegenseiten. Der Rhombus ist symmetrisch zu seinen Diagonalen. Das Quadrat hat die Symmetrieachsen des Rechtecks und des Rhombus. Das gleichschenklige Trapez ist symmetrisch zur Verbindungslinie der Halbierungspunkte der parallelen Seiten.

Der Kreis ist symmetrisch zu jedem Durchmesser. Der Kreisbogen, der zugehörige Kreissektor und das zugehörige Kreissegment sind symmetrisch zu dem auf der begrenzenden Sehne senkrechten Durchmesser des Kreises, dem der Bogen angehört.

Die Figur, die gebildet wird aus Kreis und Punkt, ist symmetrisch zu dem Kreisdurchmesser, auf dem oder auf dessen Verlängerung der Punkt liegt. Liegt der Punkt innerhalb des Kreises, so muß die zu dem Durchmesser des Punktes normale Sehne von dem Durchmesser halbiert werden. Liegt der Punkt auf dem Kreise, so muß die in ihm an den Kreis gelegte Tangente normal zu dem Durchmesser sein. Liegt der Punkt außerhalb des Kreises, so müssen sich von ihm zwei zu dem Durchmesser, der durch den Punkt bestimmt ist, symmetrische Tangenten legen lassen und die Verbindungslinie der Berührungspunkte muß auf dem Durchmesser senkrecht stehen und von ihm halbiert werden (vgl. § 15 Nr. 4).

Zwei Kreise sind symmetrisch zu ihrer Centrale, d. h. zu der Geraden, die durch die Mittelpunkte der Kreise geht. Haben die Kreise daher einen Punkt gemein, so müssen sie noch einen zweiten symmetrisch zur Centrale liegenden Punkt gemein haben und die Verbindungslinie der Punkte muß von der Centrale normal halbiert werden. Liegt der gemeinsame Punkt auf der Centrale selbst, so fällt der zweite mit ihm zusammen, die Kreise haben zwei in der Centrale zusammenfallende Punkte gemein. Zwei gleiche Kreise haben außer der Centrale noch die Mittelsenkrechte der Centrale als Symmetrieachse; schneiden sie sich, so muß die gemeinsame Sehne die Centrale halbieren (vgl. § 18).

§ 20. Die Fundamentalaufgaben.

1. Die bisher entwickelten und in Lehrsätzen ausgesprochenen Eigenschaften der Figuren liefern die Mittel zur Lösung von Aufgaben, welche die Konstruktion von Figuren aus gegebenen Bestimmungsstücken verlangen. Wie ein Lehrsatz eine Behauptung ausspricht, die eines Beweises bedarf, so ist eine Aufgabe eine Forderung, die eine Auflösung notwendig macht. Der Beweis eines Satzes wird geführt, indem man zeigt, daß er eine logische Folgerung aus schon bewiesenen Sätzen oder aus den durch die Erfahrung als richtig bekannten Axiomen der Geometrie ist. Die Auflösung einer Aufgabe muß zeigen, wie man sie auf schon gelöste Aufgaben oder auf die Postulate (§§ 2 und 5), die im Gebrauch von Lineal und Zirkel bestehen, zurückführen kann.

Konstruktionen, wie z. B. das Fällen einer Senkrechten von einem Punkt auf eine Gerade, das Ziehen von Parallelen wurden schon bei den Beweisen der Lehrsätze in den vorhergehenden Paragraphen vielfach vorausgesetzt, allein da es nur nötig war, sie ausgeführt zu denken, reichte es hin, daß die Möglichkeit solcher Senkrechten, Parallelen u. s. w. feststand, ohne daß es zunächst nötig war, die praktische Ausführung ihrer Konstruktion zu lehren. Um beispielsweise zu beweisen, daß die Winkel eines gleichseitigen Dreiecks einander gleich seien, ist es nur nötig, sich ein solches Dreieck vorzustellen, aber nicht, daß vorher gezeigt sei, auf welche Weise man es konstruieren könne; ebenso, wo zu einem Beweise eine Winkelhalbierende erforderlich ist, ist es nicht notwendig, ihre Konstruktion auszuführen, sondern nur diese unzweifelhaft existierende Gerade sich vorhanden zu denken.

Die durch die Lehrsätze bekannt gewordenen Eigenschaften der Figuren bieten nun auch die Mittel, die Auflösung von Aufgaben zu lehren.

Fundamentalsätze sind solche Lehrsätze, auf die der Beweis der größten Zahl der übrigen zurückgeführt wird, wie z. B. die Kongruenzsätze und Fundamentalaufgaben sind die Aufgaben, ohne deren Kenntnis keine andre Aufgabe gelöst werden kann.

Als Fundamentalaufgaben lassen sich zunächst diejenigen bezeichnen, die, entsprechend den Kongruenzsätzen, die Konstruktion eines Dreiecks aus drei Bestimmungsstücken verlangen.

1) Ein Dreieck aus seinen drei Seiten zu konstruieren.

Es sind drei Strecken a, b, c gegeben, und es wird ein Dreieck verlangt, dessen Seiten diesen Strecken gleich sind. Man zeichne eine Gerade und trage auf ihr $AB = c$ ab (Fig. 61), beschreibe um A mit dem Radius b, und um B mit dem Radius a Kreisbogen und verbinde ihren Schnittpunkt C mit A und B. Dann ist ABC das verlangte Dreieck.

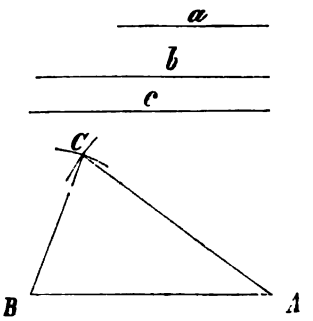


Fig. 61.

Eine Aufgabe erfordert eine Determination, d. h. die Untersuchung, unter welchen Bedingungen ihre Auflösung möglich ist und ob die Aufgabe eindeutig oder mehrdeutig bestimmt oder unbestimmt ist. Bei der vorliegenden Aufgabe ist die Bedingung der Lösbarkeit ohne weiteres ersichtlich: die drei gegebenen Strecken müssen so beschaffen sein, daß die Summe der beiden kleinern größer als die größte ist. Eine andre Wahl der Strecken würde im Widerspruch stehen mit der Eigenschaft des Dreiecks, daß die Summe zweier Seiten größer ist als die dritte Seite. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist das Dreieck eindeutig bestimmt. Es gibt zwar unendlich viele Dreiecke mit denselben Seiten: diese sind aber kongruent oder symmetrisch. Bei festgegebener Lage einer Seite AB gibt es vier, die paarweise symmetrisch zur Seite AB und ihrer Mittelsenkrechten liegen. Wenn diese Lagenbeziehung nicht in Betracht kommt für weitere Konstruktionen, so kann man eins von diesen vier Dreiecken als das gesuchte annehmen.

Nicht immer sind die Bedingungen der Lösbarkeit von vornherein klar, sondern ergeben sich erst durch die Konstruktion selbst (vgl. Aufgabe 11). Nur in solchen komplizierteren Fällen ist eigentlich die Determination notwendig. In den einfacheren, wie in der vorliegenden Aufgabe und den folgenden kann die Determination weggelassen werden.

Als besondere Fälle der vorstehenden Aufgabe können die folgenden gelten:

2) Ein gleichschenkliges Dreieck aus Basis und Schenkel zu konstruieren, oder auch, über einer gegebenen Basis ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, dessen Schenkel gegeben ist.

Hierzu ist nur anzunehmen, daß in der vorigen Aufgabe $a = b$ sei.

3) Ein gleichseitiges Dreieck aus der Seite (oder über einer gegebenen Seite ein gleichseitiges Dreieck) zu konstruieren.

Man nehme in der Aufgabe 1) $a = b = c$ an.

Da jeder Winkel eines gleichseitigen Dreiecks 60^0 beträgt, so ergibt sich hieraus zugleich die Lösung der Aufgabe:

4) Einen Winkel von 60^0 zu zeichnen.

Nimmt man ferner zu den Seiten des zu konstruierenden Dreiecks die Seiten eines andern gegebenen Dreiecks, so löst man die Aufgabe:

5) Ein Dreieck zu konstruieren, das einem gegebenen Dreieck kongruent ist.

Da kongruente Dreiecke in den entsprechenden Winkeln übereinstimmen, und zu jedem gegebenen Winkel durch eine beliebige, seine Schenkel schneidende Gerade ein Dreieck konstruiert werden kann, so ergibt sich hieraus auch ein Mittel, um

6) Einen Winkel zu zeichnen, der einem gegebenen Winkel gleich ist, und insbesondere

an eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte einen gegebenen Winkel anzutragen.

Da hierbei die Gerade, welche die Schenkel des gegebenen Winkels schneidet, beliebig gezogen werden kann, so wird man ihr eine für die Ausführung der

Konstruktion möglichst bequeme Lage geben, und dies ist der Fall, wenn das Dreieck gleichschenklig wird. Hiernach gestaltet sich die Auflösung der Aufgabe in folgender Weise:

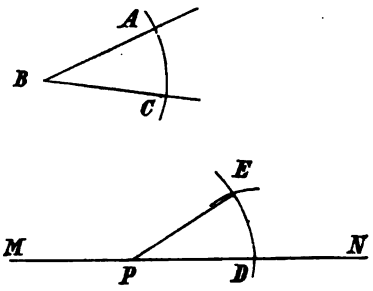


Fig. 62.

Man beschreibe um den Scheitel B (Fig. 62) des gegebenen Winkels mit beliebigem Radius einen Kreisbogen, der die Schenkel in A und C schneidet, und mit demselben Radius um den auf der Geraden MN gegebenen Punkt P einen Kreisbogen, der MN in D schneidet. Darauf beschreibe man mit dem Abstand der Punkte A und C um D einen Kreisbogen, der den um P beschriebenen in E schneidet und ziehe EP, so ist EPD der verlangte Winkel.

Im geometrischen Zeichnen nimmt man die Strecke AC, d. i. die Sehne des Kreisbogens in den Meßzirkel, setzt die eine Spitze auf D und markiert E durch einen Zirkelstich.

7) Zu einer gegebenen Geraden durch einen Punkt die Parallele zu ziehen.

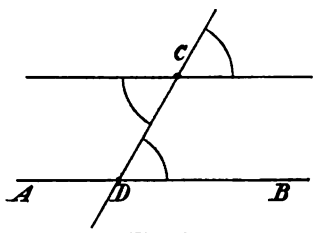


Fig. 63.

Man ziehe durch den gegebenen Punkt C (Fig. 63) eine beliebige Gerade, die AB in D schneidet und trägt an CD in C einen Winkel, der gleich CDB ist, so an, daß er zu diesem korrespondierender oder Wechselwinkel wird. Der freie Schenkel ist die gesuchte Parallele. Im geometrischen Zeichnen macht man diese Konstruktion mechanisch weit bequemer und genauer. Man bedient sich dazu eines dreieckigen Lineals (gewöhnlich ein rechtwinkliges Dreieck mit dem spitzen Winkel 30^0 oder 45^0, sogenannten Winkel), von dem man eine Seite an ein zweites Lineal anlegt, während eine andre mit AB zusammenfällt. Dann verschiebt man es längs des zweiten festgehaltenen Lineals bis die vorher mit AB zusammenfallende Kante durch C geht (s. Fig. 64).

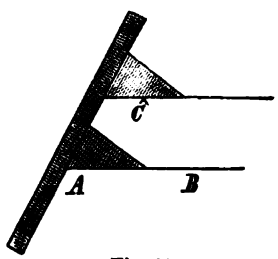


Fig. 64.

8) Ein Dreieck aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln zu konstruieren.

Man zeichne eine Strecke gleich der gegebenen Seite und trage an sie in jedem Endpunkte einen der gegebenen Winkel an. Die freien Schenkel schneiden einander in dem dritten Eckpunkt des Dreiecks.

9) Ein Dreieck aus einer Seite, einem anliegendeu nnd dem gegenüberliegenden Winkel zu konstruieren.

Es sei a die gegebene Seite, α der gegenüberliegende, β der anliegende Winkel. Man zeichne $BC = a$ (Fig. 65), trage an BC in B den Winkel β an, ziehe durch C zu BA die Parallele CE und trage in C an CE den Winkel α an. Der freie Schenkel dieses Winkels schneidet den von β in A. Der Winkel CAB ist dann als Wechselwinkel an Parallelen gleich α.

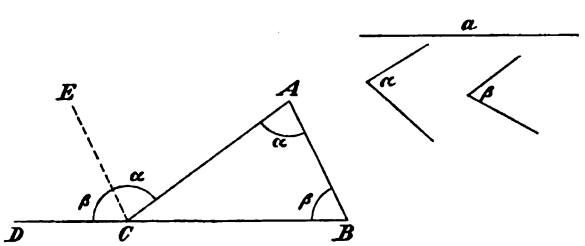


Fig. 65.

10) Ein Dreieck aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel zu konstruieren.

Die Konstruktion geschieht, indem man eine Strecke gleich der einen gegebenen Seite zeichnet, an diese in ihrem einen Endpunkt den gegebenen Winkel anträgt, auf dem freien Schenkel die zweite gegebene Seite vom Scheitel aus abträgt; die Verbindungslinie der Endpunkte ist die dritte Seite.

11) Ein Dreieck aus zwei Seiten und dem der einen gegenüberliegenden Winkel zu konstruieren.

Sind a, b und α gegeben, so zeichne man $AC = b$ (Fig. 66), trage in A an AC den Winkel α an und beschreibe um C mit dem Radius b einen Kreisbogen, der den freien Schenkel von α in B schneidet.

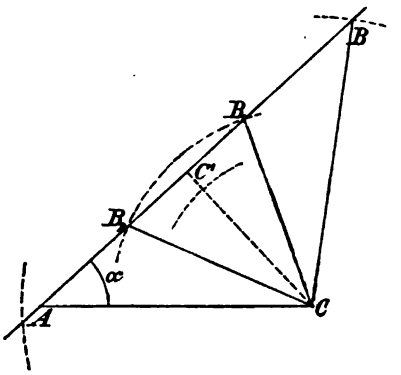


Fig. 66.

Diese Aufgabe erfordert eine Determination. Der um C beschriebene Kreisbogen kann den freien Schenkel von α meiden, berühren oder schneiden. Fällt man von C auf den freien Schenkel von α die Senkrechte CC', so kann $a < CC'$, $a = CC'$, $a > CC'$ sein. Im ersten Falle ist die Auflösung unmöglich; es gibt kein Dreieck, das die gegebenen Stücke enthält. Der zweite ist ein besonderer Fall: der Kreisbogen berührt den freien Schenkel von α in C' und das gesuchte Dreieck wird rechtwinklig. Im dritten Falle gibt es zwei Schnittpunkte B_1 und B_2, die symmetrisch zu C' liegen. Beide Punkte geben mit C verbunden die beiden verschiedenen Dreiecke AB_1C und AB_2C, solange a kleiner als b ist. Wird $a = b$, so fällt ein Schnittpunkt mit A zusammen, der andre bestimmt, wie von vornherein klar, ein gleichschenkliges Dreieck. Ist aber $a > b$ gegeben, so fällt der eine Schnittpunkt in die Verlängerung des freien Schenkels von α über A hinaus. Das durch ihn bestimmte Dreieck würde also den Winkel α nicht enthalten und es ist nur der zweite Schnittpunkt zu gebrauchen, so daß es nur ein Dreieck gibt. Man kann also zusammenfassen: Die Aufgabe kann, falls sie überhaupt lösbar ist, eindeutig oder zweideutig sein. Lösbar und eindeutig ist sie immer, wenn der gegebene Winkel der größern Seite gegenüberliegt (vgl. § 10 Nr. 4, 5)).

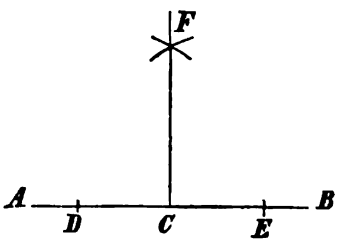


Fig. 67.

2. Die Eigenschaften der gleichschenkligen Dreiecke, namentlich die der Symmetrie, führen zur Lösung folgender Aufgaben:

1) Auf einer gegebenen Geraden in einem gegebenen Punkte die Senkrechte zu errichten.

Man trage auf der gegebenen Geraden AB von dem gegebenen Punkt C aus (Fig. 67) zu beiden Seiten gleiche Strecken CD, CE ab, konstruiere über DE als Basis ein beliebiges gleichschenkliges Dreieck und verbinde dessen Spitze F mit C, so ist CF die verlangte Senkrechte.

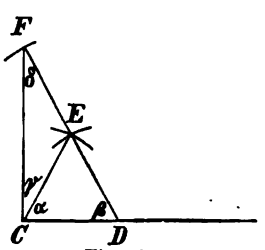


Fig. 68.

Diese Konstruktion ist nicht ausführbar, wenn C ein Endpunkt von AB ist, und AB nicht über C verlängert werden kann. In diesem Falle kann man sich folgender Konstruktion bedienen: Man trage von C aus (Fig. 68) auf der gegebenen Geraden eine beliebige Strecke CD ab, errichte über CD als Basis ein beliebiges gleichschenkliges Dreieck CED, verlängere DE über E um $EF = ED$ und ziehe CF, so ist CF die verlangte Senkrechte. Denn es sind $\angle\, \alpha$ und $\angle\, \beta$, und ebenso

$\angle \gamma$ und $\angle \delta$ als Wiukel an der Grundlinie gleichschenkliger Dreiecke gleich, also ist $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ und daher gleich der Hälfte der Winkelsumme des Dreiecks FCD, mithin gleich 90^0.

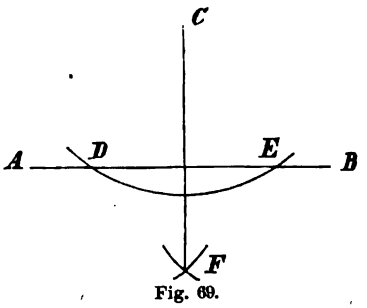


Fig. 69.

2) Auf eine gegebene Gerade von einem gegebenen Punkte die Senkrechte zu fällen.

Man beschreibe (Fig. 69) um C einen Kreisbogen, der AB in D und E schneidet, darauf mit beliebigem Radius einen Kreisbogen um D und mit demselben Radius einen solchen um E. Den Schnittpunkt F der beiden Kreisbogen verbinde man mit C, so ist CF die verlangte Senkrechte. Denn die Verbindungslinie der Spitzen der beiden gleichschenkligen Dreiecke CDE, FDE, die auf derselben Basis stehen, ist zu dieser senkrecht.

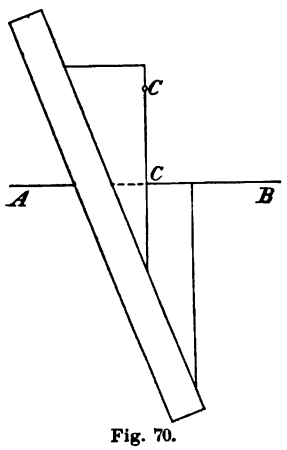


Fig. 70.

Auch diese beiden Konstruktionen, durch einen gegebenen Punkt eine Senkrechte zu einer gegebenen Geraden zu ziehen, werden bequemer und genauer mechanisch mit Hilfe zweier Lineale (vgl. Nr. 1, Aufg. 7)) ausgeführt. Man legt (Fig. 70) die Hypotenuse des dreieckig rechtwinkligen Lineals an das zweite Lineal an, während die eine Kathete mit AB zusammenfällt und verschiebt es an dem festgehaltenen zweiten Lineal so weit, bis die andre Kathete durch den auf oder außerhalb AB gegebenen Punkt C geht.

3) Eine gegebene Strecke zu halbieren.

Man beschreibe um die Endpunkte der Strecke AB (Fig. 71) mit demselben beliebigen Radius zwei Kreisbogen, die sich in den zu AB symmetrisch liegenden Punkten C und D schneiden. CD ist die gemeinsame Sehne der beiden gleichen Kreise, also halbiert sie die Centrale in E. Damit ist zugleich die Aufgabe gelöst:

4) Die Mittelsenkrechte einer Strecke zu konstruieren.

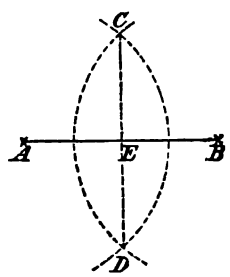


Fig. 71.

Praktisch wird der Halbierungspunkt einer Strecke gewöhnlich durch Probieren gefunden. Es gelingt bei einiger Übung bald, mit dem Stechzirkel die Hälfte einer nicht zu langen Strecke zu finden. Trifft beim Umschlagen des Zirkels die andre Zirkelspitze nicht genau in den andern Endpunkt der Strecke, so halbiert man nach dem Augenmaß das überschießende oder fehlende kleine Stück. Man hat, wie bei den andern mechanischen Konstruktionen der Parallelen und Senkrechten den Vorteil, daß die Zeichnung nicht durch störende Hilfslinien belastet wird.

Durch wiederholte Halbierung der Hälften einer Strecke kann man die Aufgabe lösen:

Eine gegebene Strecke in 4, oder 8, oder 16 u. s. w., allgemein in 2^n gleiche Teile zu teilen.

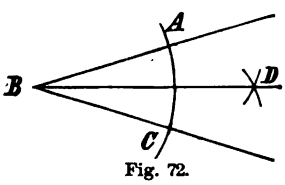


Fig. 72.

5) Einen gegebenen Winkel zu halbieren.

Man beschreibe um den Scheitel B des gegebenen Winkels (Fig. 72) mit beliebigem Radius einen Kreisbogen, der den einen Schenkel in A, den andern in C schneidet, und darauf um A mit beliebigem und um C mit demselben Radius einen Kreisbogen. Den einen Schnittpunkt D der beiden Bogen verbinde man mit B; dann halbiert DB den

gegebenen Winkel. Verbindet man D mit A und C, so stimmen die Dreiecke ABD, CBD in den drei Seiten überein, und die Winkel ABD, CBD sind daher gleich als entsprechende Stücke kongruenter Dreiecke.

Da DB den Kreisbogen AC halbieren muß, so kann man den Mittelpunkt des Bogens AC praktisch durch Probieren wie den einer Strecke finden und ihn mit B verbinden.

Durch wiederholte Halbierung der Teile von ABC kann man die Aufgabe lösen:

Einen gegebenen Winkel in 4, oder 8, oder 16 u. s. w., allgemein in 2^n gleiche Teile zu teilen.

6) Eine gegebene Strecke in eine beliebige Anzahl gleicher Teile zu teilen.

Um die Strecke AB (Fig. 73) in n gleiche Teile zu teilen, ziehe man von A die beliebige Gerade AC, trage auf dieser von A aus eine beliebige Strecke n mal nacheinander ab, so daß man die Strecken AD, DE u. s. w. erhält, verbinde den letzten so auf AC erhaltenen Punkt F mit dem andern Endpunkt B der gegebenen Strecke und ziehe durch die übrigen auf AC erhaltenen Punkte die Parallelen DG, EH u. s. w. zu FB. Diese teilen AB in n gleiche Teile. Der Beweis der Richtigkeit dieser Konstruktion folgt aus § 13 Nr. 4, 4).

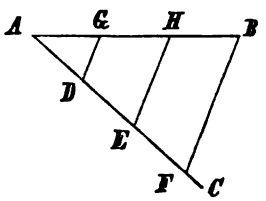


Fig. 73.

Während man so eine Strecke in jede beliebige Anzahl gleicher Teile teilen kann, ist dies bei einem Winkel durch elementare Konstruktion nicht möglich Nur die in Aufgabe 5) erwähnten Teilungen eines Winkels lassen sich allgemein ausführen; schon die Teilung eines beliebigen Winkels in drei gleiche Teile (die sogenannte Trisektion des Winkels) ist mit Lineal und Zirkel allein nicht ausführbar. Teilungen von Winkeln sind nur in einzelnen besondern Fällen ausführbar.

7) Einen rechten Winkel in drei gleiche Teile zu teilen.

Da man nach Aufgabe 4) in Nr. 1 einen Winkel von 60^0 zeichnen, und somit mit Hilfe von Aufgabe 6) einen solchen von einem rechten Winkel abtragen kann, so erhält man als Unterschied einen Winkel von 30^0, d. h. den dritten Teil des rechten. Am einfachsten gestaltet sich diese Konstruktion, wie folgt: Man beschreibe um den Scheitel B des rechten Winkels (Fig. 74) mit beliebigem Radius einen Kreisbogen, der die Schenkel in A und C schneidet, und sodann mit demselben Radius um A und um C Bogen, die den ersten im Winkelraume des rechten Winkels in D und E schneiden. Verbindet man E und D mit B, so ist der Winkel ABC in drei gleiche Teile geteilt. Zieht man AD und EC, so sind die Dreiecke ABD und BEC gleichseitig.

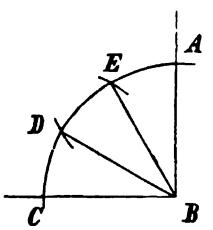


Fig. 74.

Da man mit Hilfe der Aufgaben 1) und 2) einen rechten Winkel zeichnen kann, so ergeben sich hieraus und durch Anwendung der Aufgabe 5) die Lösungen der Aufgaben:

Einen Winkel von 30^0, von 45^0, von 15^0 zu zeichnen.

Die Konstruktion von Vielecken läßt sich auf die von Dreiecken zurückführen, in die man das Vieleck durch Diagonalen oder auf andre Weise zerlegt.

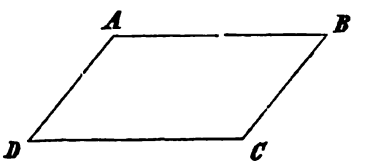


Fig. 75.

8) Die Konstruktion eines Parallelogramms kann, wenn z. B. zwei anstoßende Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind, dadurch geschehen, daß man zunächst AB (Fig. 75) gleich

der einen gegebenen Seite zeichnet, an diese in B den gegebenen Winkel anträgt und den angelegten Schenkel BC gleich der zweiten gegebenen Strecke macht. Dann zieht man entweder CD parallel zu BA und AD parallel zu BC, oder man beschreibt um C mit dem Radius BA und um A mit dem Radius BC Kreisbogen und verbindet den Schnittpunkt D der beiden mit A und C, oder man zieht durch C die Parallele zu BA, gibt ihr die Länge $CD = BA$ und verbindet D mit A.

Insbesondere sind in dieser Aufgabe die folgenden als besondere Fälle enthalten: Ein Rechteck aus den beiden anstoßenden Seiten zu konstruieren. Einen Rhombus aus der Seite und einem Winkel zu konstruieren. Ein Quadrat aus der Seite zu konstruieren.

3. Von den Aufgaben zu den Sätzen vom Kreise sind folgende als fundamental zu erwähnen:

1) Zu einem gegebenen Kreise oder Kreisbogen den Mittelpunkt zu finden.

Man ziehe zwei nicht parallele Sehnen und konstruiere zu jeder die Mittelsenkrechte. Diese müssen einander in dem gesuchten Mittelpunkte schneiden.

2) Den Umkreis eines Dreiecks zu konstruieren.

Man konstruiere zu zwei Seiten die Mittelsenkrechten, so ist ihr Schnittpunkt der Mittelpunkt des Umkreises. Als Kontrolle für die Genauigkeit der Zeichnung konstruiere man auch die Mittelsenkrechte der dritten Seite, die durch den Schnittpunkt der beiden ersten gehen muß. Man prüfe auch, ehe man den Kreis schlägt, mit dem Stechzirkel, ob die Entfernungen des Mittelpunkts von den Eckpunkten einander gleich sind.

3) Den Inkreis und die Ankreise eines Dreiecks zu konstruieren.

Man konstruiere die Halbierungslinien der Innenwinkel und ziehe durch die Eckpunkte zu jeder Halbierungslinie die Senkrechte. Diese Senkrechten sind die Halbierungslinien der Außenwinkel. Dann müssen sich die Halbierungslinien der Innenwinkel im Mittelpunkt des Inkreises und die Halbierungslinie jedes Innenwinkels mit den Halbierungslinien der beiden andern Außenwinkel in dem Mittelpunkte eines Ankreises schneiden. Von den Mittepunkten der vier Kreise fälle man Senkrechte auf die Dreiecksseiten oder deren Verlängerungen. Die drei von einem Mittelpunkt gefällten Senkrechten müssen einander gleich sein. Wenn man dies geprüft hat, kann man die Kreise ziehen.

4) An einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte die Tangente zu legen.

Man ziehe durch den gegebenen Punkt die Senkrechte zu dem durch diesen Punkt gehenden Radius.

5) An einen gegebenen Kreis von einem außerhalb gegebenen Punkte die Tangenten zu legen.

Man konstruiere über der Verbindungslinie des gegebenen Punktes A und des Mitttelpunktes M als Durchmesser den Kreis und verbinde die Schnittpunkte B und C der beiden Kreise mit A. Jede dieser Verbindungslinien ist eine Tangente des gegebenen Kreises, denn die Winkel MBA und MCA sind rechte als Peripheriewinkel über einem Halbkreise.

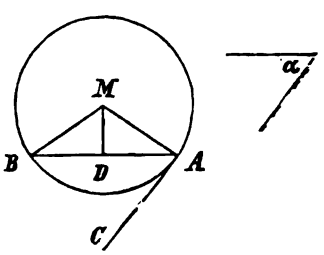


Fig. 76.

6) Über einer gegebenen Strecke als Sehne den Kreisbogen zu beschreiben, der einen gegebenen Peripheriewinkel faßt.

Es sei AB (Fig. 76) die gegebene Strecke. Man lege an AB in A den gegebenen Winkel $BAC = \alpha$ an, konstruiere die Mittelsenkrechte zu AB und auf AC in A die Senkrechte und beschreibe um den Schnittpunkt M der beiden Senkrechten mit $MA = MB$ als Radius den Kreisbogen. Da AC senkrecht zu dem Radius MA ist, so ist AC eine Tangente;

$\angle BAC = \alpha$ ist also ein Sehnen-Tangentenwinkel und also gleich jedem auf demselben Bogen stehenden Peripheriewinkel desselben Kreises.

Ist insbesondere α ein rechter Winkel, so hat man nur über AB als Durchmesser den Halbkreis zu beschreiben.

Dritter Abschnitt.

Vergleichung von Längen und von Flächeninhalten geradliniger Figuren.

§ 21. Das Messen und das Verhältnis der Längen von Strecken.

1. Das ursprüngliche Interesse, das die Menschen an der Geometrie gehabt haben, ist, wie der Name deutlich sagt, aus dem praktischen Bedürfnis erwachsen, Figuren auf der Erdoberfläche ihrer Größe nach miteinander zu vergleichen, zu messen. Noch heute heißt der Feldmesser oder Geodät, dessen Aufgabe es ist, Grundstücke der Gestalt und Größe nach zu bestimmen, im Volksmund der Geometer.

Eine Größe messen heißt, bestimmen wieviel Einheiten sie enthält. Die Einheit ist eine als bekannt vorausgesetzte, gewöhnlich konventionell bestimmte, Größe derselben Art. Um ein Gewicht zu messen bedarf man einer Gewichtseinheit; um eine Zeit zu messen, einer Zeiteinheit; um eine Wärmemenge zu messen, einer Wärmeeinheit. Diese Einheiten müssen jedem aus Erfahrung bekannt und vertraut sein. Eine Angabe einer Größe in einer unbekannten Einheit ist nichtssagend.

Das Resultat der Messung ist eine Zahl, nämlich die Zahl der Einheiten der gemessenen Größe. Das Messen ist also die Zurückführung aller Größen auf die einfachste aber abstrakteste Größe der Mathematik: die Zahl. Dadurch ist es möglich, mit Größen verschiedenster Art zu rechnen wie mit Zahlen.

In der Geometrie werden Raumgrößen gemessen: Längen von Linien, Inhalte von Flächen, Volumina von Körpern. In der Planimetrie hat man nur Längen und Flächeninhalte ebener Figuren zu messen.

2. Mag es sich nun um die Messung von Raumgrößen oder von Größen andrer Art handeln, so hat man, da die zu messende Größe und die Einheit Größen derselben Art sind, zunächst die Aufgabe zu lösen: Das Verhältnis zweier gleichartiger Größen zu bestimmen. Der Begriff des Verhältnisses ist hergenommen von zwei natürlichen Zahlen. Das Verhältnis zweier natürlicher Zahlen findet man durch Division und wird also angegeben durch ihren Quotienten. Wenn sich zwei natürliche Zahlen wie 5 zu 3 verhalten, so heißt dies: die größere ist $1\frac{2}{3}$ mal so groß als die kleinere oder die kleinere ist $\frac{3}{5}$ der größern. Das Verhältnis zweier natürlicher Zahlen ist im allgemeinen nicht wieder eine natürliche, sondern eine neue Art von Zahlen: eine gebrochene Zahl. Diesen Begriff des Verhältnisses überträgt man auf irgend zwei gleichartige Größen A und B und bezeichnet ihr Verhältnis mit

$$A : B \text{ oder } \frac{A}{B} .$$

Das Verhältnis irgend zweier gleichartiger Größen bestimmen, kann also nur heißen, es durch das Verhältnis zweier natürlicher Zahlen ausdrücken, also

$$\frac{A}{B} = \frac{p}{q}$$

setzen, wobei p und q natürliche Zahlen sind. Die Möglichkeit dieser Gleichung leuchtet zunächst, außer in dem besondern Falle, daß A ein Vielfaches von B

ist, nur ein, wenn A und B das p- und q-fache einer dritten Größe M derselben Art sind; denn ist

$$A = pM, \quad B = qM \ ,$$

so kann man daraus, wie bei Zahlen, folgern:

$$\frac{A}{B} = \frac{p}{q} \ .$$

Die Aufgabe, das Verhältnis zweier gleichartiger Größen zu bestimmen, ist also auf die andre zurückgeführt, eine dritte Größe derselben Art zu finden, von der beide Vielfache sind.

Bei zwei Strecken A und B kann man diese Aufgabe durch ein Verfahren lösen, das der Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Teilers zweier natürlicher Zahlen durch Kettendivision (vgl. *Arithmetik und Algebra* § 6 Nr. 3) analog ist. Man kann nämlich durch Konstruktion eine Strecke durch eine andre dividieren, indem man die kleinere auf der größern so oft nacheinander abträgt als es möglich ist. Trägt man den Rest, der im allgemeinen übrig bleiben wird, wieder auf der kleinern so oft auf, als es angeht und den nunmehr bleibenden Rest auf den vorigen und wiederholt das Verfahren bis man auf einen Rest kommt, der in dem vorigen ohne Rest enthalten ist, so ist dieser letzte Rest die größte Strecke, von denen die beiden gegebenen Strecken Vielfache sind. Teilt man diese in eine beliebige Anzahl gleicher Teile, so ist auch jeder Teil in den beiden gegebenen Strecken ohne Rest enthalten. Es genügt daher, diese größte Strecke M und damit die kleinsten natürlichen Zahlen p und q zu bestimmen, deren Verhältnis gleich dem Verhältnis der beiden Strecken ist.

3. Die Kettendivision muß bei zwei natürlichen Zahlen notwendig mindestens auf den Rest 1 führen, der dann in dem vorhergehenden ohne Rest enthalten ist. Bei dem analogen Verfahren mit zwei Strecken ist es aber nicht als notwendig einzusehen, daß man immer auf einen Rest kommen müsse, der in dem vorigen ohne Rest aufgeht. Man muß also die Möglichkeit offen halten, daß es zwei Strecken gäbe, die nicht Vielfache einer dritten sind. Das dies in der Tat der Fall ist, zeigt folgendes Beispiel:

Es sei ABC (Fig. 77) ein gleichschenkliges und bei B rechtwinkliges Dreieck. Man trage auf der Hypotenuse AC eine Strecke CD gleich der Kathete BC ab. Da $AC - BC < AB$ ist, so muß der Rest AD kleiner als AB, und also auch kleiner als BC sein, so daß sich also BC nicht noch einmal von AD abtragen läßt. Man errichte nun in D auf AC die Senkrechte, die AB in E trifft, so muß das rechtwinklige Dreieck AED, da es bei A einen Winkel von 45^0 hat, gleichschenklig, d. h. es muß $AD = DE$ sein. Zieht man ferner DB, so ist das Dreieck DCB gleichschenklig, also $\angle CDB = \angle CBD$; folglich sind auch die beiden Winkel, die einen von diesen zu einem rechten ergänzen, nämlich EDB und EBD, einander gleich, woraus folgt, daß das Dreieck DEB gleichschenklig, d. h. $DE = EB$ ist. Mithin ist auch $BE = AD$. Trägt man also den auf AC gebliebenen Rest AD von B aus auf der BC gleichen Strecke BA ab, so kommt man nach einem einmaligen Abtragen zu dem Punkte E, und da sich auf das gleichschenklig rechtwinklige Dreieck AED dasselbe Verfahren, wie vorher bei ABC, anwenden läßt, so bleibt nach nochmaligem Abtragen der Strecke AD auf AE ein Rest AF, der kleiner als AD ist. Mit diesem Reste kann man in gleicher Weise verfahren, wie vorher mit dem Reste AD; d. h. errichtet man in F auf AF die Senkrechte, so erhält man ein drittes gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck AFG, und es ist $AF = FG = GD$. Man kann daher den

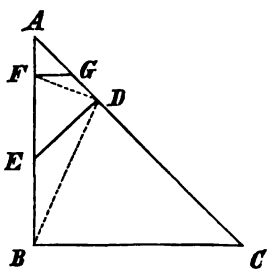


Fig. 77.

Rest AF wieder zweimal auf dem vorigen Reste AD abtragen und erhält aufs neue einen Rest u. s. w. Da man, in dieser Weise fortfahrend, stets zu neuen gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecken und somit stets zu einem neuen Reste kommen muß, so ist nachgewiesen, daß Hypotenuse und Kathete eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks nicht Vielfache derselben Strecke sein können. Dann ist es aber auch nicht möglich, ihr Verhältnis durch das Verhältnis zweier natürlicher Zahlen auszudrücken.

Hat man durch das der Kettendivision analoge Verfahren gefunden, daß zwei gegebene Strecken Vielfache einer dritten sind, so nennt man sie kommensurabel. Das Verhältnis kommensurabler Strecken ist also gleich dem Verhältnis von zwei natürlichen Zahlen. Hypotenuse und Kathete eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks sind dagegen inkommensurabel.

Der Fall der Inkommensurabilität erscheint zunächst als eine Ausnahme. Es ist aber zu beachten, daß man die angeführte Konstruktion zwar ohne Ende fortgesetzt denken kann, daß man jedoch bei der praktisch ausgeführten Zeichnung nach einigen Wiederholungen auf einen Rest kommen wird, der so klein ist, daß die nochmalige Wiederholung unmöglich ist. Auch bei der größten technischen Fertigkeit des Zeichners ist die Genauigkeit der Zeichnung abhängig von der Genauigkeit des Lineals und des Zirkels wie von der Schärfe der Sinne, des Auges und des Gefühls. Die Konstruktion kann niemals wie die Rechnung vollkommen genau ausgeführt werden, sondern nur bis zu einer gewissen Grenze der Genauigkeit angenähert und wenn man auch mit vollkommeneren Instrumenten und mit bewaffnetem Auge die Konstruktion weiterführen wollte, so würde es selbst dann eine solche Grenze geben, die praktisch nicht überschritten werden kann. Man wird also bei wirklicher Ausführung der Konstruktion finden, daß auch Hypotenuse und Kathete eines gleichschenklig rechtwinkligen angenähert kommensurabel sind, wenn man auch theoretisch überzeugt ist, daß sie es nicht vollkommen genau sind.

Andrerseits wird man, wenn man zwei Strecken vor sich hat, die kommensurabel sind, entweder aus theoretischen Gründen oder weil sie als solche hergestellt wurden, bei der praktischen Ausführung des der Kettendivision analogen Verfahrens ebenfalls nach einigen Wiederholungen im Zweifel sein, ob der erhaltene Rest wirklich vollkommen genau gleich Null oder nur bis zu der erreichbaren Genauigkeit als Null anzusehen ist. Man ist also hier in demselben Fall wie bei der Konstruktion an dem gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck, wenn man vorher von der Inkommensurabilität der beiden Strecken nicht wüßte.

4. Aus dieser Betrachtung geht hervor, daß man von zwei gegebenen oder beliebig angenommenen Strecken im allgemeinen voraussetzen muß, daß sie inkommensurabel sind. Wenn sie sich aus theoretischen Gründen als kommensurabel erweisen, so ist dies ein besonderer Fall. Aber man kann auch annehmen, daß irgend zwei Strecken immer, wenigstens bis zu einer notwendigen und hinreichenden Genauigkeit angenähert Vielfache einer dritten Strecke, d. h. daß sie wenigstens angenähert kommensurabel sind. Man kann daher auch im allgemeinen von dem Verhältnis irgend zweier Strecken sprechen; nur wird dieses im allgemeinen nicht vollkommen genau durch das Verhältnis zweier natürlicher Zahlen ausdrückbar sein, aber wenigstens angenähert. Damit führt die Betrachtung inkommensurabler Strecken auf eine neue Art von Zahlen, nämlich solcher, die sich nicht vollommen genau durch gebrochene Zahlen ausdrücken lassen; sie heißen irrationale Zahlen und im Gegensatz dazu nennt man nun die früher bekannten rationale Zahlen. Die Unterscheidung ist aber bei der praktischen Anwendung unnötig, da man für eine irrationale Zahl bis zu einer hinreichenden Genauigkeit angenähert, eine rationale Zahl setzen und mit dieser rechnen kann.

Es ergibt sich also: Zwei Strecken a und b können immer als Vielfache einer Strecke λ betrachtet werden, so daß

$$a = p\lambda, \quad b = q\lambda, \quad \frac{a}{b} = \frac{p}{q}$$

ist, wobei p und q natürliche Zahlen sind. Es läßt sich also ihr Verhältnis immer durch das Verhältnis zweier natürlicher Zahlen ausdrücken. Die Strecke λ kann um so genauer, als in beiden ohne Rest enthalten, angesehen werden, je kleiner sie ist. Für jeden Fall ist sie also hinreichend klein, die Zahlen p und q sind also umgekehrt hinreichend groß zu nehmen.

Dieses Resultat ist ohne weiteres auf drei und mehr Strecken auszudehnen.

5. Die Begriffe der rationalen und irrationalen Zahl mögen folgende Beispiele noch weiter erläutern: Es sei die Strecke b auf der Strecke a fünfmal, der Rest r_1, der kleiner als b ist, auf b dreimal, der hier bleibende Rest r_2 auf r_1 zweimal, der dritte Rest r_3 auf r_2 viermal, und zwar ohne Rest, abgetragen. Dann ist

$$\begin{aligned} a &= 5b + r_1 \\ b &= 3r_1 + r_2 \\ r_1 &= 2r_2 + r_3 \\ r_2 &= 4r_3 \quad , \end{aligned}$$

also

$$r_1 = 2 \cdot 4r_3 + r_3 = 9r_3; \quad b = 27r_3 + 4r_3 = 31r_3; \quad a = 155r_3 + 9r_3 = 164r_3 .$$

Das Verhältnis von a zu b ist also rational gleich $\frac{164}{31}$, oder b ist in a $5\frac{9}{31}$ mal enthalten.

Ist umgekehrt das Verhältnis $a:b$ zweier Strecken, beispielsweise gleich $\frac{111}{40}$, bekannt, so ergibt das im praktischen Rechnen zur Auffindung des größten gemeinschaftlichen Teilers von 111 und 40, sowie zur Verwandlung von $\frac{111}{40}$ in einen Kettenbruch angewendete Verfahren der Kettendivision:

$$\begin{array}{r} 111 : 40 = 2 \\ \underline{80} \\ 40 : 31 = 1 \\ \underline{31} \\ 31 : 9 = 3 \\ \underline{27} \\ 9 : 4 = 2 \\ \underline{8} \\ 4 : 1 = 4 \quad , \end{array}$$

daß sich b auf a zweimal, der Rest r_1 auf b einmal, der Rest r_2 auf r_1 dreimal, der Rest r_3 auf r_2 zweimal, und endlich r_4 auf r_3 viermal ohne Rest abtragen läßt.

Das Beispiel des gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hyptenuse a und dessen Kathete b ist, führt entsprechend zu den Gleichungen:

$$\begin{aligned} a &= 1b + r_1 \\ b &= 2r_1 + r_2 \\ r_1 &= 2r_2 + r_3 \\ r_2 &= 2r_3 + r_4 \\ &\cdots \end{aligned}$$

Es ist also, wenn man diese Gleichungen der Reihe nach durch b, r_1, r_2, r_3, ... dividiert:

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{r_1}{b}, \quad \frac{b}{r_1} = 2 + \frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{r_1}{r_2} = 2 + \frac{r_3}{r_2}, \ldots$$

also

$$\frac{a}{b} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}$$

Der Wert des irrationalen Verhältnisses ist also hier durch einen unendlichen periodischen Kettenbruch dargestellt. Die aufeinander folgenden Partialbrüche dieses Kettenbruchs (*Arithmetik und Algebra* § 36) geben rationale Näherungswerte des irrationalen Verhältnisses an. Sie werden um so genauer, je größer Zähler und Nenner sind.

Hat der vollständige Kettenbruch den Wert x, so ist

$$x - 1 = \frac{1}{2 + (x - 1)}, \quad x^2 - 1 = 1, \quad x = \sqrt{2} \ .$$

Es ist also das Verhältnis durch die irrationale Quadratwurzel aus 2 dargestellt, ein Resultat, das auch aus dem pythagoreischen Lehrsatz (§ 25) abgeleitet werden kann.

6. Da es nun immer möglich ist, das Verhältnis der Längen zweier Strecken wenigstens mit hinreichender Genauigkeit angenähert durch das Verhältnis zweier natürlicher Zahlen auszudrücken, so kann man nun auch das Verhältnis der Länge einer Strecke zur Längeneinheit bestimmen, also angeben, wie vielmal die Längeneinheit in der zu messenden Strecke enthalten ist; d. h. die Länge messen. Die Bestimmung dieses Verhältnisses geschieht aber praktisch nicht auf dem Umwege der Kettendivision, sondern durch eigentliche Division; indem man die Längeneinheit so oft von der zu messenden Länge wegnimmt als es angeht. Die konventionelle und gesetzlich festgelegte Längeneinheit ist der Meter (*m*). Man nimmt also ein Maß, (einen Maßstab, ein Meßband u. dgl.) auf dem der Meter aufgetragen ist und legt es an die zu messende Strecke, je nach deren Länge mehrmals, an. Dadurch erfährt man die Zahl der ganzen Meter. Den Rest, der im allgemeinen übrig bleiben wird, mißt man der Reihe nach mit Teilen des Meters: Decimeter (*dm*), Centimeter (*cm*), Millimeter (*mm*), in die der aufgetragene Meter bereits geteilt ist. Wie weit diese Teilung getrieben wird, hängt von der praktisch erforderlichen Genauigkeit der Messung ab. Man kommt auch hier, wie in Nr. 3 gezeigt, im allgemeinen nicht auf einen Rest, der vollkommen genau gleich Null ist, sondern man ist genötigt, einen Rest, der kleiner ist als es der Grad der Genauigkeit der Messung erfordert, als Null anzusehen, zu vernachlässigen. So hat man eine Länge z. B. bis auf den Centimeter genau bestimmt, wenn man einen Rest, der schätzungsweise kleiner als 0,5 *cm* ist, als Null betrachtet. Den Grad der Genauigkeit bestimmt das praktische Bedürfnis: die Genauigkeit darf nicht zu gering sein, sonst würde die Messung ungenau, sie darf aber auch nicht zu groß sein, sonst würde der Aufwand an Mühe und Zeit dem Zwecke der Messung nicht entsprechen. Bei Längenmessungen von sehr hohem Genauigkeitsgrad, wie sie zu wissenschaftlichen Zwecken nötig sind, reicht das einfache Verfahren, wie es eben beschrieben, nicht aus; man bedarf dann besonderer Apparate. Ebenso ist eine genaue Messung von großen Längen, z. B. auf der Erdoberfläche, nur mit besondern Hilfsmitteln ausführbar und ist jedenfalls sehr mühsam und zeitraubend.

§ 22. Verhältnisse an geschnittenen Parallelen.

1. In § 13 Nr. 4 ist gezeigt worden, daß Parallelen, die auf einer beliebig sie schneidenden Geraden gleiche Strecken abschneiden, auch auf jeder andern sie schneidenden Geraden unter sich gleiche Strecken abschneiden müssen.

Hierdurch war zugleich die Lösung der Aufgabe geliefert, eine Strecke in eine Anzahl gleicher Teile zu teilen (§ 20 Nr. 2, 9)).

Dieser Satz kann wie folgt erweitert werden:

1) Werden parallele Gerade von irgend zwei Geraden geschnitten, so ist das Verhältnis je zweier auf einer dieser Geraden gebildeten Abschnitte gleich dem Verhältnis der entsprechenden Abschnitte der andern.

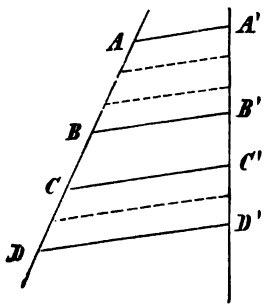


Fig. 78.

Die Abschnitte AB, CD (Fig. 78) der einen Geraden können bis zu jeder beliebigen Genauigkeit angenähert als Vielfache einer Länge λ angesehen werden, so daß

$$AB = m\lambda, \quad CD = n\lambda, \quad \frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$$

ist. Trägt man λ auf AB und CD, m und n mal auf und zieht durch die Teilpunkte Parallelen zu AA', BB', so werden auch $A'B'$ und $C'D'$ in m und n gleiche Teile λ' geteilt, so daß

$$A'B' = m\lambda', \quad C'D' = n\lambda'$$

ist. Demnach ist auch

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{m}{n} = \frac{AB}{CD} \quad .$$

Bei dem vorstehenden Satze ist es gleichgültig, ob die von den Parallelen geschnittenen Geraden konvergieren oder parallel sind, sowie ob der Schnittpunkt der parallelen Geraden zwischen zwei von jenen Parallelen liegt oder nicht. Ebenso kann eine der Parallelen durch den Schnittpunkt selbst gehen, so daß dieser gemeinschaftlicher Teilpunkt beider Geraden ist und die zugehörige Parallele überflüssig wird.

2. Als der einfachste Fall der Anwendung des vorstehenden Satzes kommt der folgende besonders häufig vor:

2) Zieht man in einem Dreieck zu einer Seite eine parallele Transversale, so teilt diese die beiden andern Seiten in gleichem Verhältnis.

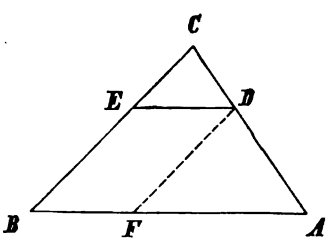


Fig. 79.

Ist also $DE \parallel AB$ (Fig. 79), so ist

$$CD : DA = CE : EB$$
$$CD : CA = CE : CB$$
$$DA : CA = EB : CB$$

Durch Vertauschung der Glieder dieser Proportionen ergeben sich auch die folgenden:

$$CD : CE = DA : EB = CA : CB$$

d. h. es verhalten sich die beiden obern (d. i. die dem gemeinschaftlichen Eckpunkt anliegenden) Abschnitte zu einander wie die entsprechenden untern Abschnitte, und wie die ganzen Seiten.

Diese Sätze lassen sich noch durch den weiteren Satz ergänzen:

3) Die Transversale steht zu der ihr parallelen Seite in demselben Verhältnis, wie ein oberer Abschnitt einer Seite zur ganzen Seite. Zieht man DF parallel zu CB, so ist — da FD ebenso parallele Transversale des Dreiecks zu BC, wie DE zu BA ist — auch

$$BF : BA = CD : CA \quad ,$$

und da BF und ED als Parallelen zwischen Parallelen gleich sind, so ist auch

$$ED : BA = CD : CA \quad ,$$

was zu beweisen war.

Ist also z. B. $CD = \frac{1}{3} CA$, so ist auch $CE = \frac{1}{3} CB$; $DA = \frac{2}{3} CA$, $EB = \frac{2}{3} CB$ und $ED = \frac{1}{3} BA$.

Auf diesem Satze beruht die Konstruktion des zum Messen und Abtragen einer Strecke mit dem Stechzirkel wichtigen Transversal-Maßstabes.

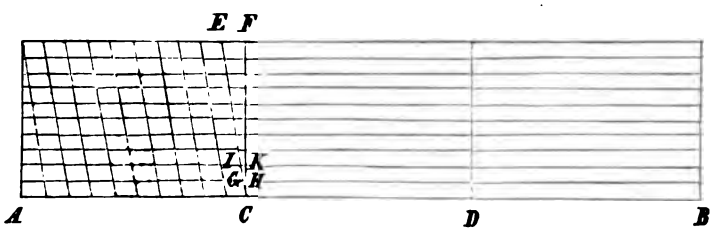


Fig. 80.

Ist auf AB (Fig. 80) eine Längeneinheit wiederholt abgetragen und die erste der erhaltenen Strecken AC, in ihre Unterabteilungen, hier also dezimal geteilt: ist ferner ein einzelner Teil von AC zu klein, um ihn noch einmal in zehn gleiche Teile deutlich teilen zu können, so benutzt man zur Abmessung dieser Hundertstel von AC die über AB liegenden, ihr parallelen und, wie die Figur zeigt, durch Transversalen geteilten Strecken. Im Dreieck EFC, dessen Seite CF in zehn gleiche, im übrigen aber, da CF beliebig lang angenommen werden kann, beliebig große Teile geteilt ist, muß die an C zunächstliegende zu EF parallele Transversale GH gleich $\frac{1}{10} EF = \frac{1}{100} AC$, die zweite IK gleich $\frac{2}{10} EF$, u. s. w. sein, denn es ist

$$GH : EF = CH : CF = 1 : 10: \quad IK : EF = CK : CF = 2 : 10, \text{ u. s. w.}$$

Sind die Teile CH, HK, ... lang genug, so kann man noch durch Schätzung 1, 2, 3, ... Zehntel ablesen und eine abzumessende Strecke mit dem Stechzirkel zwischen zwei der Parallelen zu AB bringen.

Ist z. B. eine Länge von 2,743 Längeneinheiten ($AC = 1$) abzumessen, so setze man die eine Spitze des Zirkels auf die Senkrechte durch B zu AB, zwischen die vierte und fünfte Parallele in 0,3 des Abstandes der beiden ein und öffne den Zirkel so weit, daß die andre Spitze auf eine zu AB gedachte Parallele auf der durch 0,7 von AC (von C aus gerechnet) gezogenen Parallele zu stehen kommt.

3. Der Satz 3) über parallele Transversalen eines Dreiecks gestattet die Umkehrung:

4) Sind zwei Seiten eines Dreiecks in gleichem Verhältnis geteilt, so ist die Verbindungslinie der Teilpunkte der dritten Seite parallel.

Ist (Fig. 81) $CE : EB = CD : DA$, so ist $DE \parallel AB$.

Denn wäre DE nicht parallel zu AB, so könnte man durch D eine andre Transversale DF des Dreiecks ABC ziehen, die parallel zu AB wäre. Dann müßte

$$CF : CB = CD : CA$$

sein. Da aber aus der vorausgesetzten Proportion folgt, daß auch

$$CE : CB = CD : CA$$

ist, und zwei Proportionen, die in drei gleichstelligen Gliedern übereinstimmen,

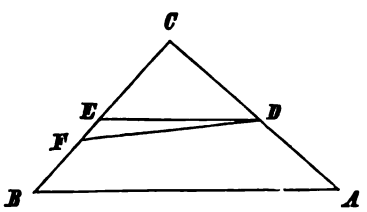


Fig. 81.

auch in den vierten übereinstimmen, so müßte $CF = CE$ sein, was nur möglich ist, wenn F mit E zusammenfällt.

Dagegen kann man nicht behaupten, daß wenn

$$ED : BA = CE : CB$$

ist, auch ED parallel zu BA sein müsse, den beschreibt man mit ED um E einen Kreisbogen, so kann dieser möglicherweise CA in einem zweiten Punkte D' treffen, so daß $ED' = ED$, aber nur eine von diesen Linien parallel zu BA ist.

Setzt man jedoch voraus, daß ED parallel zu BA gezogen und

$$ED : BA = CE : CB$$

sei, so kann man wieder indirekt beweisen, daß der Endpunkt D der Parallelen ED auf der Seite CA liegen muß.

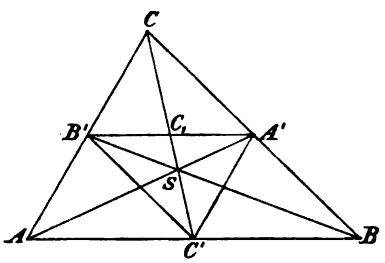


Fig. 82.

Zieht man in dem Dreieck ABC (Fig. 82) zwei Mittellinien AA' und BB', die sich in S schneiden, so muß $A'B'$ parallel zu AB und halb so groß wie AB sein. Dann ist

$$AS : SA' = AB : A'B' = 2 : 1$$

und

$$BS : SB' = AB : A'B' = 2 : 1 \quad .$$

Die beiden Mittellinien teilen sich also gegenseitig im Verhältnis 2 : 1. Da dies auch von AA' und der dritten Mittellinie CC' gelten muß, so muß diese durch denselben Punkt S gehen. Man hat also den Satz:

5) Die drei Mittellinien eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkte und teilen sich gegenseitig im Verhältnis 2 : 1.

Der Schnittpunkt S der drei Mittellinien heißt wegen seiner physikalischen Eigenschaft der Schwerpunkt des Dreiecks.

Verbindet man die Halbierungspunkte A', B', C' der Seiten des Dreiecks, so erhält man das Seitenmittendreieck, dessen Seiten halb so groß wie die Seiten des Urdreiecks und ihnen parallel sind. Schneidet CC' die Seite $A'B'$ dieses Dreiecks in C_1, so ist

$$\frac{B'C_1}{AC'} = \frac{CC_1}{CC'} = \frac{A'C_1}{BC'} \quad ,$$

da aber $AC' = BC'$ ist, so muß auch $B'C_1 = C_1A'$ sein, d. h. C_1 ist der Mittelpunkt von $A'B'$ und S ist zugleich der Schwerpunkt des Seitenmittendreiecks.

Aus diesen Sätzen ergibt sich auch die Lösung der Aufgabe:

Eine gegebene Strecke in mehrere Teile zu teilen, die zueinander in gegebenen Verhältnissen stehen, oder eine Strecke in gegebenem Verhältnis zu teilen.

Man trägt auf einer beliebigen durch einen Endpunkt A der gegebenen Strecke AB gezogenen Geraden von A aus Strecken AC, CD, DE, ... nacheinander ab, die in dem gegebenen Verhältnis stehen; den letzten so erhaltenen Punkt verbindet man mit B und zieht durch die übrigen Punkte C, D, ... die Parallelen zu dieser Verbindungslinie. Die Parallelen schneiden AB, wie aus dem Satze 1) hervorgeht, in den gesuchten Teilpunkten X, Y, ...

Die Strecken AC, CD, DE, ... erhält man, wenn die betreffenden Verhältnisse durch natürliche Zahlen m, n, p, ... gegeben sind, indem man eine beliebige Strecke zuerst m mal, dann n mal, p mal u. s. w. abträgt.

§ 23. Innere und äußere Teilung einer Strecke. Harmonische Teilung.

1. Bewegt sich auf der Strecke AB ein Punkt X in der Richtung von A nach B, so daß er stetig die Lagen aller Punkte der Strecke erhält und immer

$$AX + XB = AB$$

ist, so ist eine Lage von X bestimmt durch das Verhältnis der Teile AX und XB in die er die Strecke teilt; denn gemäß der Konstruktion in § 22 Nr. 2 kann er bestimmt werden, wenn dieses Teilverhältnis $AX : XB$ gegeben ist. Fällt zunächst X mit A zusammen, ist also $AX = 0$, so hat das Teilverhältnis den Wert 0; bei der beginnenden Bewegung wächst sein Wert und ist zwischen A und dem Mittelpunkt M der Strecke ein echter Bruch. Fällt X mit M zusammen, so ist es gleich 1; über M hinaus wird es ein unechter Bruch und ist X in B angelangt, so ist sein Wert unendlich groß. Es entspricht also jedem Werte des Teilverhältnisses zwischen 0 und ∞ ein bestimmter Punkt X.

Es steht frei, den Punkt X in derselben Richtung von B an sich weiter bewegen zu lassen, so daß er in die Verlängerung von AB über B hinaus übertritt. Dann gibt es noch immer ein Verhältnis $AX : XB$, aber diese Strecken sind nicht mehr Teile von AB im gewöhnlichen Sinne. Doch ist auch hier AX der Abstand des bewegten Punktes X vom Ausgangspunkt A und XB der Abstand vom Endpunkt B der Strecke. Erweitert man also den Begriff Teile einer Strecke, indem man darunter die Entfernungen eines ihrer Punkte von den Endpunkten versteht, so kann man auch in dem Falle, daß X in der Verlängerung von AB liegt, von dem Teilverhältnis $AX : XB$ sprechen. Man unterscheidet diese Teilung als äußere von der Teilung im gewöhnlichen Sinne, die man innere Teilung nennt. Man kann also eine Strecke innen und außen teilen.

2. Bei der äußern Teilung würde zunächst die ganze Strecke nicht wie bei der innern als Summe, sondern als Differenz der Teile erscheinen. Wenn aber X in der Verlängerung von AB über B hinaus liegt, so muß man, wenn man zunächst AX zurückgelegt hat, die Strecke XB nicht wie bei dem Falle der innern Teilung in demselben sondern in entgegengesetztem Sinne wie AX durchlaufen. Diesen entgegengesetzten Sinn kann man zweckmäßig wie in der Arithmetik dadurch ausdrücken, daß man die absolute Länge XB mit dem entgegengesetzten Vorzeichen wie die Länge AX bezeichnet. Tut man dies, so bleibt die Grundbeziehung

$$AX + XB = AB$$

auch in dem Falle erhalten, daß X in der Verlängerung von AB liegt. Dann hat man das Teilverhältnis $AX : XB$ im Falle der innern Teilung als eine positive, im Falle der äußern Teilung als eine negative Zahl anzusehen. Umgekehrt, durch ein positives Teilverhältnis wird ein Punkt der Strecke AB, durch ein negatives ein Punkt ihrer Verlängerung eindeutig bestimmt.

Der Übergang aus positiven in negative Werte des Teilverhältnisses geschieht im Punkte B, wo das Teilverhältnis $AX : XB = \infty$ war. Bei den unendlich großen Werten dieses Verhältnisses ist also eine Unterscheidung der Richtung ebenso unnötig wie bei dem Werte Null. Bewegt sich X von B in derselben Richtung weiter, so nimmt der absolute Wert des Teilverhältnisses, der immer größer als 1 ist, ab. Den absoluten Wert 1 kann das Verhältnis bei keinem endlichen Punkte erreichen, so daß man annehmen muß, daß dem unendlich fernen Punkte der Geraden das Teilverhältnis -1 zukommt. Bei weiterer Bewegung in gleichem Sinne würde sich der Punkt X auf der andern Seite der Geraden dem Anfangspunkt A wieder nähern.

3. Die Teilung einer Strecke AB (Fig. 83) in einem gegebenen Verhältnis kann am einfachsten ausgeführt werden, wenn man sich zwei Strecken herstellt, die das gegebene Verhältnis haben und diese auf zwei Parallelen, die man durch die Endpunkte A und B zieht, von diesen Punkten aus aufträgt. Soll die Strecke innen geteilt werden, so hat man die beiden Parallelen in entgegengesetztem Sinne zu ziehen und darauf die beiden Strecken AC und BD abzutragen; die Verbindungslinie CD teilt dann die Strecke in X. Bei äußerer Teilung müssen die Parallelen in gleichem Sinne gezogen werden und die Verbindungslinie CE der Endpunkte der auf ihnen abgetragenen Strecken AC und BE schneidet dann die Verlängerung von AB in dem gesuchten Teilpunkt Y. Ist $BD = BE$, so ist AB durch X und Y innen und außen in einem Verhältnis geteilt, das gleichen absoluten Wert aber entgegengesetztes Vorzeichen hat. Man sagt nun, die Strecke AB sei durch X und Y harmonisch geteilt, wenn

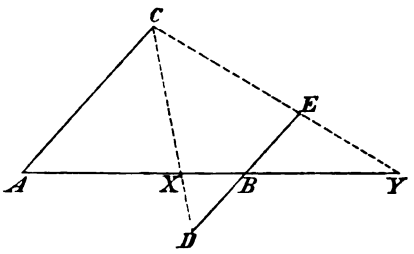


Fig. 83.

$$\frac{AX}{XB} = -\frac{AY}{YB}$$

ist. Der eine Teilpunkt X oder Y ist dann ein innerer, der andre ein äußerer. Bei Weglassung des Vorzeichens würde die Bedingung

$$\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YB}$$

besagen, das X und Y zusammenfallen.

Zu jedem innern oder äußern Teilpunkt einer Strecke gehört ein äußerer oder innerer zugeordneter harmonischer Teilpunkt. Dem Mittelpunkt der Strecke z. B. ist der unendlich ferne Punkt der Geraden zugeordnet und umgekehrt. Man sieht an Fig. 83 wie man, wenn einer der beiden, X oder Y, gegeben ist, den andern finden kann.

Da man die Bedingung der harmonischen Teilung auch schreiben kann

$$\frac{XA}{AY} = -\frac{XB}{BY},$$

so folgt, daß auch die durch X und Y begrenzte Strecke durch A und B harmonisch geteilt wird. Man nennt daher vier Punkte einer Geraden harmonische Punkte, wenn die durch zwei Punkte begrenzte Strecke von den beiden andern harmonisch geteilt wird. Je zwei zusammengehörige, A und B, X und Y, heißen dann zugeordnete Punkte.

4. Ist die Strecke $AB = a$ durch den Punkt X im Verhältnis $1 : \lambda$ geteilt, wobei die Zahl λ bei innerer Teilung positiv, bei äußerer negativ zu nehmen ist, so ergeben die Gleichungen

$$AX + XB = a, \quad \frac{AX}{XB} = \frac{1}{\lambda}$$

die Werte

$$AX = \frac{a}{1+\lambda}, \quad XB = \frac{\lambda a}{1+\lambda}.$$

Setzt man

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{p}{q},$$

wobei p und q zwei Zahlen, zwei Strecken oder irgend zwei gleichartige Größen bezeichnen können, so sind die Teile bei innerer Teilung

$$a \cdot \frac{p}{p+q} \quad \text{und} \quad a \cdot \frac{q}{p+q} \quad ;$$

bei äußerer sind die absoluten Werte der Teile, wenn $p > q$ ist:

$$a \cdot \frac{p}{p-q} \quad \text{und} \quad a \cdot \frac{q}{p-q} \quad .$$

5. Halbiert man in dem Dreieck ABC (Fig. 84), in dem $AC > CB$ ist, den Winkel ACB und seinen Außenwinkel BCM, so teilen die Halbierungslinien die Gegenseite AB innen in X und außen in Y. Zieht man durch B eine Parallele zu CA, so schneidet diese die Verlängerung von CX in D und CY in E. Nun ist $\angle CDB = \angle ACD$ als Wechselwinkel an Parallelen und da $\angle ACD = \angle DCB$ nach Voraussetzung ist, so ist auch $\angle CDB = \angle DCB$, also $\triangle CDB$ gleichschenklig und $BD = BC$. Ebenso ist $\angle CEB = \angle MCE = \angle ECB$, demnach ist auch $\triangle CBE$ gleichschenklig und $BE = BC$. Ist nun $AC = b$, $CB = a$, so ist auch $BD = BE = a$ und es wird $AB = c$ durch X innen im Verhältnis $b : a$, durch Y außen in dem Verhältnis von gleichem absoluten Werte geteilt. Damit ist der Satz bewiesen:

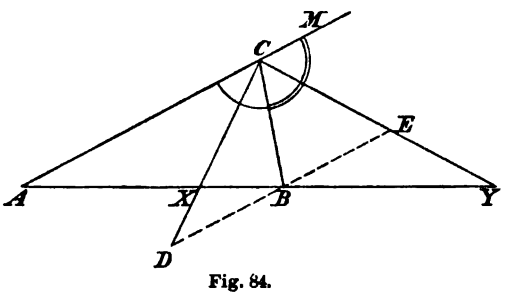


Fig. 84.

Die Halbierungslinien eines Innen- und des zugehörigen Außenwinkels eines Dreiecks teilen die Gegenseite harmonisch im Verhältnis der anstoßenden Seiten.

Man kann diesen Satz anwenden, um einen Winkel zu halbieren.

Nach Nr. 4 ist

$$AX = c \frac{b}{b+a}, \quad XB = c \frac{a}{b+a} \quad ,$$

$$AY = c \frac{b}{b-a}, \quad BY = c \frac{a}{b-a} \quad .$$

Da die Winkelhalbierenden CX und CY aufeinander senkrecht stehen, so geht der Kreis, dessen Durchmesser XY ist, durch C (§ 16 Nr. 2, 6)). Jeder Punkt dieses Kreises ist die Spitze eines Dreiecks über der Grundlinie AB und die Halbierungslinien des Winkels an der Spitze und seines Außenwinkels gehen immer durch X und Y. Die an die Grundlinie anstoßenden Seiten haben also stets das gleiche Verhältnis.

Dieser Kreis ist daher der geometrische Ort aller Punkte C, deren Entfernungen von den beiden festen Punkten A, B das gleiche Verhältnis $b : a$ haben. Man nennt ihn den Apollonischen Kreis der in diesem Verhältnis geteilten Strecke AB.

§ 24. Der Flächeninhalt geradliniger Figuren.

1. Eine geschlossene geradlinige Figur begrenzt einen endlichen Teil der Ebene. Die Größe dieses Teiles heißt der Flächeninhalt (kurz Inhalt) der Figur. Den Flächeninhalt einer Figur messen, heißt das Verhältnis dieses Flächeninhalts zur Flächeneinheit bestimmen. Als Flächeneinheit wählt man das Quadrat,

dessen Seite die Längeneinheit ist. Da die konventionelle Längeneinheit der Meter (m) ist, so nennt man die Flächeneinheit Quadratmeter (richtiger wäre Meterquadrat) mit der Abkürzung qm (m^2).

Da das Quadrat ein besonderer Fall des Rechtecks ist, so hat man zunächst die Aufgabe zu lösen, das Verhältnis der Inhalte zweier Rechtecke zu bestimmen. Da ein Rechteck nach Größe und Gestalt vollständig bestimmt ist durch zwei anstoßende Seiten, so müssen diese als bereits gemessen vorausgesetzt sein. Haben also die beiden Rechtecke die anstoßenden Seiten a_1, b_1 und a_2, b_2, so wird vorausgesetzt, daß diese a_1, b_1, a_2, b_2 Längeneinheiten enthalten. Dadurch müssen die Zahlen der Flächeneinheiten F_1, F_2 der beiden Rechtecke bestimmt sein. Es muß nun eine Länge λ geben, die entweder vollkommen genau oder wenigstens bis zu jeder notwendigen Genauigkeit angenähert in den vier Längen a_1, b_1, a_2, b_2, ohne Rest enthalten ist, von der die vier Längen also Vielfache sind. Es ist daher

$$a_1 = m_1 \lambda\,, \quad b_1 = n_1 \lambda\,; \quad a_2 = m_2 \lambda\,, \quad b_2 = n_2 \lambda$$

zu setzen, wobei m_1, n_1, m_2, n_2 natürliche Zahlen sind. Trägt man diese Länge λ auf allen vier Seiten, so oft es angeht, auf und zieht durch jeden Teilpunkt Parallelen zu der anstoßenden Seite, so wird das Rechteck 1 in $m_1 n_1$, das Rechteck 2 in $m_2 n_2$ kongruente Quadrate von der Seite λ zerlegt. Daher ist jedes Rechteck ein Vielfaches dieses Quadrats und man hat das Verhältnis der Inhalte beider Rechtecke:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1 n_1}{m_2 n_2}\;;$$

dies kann man auch schreiben:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{n_1}{n_2} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2}\;.$$

Man hat also den Satz erhalten:

Die Inhalte zweier Rechtecke verhalten sich zueinander wie die Produkte der Zahlen der Längeneinheiten zweier anstoßender Seiten.

Vergleicht man nach diesem Satze den Inhalt F eines Rechtecks mit den anstoßenden Seiten a und b und den Inhalt 1 der Flächeneinheit, d. h. eines Rechtecks, dessen anstoßende Seiten beide gleich 1 sind, so muß

$$\frac{F}{1} = \frac{a\,b}{1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1}$$

sein; d. h. die Zahl der Flächeneinheiten eines Rechtecks ist gleich dem Produkte aus der Zahl der Längeneinheiten der beiden anstoßenden Seiten. Da man die letzte Gleichung einfacher schreiben kann:

$$1) \qquad F = a\,b\;,$$

so drückt man den Satz in der abgekürzten Form aus:

Der Inhalt eines Rechtecks ist gleich dem Produkt der beiden anstoßenden Seiten.

Es wird also der Inhalt eines Rechtecks nicht durch eigentliche Messung, d. h. durch Abtragen der Flächeneinheit bestimmt, sondern die Aufgabe wird auf die Messung zweier Längen zurückgeführt, aus denen der Inhalt berechnet wird.

Umgekehrt zeigt der Satz 1), daß man unter dem Produkt zweier Strecken, d. h. der Zahlen ihrer Längeneinheiten eine Größe andrer Art, nämlich eine Fläche zu verstehen hat. Die Strecke ist die Raumgröße erster Dimension, der Länge; durch Multiplikation zweier Strecken erhält man eine Fläche, das ist die Raumgröße zweiter Dimension. Das Verhältnis zweier gleichartiger Größen,

also zweier Strecken oder zweier Flächen ist eine Zahl, die hiernach als Größe der nullten Dimension zu betrachten ist. Durch Division einer Fläche durch eine Strecke erhält man wieder eine Strecke.

Als besondern Fall von 1) erhält man den Inhalt eines Quadrats mit der Seite a

$$F = a^2$$

und umgekehrt ist die Seite eines Quadrats vom Inhalt F:

$$a = \sqrt{F} \quad .$$

Daraus erklären sich die Benennungen Quadrat für die zweite Potenz und Quadratwurzel für die zweite Wurzel: ebenso die Bezeichnung m^2 für *qm*.

Die anstoßenden Seiten eines Rechtecks bezeichnet man häufig als Grundlinie und Höhe, Länge und Breite, Breite und Tiefe, so daß man den Satz 1) z. B. auch in der Form: Der Inhalt eines Rechtecks ist gleich dem Produkt aus Grundlinie und Höhe, ausdrücken kann.

Beispiele:

1. Ist die eine Seite eines Rechtecks gleich 3,57 *m*, die andre gleich 5,21 *m* gemessen, so beträgt der Inhalt 3,57 · 5,21 Quadratmeter oder 18,5997 *qm*. Dieses Resultat ist jedoch nicht bis auf die vierte Dezimale brauchbar, wenn die Seiten nur bis zu einer halben Einheit der letzten Dezimalstelle genau bestimmt sind, wie in der Praxis stets anzunehmen ist. In diesem Falle ist vielmehr das Resultat zwischen 3,565 · 5,205 und 3,575 · 5,215 oder zwischen 18,55 ... und 18,64 ... schwankend, so daß nur $F = 18{,}6$ *qm* als sicheres Resultat angegeben werden darf. Wären dagegen die Seiten gleich 3,570 *m* und 5,210 *m* angegeben, so wären sie damit als bis zu einem halben Millimeter genau gemessen bezeichnet, und das Resultat 18,60 *qm* auf zwei Dezimalen sicher. Man wird also bei derartigen Rechnungen in der Praxis zur Vermeidung unnützer Dezimalen stets die abgekürzte Multiplikation anwenden.

2. Ein rechteckiges Stück Land ist 143,0 *m* lang und 88,5 *m* breit. Wieviel Miete bringt es ein, das Ar zu 0,85 ℳ?

Da der Inhalt des Landes gleich 143,0 · 88,5 *qm* und ein Ar gleich 100 *qm* ist, so hat man $\frac{143 \cdot 88{,}5}{100} \cdot 0{,}85$ ℳ zu berechnen und erhält als Resultat 107,6 ℳ.

3. Wie groß ist ein Quadrat, dessen Seite 0,25 *m* lang ist?

Man erhält 0,25 · 0,25 $m^2 = 0{,}0625\ m^2$ oder 625 cm^2, wenn die Seite als absolut genau angesehen wird, andernfalls ist das Resultat zwischen 600 cm^2 und 650 cm^2 unsicher.

4. Ein Quadrat, dessen Inhalt gleich der Summe der Inhalte zweier Rechtecke mit den Seiten a_1, b_1 und a_2, b_2 ist, hat die Seite

$$x = \sqrt{a_1 b_1 + a_2 b_2} \quad .$$

2. Das einfachste Verhältnis zweier Flächeninhalte ist die Gleichheit. Wenn zwei Figuren kongruent sind, so haben sie auch gleichen Inhalt. Setzt man an ein Paar kongruenter Figuren ein andres Paar von Figuren, die ebenfalls kongruent sind, an, oder nimmt sie von dem ersten weg, aber in beiden Fällen so, daß nicht wieder kongruente Figuren entstehen, so erhält man gleiche Figuren. Man hat also die Gleichheit auf die Kongruenz zurückgeführt.

Auf diese Art beweist man den Fundamentalsatz der Flächenvergleichung:

Parallelogramme mit gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind gleich.

Man kann nämlich zwei solche Parallelogramme *ABCD* und *EFGH* (Fig. 85) so zusammenstellen, daß ihre Grundlinien *AB* und *EF* in derselben Geraden und sie selbst auf derselben Seite dieser Geraden so liegen, daß ihre Umfänge keinen Punkt gemeinsam haben. Dann müssen wegen der Gleichheit der Höhen auch die den Grundlinien parallelen Seiten *DC* und *HG* in einer Geraden liegen, die parallel zu *ABEF* ist. Zieht man *CH*, so entsteht das Trapez *CHEB*, das zu jedem der Parallelogramme hinzugefügt werden kann. Man erhält dann die Trapeze *DHEA* und *CGFB*, die in je zwei entsprechenden Seiten und Winkeln übereinstimmen, mithin kongruent und also auch gleich sind. Nimmt man nun von jedem dieser Trapeze das gemeinschaftliche Stück *CHEB* weg, so müssen die übrig bleibenden Flächen ebenfalls gleich sein; diese Flächen sind aber die der ursprünglichen Parallelogramme.

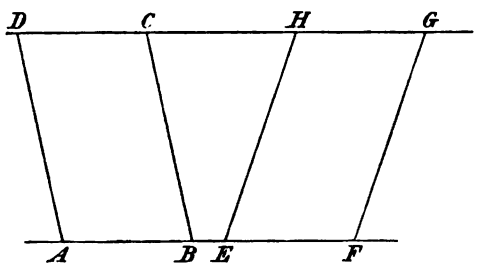


Fig. 85.

Man kann auch sagen, daß Parallelogramme mit gleichen Grundlinien und zwischen denselben Parallelen gleich sind. Da man ferner die Parallelogramme auch so zusammenstellen kann, daß ihre Grundlinien *AB* und *EF* einander decken, so kann man den Satz ausdrücken: Parallelogramme auf derselben Grundlinie und zwischen Parallelen sind gleich.

3. Aus dem Fundamentalsatz der Flächenvergleichung folgt weiter, daß ein Parallelogramm gleich einem Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe ist. Hat also ein Parallelogramm die Grundlinie g und die Höhe h, so ist sein Inhalt

$$2) \qquad F = g\,h \quad ,$$

d. h. der Inhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkt aus Grundlinie und Höhe. Parallelogramme sind daher einander gleich, wenn die Produkte aus Grundlinie und Höhe gleich sind, oder wenn sich ihre Grundlinien umgekehrt verhalten wie ihre Höhen.

Im allgemeinen verhalten sich die Inhalte von Parallelogrammen wie die Produkte aus Grundlinie und Höhe. Als besondere Fälle sind in diesem Satze die folgenden enthalten: Die Inhalte von Parallelogrammen mit gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen, und die von Parallelogrammen mit gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundlinien.

Da insbesondere bei demselben Parallelogramm jede Seite als Grundlinie genommen werden kann, so folgt, daß die Produkte aus einer Seite eines Parallelogramms und der auf ihr stehenden Höhe einander gleich sind, oder daß zwei anstoßende Seiten eines Parallelogramms sich zueinander umgekehrt verhalten wie die Höhen auf diesen Seiten.

Beispiele:

1. Ist die Grundlinie eines Parallelogramms 0,123 m, die Höhe 0,244 m, so ist sein Flächeninhalt gleich $0{,}123 \cdot 0{,}244 = 0{,}030012\ m^2$, sofern die Seiten als absolut genau gemessen vorausgesetzt werden können. Da dies aber in der Praxis nie der Fall ist, vielmehr die Resultate der Messungen der Seiten als abgekürzte Zahlen zu betrachten sind, so hat man hier auch die abgekürzte Multiplikation anzuwenden. Im vorliegenden Beispiel sind also die Zahlen 0,123 und 0,244 als Näherungswerte zu betrachten, deren Fehler bis zu 0,0005 m betragen kann; dies hat für das Resultat der Multiplikation eine Unsicherheit bis zu $0{,}0001(837)\ m^2$ zur Folge, so daß für den Inhalt des Parallelogramms nur das Resultat der abgekürzten Multiplikation, $0{,}030\ m^2$, angenommen werden kann.

2. Von einem Parallelogramm sei der Flächeninhalt $F = 6{,}44\ m^2$ und die Grundlinie $g = 3{,}14\ m$ bekannt: seine Höhe ist $h = F : g = 2{,}05\ m$.

3. Der Flächeninhalt eines Parallelogramms sei $F = 1{,}77\ m^2$ bekannt: man soll ein gleiches Parallelogramm zeichnen, dessen eine Höhe $h_1 = 1{,}23\ m$ und dessen andre Höhe $h_2 = 1{,}08\ m$ sei. Wie lang sind die Seiten dieses zweiten Parallelogramms zu machen?

Die Seiten sind

$$g_1 = \frac{F}{h_1} = 1{,}44\ m\,, \quad g_2 = \frac{F}{h_2} = 1{,}64\ m\ .$$

4. Ein Parallelogramm, dessen Grundlinie $g = 120$, und dessen Höhe $h = 84$ ist, soll in ein gleich großes Quadrat verwandelt werden; wie lang wird seine Seite x? Es ergibt sich

$$x = \sqrt{g\,h} = 100{,}4\ .$$

5. Man soll ein Rechteck zeichnen, das so groß ist als zwei gegebene Parallelogramme mit den Grundlinien $g_1 = 165$, $g_2 = 296$ und den Höhen $h_1 = 196$, $h_2 = 105$ zusammen, und das mit dem ersten die Grundlinie gemeinsam hat. Dann ist seine zweite Seite:

$$x = \frac{g_1 h_1 + g_2 h_2}{g_1} = h_1 + \frac{g_2 h_2}{g_1} = 384\ .$$

4. Die Berechnung des Flächeninhalts des Parallelogramms führt weiter zur Berechnung des Dreiecks. Ein Dreieck kann durch Parallelen zu zwei seiner Seiten durch den gegenüberliegenden Eckpunkt zu einem Parallelogramm ergänzt werden, das mit dem Dreieck dieselbe Grundlinie und dieselbe Höhe hat, und dessen Flächeninhalt — da das angelegte Dreieck dem ursprünglichen kongruent ist — doppelt so groß ist als der des Dreiecks. Hieraus folgt:

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich der Hälfte des Produkts aus Grundlinie und Höhe.

Ist also die Grundlinie g und die Höhe h, so ist der Inhalt des Dreiecks

$$3) \qquad F = \tfrac{1}{2} g h\ .$$

Insbesondere ist der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks gleich der Hälfte des Produkts seiner Katheten.

Da man jede Seite eines Dreiecks zur Grundlinie nehmen kann, so läßt sich der Inhalt in dreifacher Form darstellen. Bezeichnen a, b, c die drei Seiten, h_a, h_b, h_c die zugehörigen Höhen, F den Flächeninhalt, so ist

$$F = \tfrac{1}{2} a h_a = \tfrac{1}{2} b h_b = \tfrac{1}{2} c h_c\ .$$

Da hiernach auch $a h_a = b h_b$ ist, so ergibt sich durch Verwandlung dieser Gleichung in eine Proportion der Satz:

Zwei Seiten eines Dreiecks verhalten sich zueinander umgekehrt wie die auf ihnen stehenden Höhen.

Es läßt sich also aus zwei Seiten und der zu einer gehörigen Höhe die andre Höhe, aus zwei Höhen und der zu einer gehörigen Seite die andre Seite berechnen.

Insbesondere ist also auch das Produkt der Katheten a, b eines rechtwinkligen Dreiecks gleich dem Produkt der Hypotenuse c und der Höhe h auf der Hypotenuse, oder es ist

$$a b = c h\,, \quad h = \frac{a b}{c}\,, \quad c = \frac{a b}{h}\ ,$$

u. s. w.

Aus dem Satze über den Inhalt eines Dreiecks folgt ferner, daß alle über die Verhältnisse der Flächen von Parallelogrammen aufgestellten Sätze auch für Dreiecke gelten:

Dreiecke mit gleichen Grundlinien und gleichen Höhen, und insbesondere auch Dreiecke auf derselben Grundlinie und zwischen denselben Parallelen sind gleich;

Dreiecke mit gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen, und Dreiecke mit gleichen Höhen wie ihre Grundlinien;

Dreiecke verhalten sich im allgemeinen wie die Produkte aus ihren Grundlinien und ihren Höhen, und Dreiecke sind gleich, wenn diese Produkte gleich sind, oder wenn sich die Grundlinien zueinander umgekehrt wie die Höhen verhalten.

Endlich ist jedes Dreieck die Hälfte eines Parallelogramms, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat, und gleich einem Parallelogramm, das gleiche Grundlinie und halb so große Höhe, oder gleiche Höhe und halb so große Grundlinie hat.

Beispiele:

1. Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten $a = 3{,}1400\ m$ und $b = 2{,}1500\ m$ gemessen sind, ist

$$F = \tfrac{1}{2} a b = 3{,}3755\ m^2 \quad .$$

2. Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks sei $F = 345{,}50\ m^2$, und eine Kathete $a = 25{,}50\ m$; dann ist die andre Kathete

$$b = \frac{2F}{a} = 27{,}10\ m \quad .$$

3. Von einem Dreieck seien eine Seite a und die Verhältnisse der drei Höhen $h_a : h_b : h_c = m : n : p$ gegeben; man berechne seine beiden andern Seiten b, c. Aus

$$a h_a = b h_b$$

folgt

$$b = a \frac{h_a}{h_b} = a \frac{m}{n}$$

und entsprechend

$$c = a \frac{h_a}{h_c} = a \frac{m}{p} \quad .$$

4. Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks $a + b = s$, die auf a stehende Höhe h_a und der Flächeninhalt F seien gegeben; man berechne die beiden Seiten a und b.

Aus

$$F = \tfrac{1}{2} a h_a$$

folgt

$$a = \frac{2F}{h_a}, \quad b = s - \frac{2F}{h_a} \quad .$$

5. Ein Dreieck, dessen Grundlinie $g = 12{,}55\ m$ und dessen Höhe $h = 3{,}12\ m$ ist, soll in ein Quadrat verwandelt werden. Die Seite des Quadrats wird

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2} g h} = 4{,}12\ m \quad .$$

6. Ein dreieckiges Stück Land, dessen Grundlinie 185 m, und dessen Höhe 136 m beträgt, soll infolge einer anderweiten Vermessung in ein Rechteck verwandelt werden, dessen eine Seite 200 m ist. Wie lang wird die andre Seite x? Man hat

$$\tfrac{1}{2} \cdot 185 \cdot 136 = 200\, x; \quad x = \frac{185 \cdot 68}{100} = 62{,}9\ m \quad .$$

7. Den Inhalt F eines Rhombus aus den beiden Diagonalen e, f zu berechnen. Es ist

$$F = 2 \cdot \tfrac{1}{2} e \cdot \tfrac{1}{2} f = \tfrac{1}{2} ef \quad .$$

8. Die Katheten a, b eines rechtwinkligen Dreiecks aus ihrer Summe s und dem Flächeninhalt F zu berechnen. Man hat für a und b die Gleichungen:

$$a + b = s, \quad ab = 2F \quad .$$

Es ist:

$$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = s^2 - 8F$$

und da man $a > b$ voraussetzen kann,

$$a = \tfrac{1}{2}(s + \sqrt{s^2 - 8F}), \quad b = \tfrac{1}{2}(s - \sqrt{s^2 - 8F}) \quad .$$

9. Ein Dreieck mit der Grundlinie g und der Höhe h soll in ein Rechteck verwandelt werden, dessen Seiten sich zueinander wie $m : n$ verhalten. Man berechne diese beiden Seiten x und y. Es ist

$$xy = \tfrac{1}{2} gh, \quad \frac{x}{y} = \frac{m}{n} \quad .$$

Durch Multiplikation und Division der beiden Gleichungen und Ausziehen der Quadratwurzel ergeben sich;

$$x = \sqrt{\frac{m}{2n} gh}, \quad y = \sqrt{\frac{n}{2m} gh} \quad .$$

10. Um wieviel Prozent vergrößert sich der Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn jede seiner Katheten um p Prozent verlängert wird? Es ist:

$$\tfrac{1}{2} ab + \tfrac{1}{2} ab \cdot \frac{x}{100} = \tfrac{1}{2}\left(a + a\frac{p}{100}\right)\left(b + b\frac{p}{100}\right) = \tfrac{1}{2} ab\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \quad ;$$

aus dieser Gleichung erhält man

$$x = p\left(2 + \frac{p}{100}\right) \quad .$$

5. Durch die Bestimmung der Flächeninhalte von Dreiecken ist die Möglichkeit gegeben, den Flächeninhalt jeder geradlinigen ebenen Figur zu finden. Man hat zu diesem Zwecke nur nötig, sie mittels Diagonalen oder durch Verbindung eines im Innern der Figur angenommenen Punktes mit den Eckpunkten, in Dreiecke zu zerlegen, jedes dieser Dreiecke zu berechnen, und sie zu addieren.

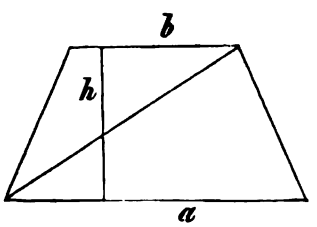


Fig. 86.

Dieses Verfahren führt zu einer einfachen Regel bei dem Trapez. Ein Trapez (Fig. 86) habe die parallelen Seiten a und b und die Höhe (den Abstand der parallelen Seiten) h. Zieht man eine Diagonale, so zerlegt man es in zwei Dreiecke, deren Grundlinien gleich a und b sind, und die beide die Höhe h haben. Daher ist der Inhalt des Trapezes

$$4) \qquad F = \tfrac{1}{2} ah + \tfrac{1}{2} bh = \tfrac{1}{2}(a + b)h \quad .$$

Der Inhalt eines Trapezes ist also gleich der Hälfte des Produkts aus der Summe der parallelen Seiten und der Höhe oder gleich dem Produkt aus dem arithmetischen Mittel der parallelen Seiten und der Höhe, oder gleich dem Produkt aus der Mittelparallele und der Höhe.

Es ist von Interesse, schon an dieser Stelle zu sehen, wie man aus Formeln, wie die vorstehende, neue Lehrsätze herauslesen kann. So ergeben sich hier unter Beachtung der Sätze von den Inhalten der Dreiecke und Parallelogramme die folgenden:

Ein Trapez ist gleich einem Dreieck mit gleicher Höhe, dessen Grundlinie gleich der Summe der parallelen Seiten des Trapezes ist.

Ein Trapez ist gleich einem Parallelogramm mit gleicher Höhe, dessen Grundlinie gleich der Mittelparallele des Trapezes ist.

Beispiele:

1. Aus den parallelen Seiten a, b und dem Inhalt F eines Trapezes findet man die Höhe

$$h = \frac{2F}{a+b} .$$

2. Von einem Trapez sei der Inhalt F, die Höhe h und die Differenz d der parallelen Seiten a und b gegeben. Aus den Gleichungen:

$$a + b = \frac{2F}{h}, \quad a - b = d ,$$

wobei $a > b$ angenommen ist, ergeben sich:

$$a = \frac{F}{h} + \tfrac{1}{2}d, \quad b = \frac{F}{h} - \tfrac{1}{2}d .$$

Zerlegt man ein Vieleck durch die Diagonalen von einem Eckpunkt aus in Dreiecke, so kann man die Diagonalen als Grundlinien dieser Dreiecke betrachten und hat außer ihnen die darauf stehenden Höhen zu messen. Die Summen der Dreiecksinhalte gibt den Inhalt des Vielecks.

Beispiele:

1. Die Diagonale AC des Vierecks $ABCD$ sei 27 cm, die Abstände der Eckpunkte B und D von AC seien 12 cm und 18 cm; dann ist der Inhalt des Vielecks

$$F = \tfrac{1}{2} \cdot 27 \cdot 12 + \tfrac{1}{2} \cdot 27 \cdot 18 = \tfrac{1}{2} \cdot 27 \cdot 30 = 405 \ cm^2 .$$

2. In dem Fünfeck $ABCD$ seien die Diagonalen $AC = 7{,}5$ m, $AD = 8{,}2$ m, die Abstände der Eckpunkte B, D von AC 3,2 m und 4,6 m, der Abstand des Eckpunkts E von AD 2,5 m gemessen. Das Fünfeck hat den Inhalt

$$F = \tfrac{1}{2}(7{,}5 \cdot 3{,}2 + 7{,}5 \cdot 4{,}6 + 8{,}2 \cdot 2{,}5) = 39{,}5 \ m^2 .$$

Hat ein Vieleck einen Inkreis (§ 17); gibt es also einen Punkt, der von allen Seiten gleich weit entfernt ist, so verbinde man diesen Punkt mit allen Eckpunkten und zerlege dadurch das Vieleck in Dreiecke, deren jedes eine Seite zur Grundlinie und den Radius des Inkreises zur Höhe hat. Bezeichnet man diesen durch ϱ, die Seiten durch $a, b, c, \ldots$, so ist hiernach der Inhalt des Vielecks

$$F = \tfrac{1}{2}a\varrho + \tfrac{1}{2}b\varrho + \tfrac{1}{2}c\varrho + \ldots = \tfrac{1}{2}(a + b + c + \ldots)\varrho ,$$

oder wenn die Summe $a + b + c + \ldots$ der Seiten, oder der Umfang des Vielecks durch u bezeichnet wird:

$$5) \qquad F = \tfrac{1}{2}u\varrho .$$

Der Inhalt eines solchen Vielecks ist also gleich dem halben Produkt aus seinem Umfang und dem Radius des Inkreises.

Aus diesem Satze kann man den andern folgern, daß ein solches Vieleck gleich einem Dreiecke ist, dessen Grundlinie dem Umfang und dessen Höhe dem Radius des Inkreises gleich ist.

Bei einem regelmäßigen n-Eck mit der Seite a, ist der Umfang $u = na$ und die Formel 5) ergibt

$$6) \qquad F = \tfrac{1}{2} n a \varrho \quad .$$

Bei einem Dreieck setzt man die Summe der drei Seiten $a + b + c = 2s$ und es geht dann die obige Formel in

$$7) \qquad F = s\varrho$$

über. Sie gestattet noch eine Ergänzung, indem man statt des Mittelpunktes des Inkreises den Mittelpunkt eines der Ankreise mit den Eckpunkten des Dreiecks verbindet und dieses als algebraische Summe der Inhalte dreier Dreiecke darstellt, von denen eins außerhalb des ursprünglichen liegt und daher von der Summe der beiden andern zu subtrahieren ist. Diese drei Dreiecke haben wieder eine Seite des ursprünglichen als Grundlinie und als Höhe den Radius eines Ankreises. Bezeichnet man die Radien der Ankreise der Seiten a, b, c mit ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c, so erhält man hiernach für den Flächeninhalt des Dreiecks noch die drei Formen

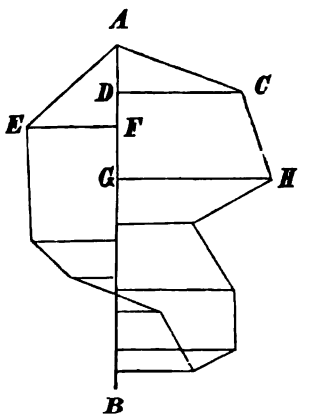


Fig. 87a.

$$F = \tfrac{1}{2}(b + c - a)\varrho_a = \tfrac{1}{2}(a + c - b)\varrho_b = \tfrac{1}{2}(a + b - c)\varrho_c \quad ,$$

oder

$$8) \qquad F = (s - a)\varrho_a = (s - b)\varrho_b = (s - c)\varrho_c \quad .$$

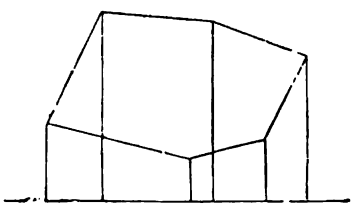


Fig. 87b.

Diese Ableitung zeigt, daß man bei Vielecken die Zerlegung in Dreiecke auch durch Verbindung von außerhalb ihrer Flächen liegenden Punkten mit den Eckpunkten bewirken kann, wenn man dabei die Inhalte der ganz außerhalb der zu messenden Fläche fallenden Dreiecke subtraktiv nimmt.

6. Für die Bestimmung der Flächeninhalte beliebiger Polygone ist es nicht immer nötig, sie in Dreiecke zu zerlegen; kommen neben solchen oder ausschließlich andre Teilfiguren vor, für deren Inhaltsberechnung im vorstehenden Regeln ermittelt sind, wie z. B. Trapeze, so kann man ebenfalls das Vieleck berechnen. Dies führt auf andre Methoden für die Inhaltsbestimmung von Vielecken.

Man ziehe eine beliebige Gerade AB (Fig. 87a, b) innerhalb oder außerhalb des Vielecks und fälle auf diese von allen Eckpunkten die Senkrechten. Hierdurch erhält man eine Anzahl von Trapezen, von denen auch einzelne (ACD, AEF) sich auf Dreiecke reduzieren können. Die Höhen AD, AF, DG u. s. w. aller dieser Teilfiguren lassen sich im Fortschreiten auf der Geraden AB messen, die Grundlinien und die parallelen Seiten (CD, EF, HG u. s. w.) lassen sich sämtlich als Senkrechte zu dieser Geraden messen, und das Vieleck ist die algebraische Summe der Teilfiguren.

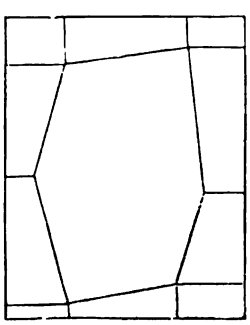


Fig. 88.

Man kann ferner mehrere solche Gerade, wie AB, nebeneinander benutzen und die zu messende Figur mit einer zweiten, etwa einem Rechteck, umgeben (Fig. 88). Fällt man von den Eckpunkten der ersten Senkrechte auf Seiten der zweiten Figur, so kann man jene als Differenz der Fläche des Rechtecks und einer Anzahl von Trapezen, oder auch Parallelogrammen und Dreiecken berechnen.

Dieses Verfahren empfiehlt sich in der Praxis, wenn das Innere der zu messenden Fläche unzugänglich ist.

Die verschiedenen Arten, den Flächeninhalt eines Vielecks zu bestimmen, lassen sich auch zu einer näherungsweisen Ermittelung der Größe krummliniger oder gemischtliniger Figuren verwerten. Dieses Verfahren kommt darauf hinaus, daß man eine krumme Linie näherungsweise durch eine gebrochene ersetzen darf, deren geradlinige Teile hinreichend klein sind, um ohne Überschreitung der für die praktische Anwendung im Resultat erlaubten Fehlergrenze für die entsprechenden Teile der krummen Linie gesetzt werden zu dürfen.

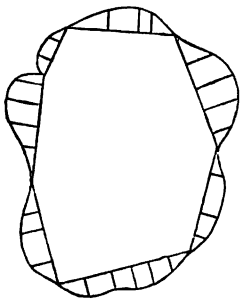


Fig. 89.

Man kann also beispielsweise zur angenäherten Inhaltsbestimmung einer krummlinigen Figur (Fig. 89) in diese eine geradlinige zeichnen, deren Umfang sich dem der gegebenen möglichst annähert, die außerhalb der geradlinigen fallenden Teile der krummlinigen Figur durch geeignete Senkrechte auf die nächste gerade Linie in so kleine Stücke zerlegen, daß man diese ohne merklichen Fehler als Trapeze betrachten darf, und schließlich die Summe der Inhalte dieser Trapeze zum Inhalt der geradlinigen Figur addieren.

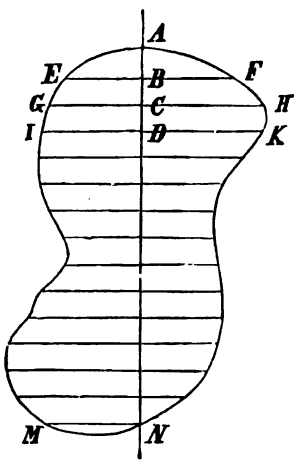


Fig. 90.

Man kann entsprechend die Seiten der Vielecks so ziehen, daß sie die zu messende Figur einschließen, und hat dann die Summe der Trapeze von dem Inhalt des Vielecks zu subtrahieren.

Man wird in beiden Fällen die Berechnung dadurch vereinfachen können, daß man die auf den betreffenden Vieleckseiten zu messenden Höhen der einzelnen Trapeze gleich groß nimmt.

Zieht man durch die Figur eine Gerade (Fig. 90) und sodann ein System zu dieser senkrechter Geraden, die so nahe aneinanderliegen, daß man die zwischen ihnen liegenden Flächenstreifen als Trapeze ansehen darf, so hat man alle diese Trapeze zu berechnen und ihre Inhalte zu addieren. Dabei hat man den Vorteil, daß in jeder senkrechten Geraden eine Seite gleichzeitig für zwei Trapeze gemessen wird, und daß alle Höhen auf derselben Geraden nacheinander abgetragen sind. Macht man auch hier diese Höhen AB, BC, CD u. s. w. gleich groß und sind a, b, c, ... w der Reihe nach die Senkrechten EF, GH, IK, ... MN, während h jede der Höhen AB, BC u. s. w. ist, so hat man den Inhalt der Figur

$$F = \tfrac{1}{2} a h + \tfrac{1}{2}(a + b) h + \tfrac{1}{2}(b + c) h + \ldots + \tfrac{1}{2} w h$$
$$= \tfrac{1}{2} h \cdot (2 a + 2 b + 2 c + \ldots + 2 w) = (a + b + c + \ldots + w) h \quad .$$

Beispiele:

1. Man berechne den Flächeninhalt des Siebenecks $ABCDEFG$, wenn die (sämtlich innerhalb des Vielecks fallenden) von den Eckpunkten auf die Gerade AE gefällten Senkrechten $BB_1 = 3{,}5$, $CC_1 = 5{,}6$, $DD_1 = 4{,}0$, $FF_1 = 5{,}4$, $GG_1 = 8{,}2$ und die zugehörigen Abschnitte von AE, $AB_1 = 5{,}1$, $B_1C_1 = 5{,}6$, $C_1D_1 = 6{,}0$, $D_1E = 4{,}0$, $EF_1 = 3{,}1$, $AG_1 = 3{,}8$ gemessen sind. — Es ist:

$$F = \tfrac{1}{2}[5{,}1 \cdot 3{,}5 + (3{,}5 + 5{,}6) \cdot 5{,}6 + (5{,}6 + 4{,}0) \cdot 6{,}0 + 4{,}0 \cdot 4{,}0 + 5{,}4 \cdot 3{,}1$$
$$+ (8{,}2 + 5{,}4) \cdot 13{,}8 + 8{,}2 \cdot 3{,}8] = 189{,}0 \quad .$$

2. Zu einer Seite AB eines Vielecks $ABC \ldots K$ sei durch jeden der übrigen Eckpunkte, mit Ausnahme von G, die Parallele bis zum zweiten Durchschnitt mit dem Umfang des Vielecks gezogen, und man habe die Seite AB nebst ihren Parallelen, wie folgt, gemessen: $AB = 3{,}01\ m$, $CC_1 = 7{,}53\ m$, $DD_1 = 2{,}57\ m$, $EE_1 = 2{,}59\ m$, $FF_1 = 1{,}24\ m$, $HH_1 = 3{,}88\ m$, $II_1 = 2{,}02\ m$, $KK_1 = 8{,}22\ m$. G sei die Spitze eines Dreiecks GFF_1. Es seien ferner auf einer zu AB senkrechten Geraden die Abstände der einzelnen Parallelen von dem Schnittpunkt der Senkrechten und der Seite AB, wie folgt, bestimmt worden: $CC_1 = 0{,}22\ m$, $DD_1 = 8{,}76\ m$, $EE_1 = 9{,}32\ m$, $FF_1 = 17{,}84\ m$, $HH_1 = 13{,}44\ m$, $II_1 = 10{,}12\ m$, $KK_1 = 5{,}28\ m$, $GG_1 = 18{,}00\ m$. Man berechne den Flächeninhalt des Vielecks. Resultat: $F = 84{,}23\ m^2$.

3. Durch vier Eckpunkte A, B, C, F eines Vielecks sind gerade Linien gelegt worden, so daß diese ein das Vieleck einschließendes Rechteck $MNPQ$ begrenzen. A liege auf MN, B auf NP, C auf PQ, F auf QM. Von D und G seien auf MQ die innerhalb des Rechtecks fallenden Senkrechten DD_1, GG_1 gefällt. Man berechne den Flächeninhalt des Vielecks $ABCDFG$ aus folgenden gemessenen Stücken: $AN = 0{,}32\ m$, $NB = 0{,}24\ m$, $BP = 8{,}12\ m$, $PC = 0{,}74\ m$, $CQ = 0{,}90\ m$, $QD_1 = 0{,}12\ m$, $DD_1 = 0{,}22\ m$, $DF = 5{,}16\ m$, $FG_1 = 3{,}00\ m$, $GG_1 = 0{,}08\ m$. Resultat: $F = 10{,}52\ m^2$.

§ 25. Der pythagoreische Lehrsatz.

1. Fällt man von einem Punkte A die Senkrechte AA' (Fig. 91) auf eine Gerade MN, so nennt man A' die Projektion von A auf MN, die Senkrechte AA' die Projizierende von A. Liegt A auf MN, so fällt der Punkt A mit seiner Projektion zusammen. Projiziert man einen zweiten Punkt B auf MN, so daß man seine Projektion B' erhält, so ist $A'B'$ die Projektion der Strecke AB auf MN. Zieht man in einem spitzwinkligen Dreieck eine Höhe oder in einem rechtwinkligen die Höhe auf der Hypotenuse, so sind die Abschnitte, die durch die Höhe auf der Grundlinie hervorgebracht werden, die Projektionen der beiden anstoßenden Seiten auf die Grundlinie und diese ist gleich der Summe dieser Projektionen.

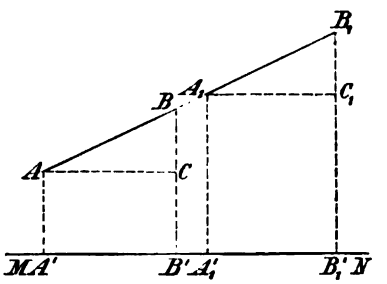


Fig. 91.

Ist die Strecke AB parallel zu MN, so wird das Trapez $ABB'A'$ ein Rechteck und es ist $A'B' = AB$, d. h. die Projektion der Strecke ist gleich der Strecke. Ist AB nicht parallel zu MN, so kann man durch den MN zunächst liegenden Endpunkt (in der Figur A) eine Parallele zu MN ziehen, die BB' in C schneidet. Dann ist $AC = A'B'$ und da in dem rechtwinkligen Dreieck ACB die Hypotenuse AB größer ist als die Kathete AC, also auch größer als $A'B'$, so ist im allgemeinen die Projektion einer Strecke kleiner als die Strecke selbst.

Ist auf der durch MN bestimmten Geraden eine zweite Strecke $A_1B_1 = AB$ gegeben, so ist deren Projektion $A'_1B'_1$ gleich der Projektion der Strecke AB, was sich aus der Kongruenz der rechtwinkligen Dreiecke $A_1C_1B_1$ und ACB ergibt. Gleiche Strecken derselben Geraden geben also auf eine zweite Gerade projiziert, gleiche Projektionen.

2. Es sei über der Hypotenuse AB des rechtwinkligen Dreiecks ACB (Fig. 92) das Quadrat $ABED$ und über den Katheten seien die Quadrate $BCGF$ und $CAIH$ konstruiert. Man fälle von C die Senkrechte CK auf AB und verlängere sie über K bis zum Schnittpunkt L mit ED. Hierdurch wird das Quadrat über der

Hypotenuse in die zwei Rechtecke *BKLE* und *KADL* zerlegt. Zieht man nun *CE* und *AF*, so hat das Dreieck *BCE* dieselbe Grundlinie und, da die Spitze *C* in der Verlängerung der Parallelen *KL* liegt, dieselbe Höhe wie das Rechteck *BKLE* und ist also halb so groß als dieses. Ebenso hat das Dreieck *BFA* mit dem Quadrate *BFGC* die Grundlinie *BF* gemeinsam, und seine Spitze liegt, da der Winkel *GCA* als Summe zweier Rechten ein gestreckter sein muß, in der Verlängerung von *GC*; es ist also auch das Dreieck *BFA* halb so groß als das Quadrat *BFGC*. In den beiden Dreiecken *BCE* und *BFA* ist aber $BE = BA$ als Seiten desselben Quadrats, ebenso $BC = BF$ und endlich $\angle CBE$ gleich $\angle FBA$, da jeder aus einem rechten und dem Winkel *CBA* besteht. Die beiden Dreiecke stimmen also in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein und sind daher kongruent. Hieraus folgt, daß auch die beiden Figuren, die doppelt so groß als eins dieser Dreiecke sind, gleich sein müssen, oder daß das Quadrat *BFGC* gleich dem Rechteck *BKLE* ist. — Ganz derselbe Beweis läßt sich mittels der Hilfslinien *BI*, *CD* und der Dreiecke *BAI*, *CAD* für das Quadrat *CAIH* und das Rechteck *KADL* führen. Damit ist der Satz bewiesen:

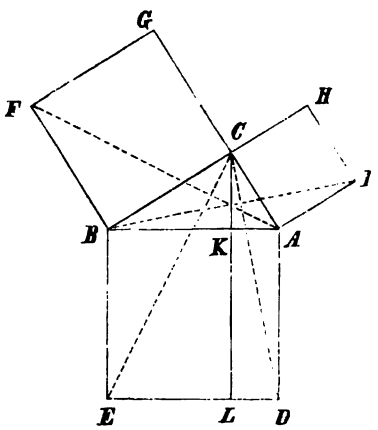


Fig. 92.

1) Das Quadrat über einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und der Projektion dieser Kathete auf die Hypotenuse.

Wendet man diesen Satz auf jede der beiden Katheten an, so ist die Summe der beiden Rechtecke gleich dem Quadrat über der Hypotenuse und man erhält den pythagoreischen Lehrsatz:

2) Das Quadrat über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten.

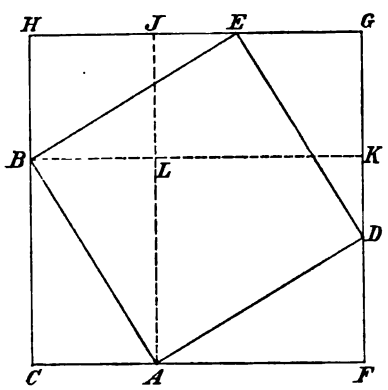


Fig. 93.

Dieser Lehrsatz ist einer der wichtigsten der Mathematik und daher als magister matheseos bezeichnet worden. Er ist nach Pythagoras aus Samos (6. Jahrh. v. Chr.) benannt und der obige Beweis ist der von Euklid in dem ältesten uns bekannten Lehrbuch der Geometrie (Elemente) gegebene.

Aus der überaus großen Zahl von Beweisen, die von diesem Lehrsatz geliefert worden sind, sei noch der folgende wegen seiner Anschaulichkeit hier angedeutet. Es sei über der Hypotenuse *AB* des rechtwinkligen Dreiecks *ABC* (Fig. 93) das Quadrat *ADEB* beschrieben und man ziehe durch *D* die Parallele zu *CB*, durch *E* die Parallele zu *CA*, so begrenzen diese beiden Parallelen mit den Verlängerungen der Katheten das Rechteck *CFGH*, das aus dem Hypotenusenquadrat und vier rechtwinkligen Dreiecken besteht. Diese vier Dreiecke sind aber kongruent und daraus ergibt sich, daß *CFGH* ein Quadrat ist. Zieht man noch durch *A* die Parallele *AI* zu *CB* und durch *B* die Parallele *BK* zu *CA*, die sich beide in *L* schneiden, so zerlegt man *CFGH* in die beiden Rechtecke

ACBL, *LKGI*, die zusammen gleich den vier rechtwinkligen Dreiecken sind, und die beiden Quadrate *BLIH* und *AFKL*, deren Seiten gleich den Katheten *AC* und *CB* sind. Nimmt man nun von dem Quadrat *CFGH* die vier rechtwinkligen Dreiecke weg, so bleibt das Hypotenusenquadrat; nimmt man die beiden Rechtecke weg, so bleibt die Summe der Kathetenquadrate.

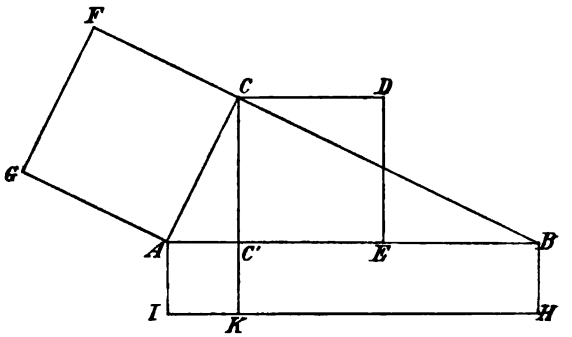


Fig. 94.

Dem Anfänger ist zu empfehlen, sich zwei kongruente Quadrate *CFGH* aus Papier herzustellen und an jedem die Zerlegung durch Zerschneiden auszuführen.

3. Zieht man in dem rechtwinkligen Dreieck *ACB* (Fig. 94) die Höhe *CC'* und errichtet über ihr das Quadrat *C'CDE*, über der Kathete *AC* das Kathetenquadrat *ACFG*, über der Hypotenuse *AB* als Seite das Rechteck *ABHI*, dessen anstoßende Seite $AI = AC'$ gemacht wird und verlängert *CC'* bis es *IH* in *K* schneidet, so ist nach 1)

$$ACFG = ABHI$$

und nach dem pythagoreischen Lehrsatz

$$ACFG = C'CDE + AC'KI \ .$$

Demnach ist auch

$$C'CDE + AC'KI = ABHI$$

und wenn man beide Seiten der Gleichung um das Quadrat *AC'KI* vermindert

$$C'CDE = C'BHK \ .$$

Hiermit ist der Satz bewiesen:

3) Das Quadrat über der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus den Projektionen der Katheten auf die Hypotenuse.

4. Eine Verallgemeinerung des pythagoreischen Lehrsatzes erhält man durch folgende Betrachtung. Es gilt zunächst der Satz:

Projiziert man jede von zwei Seiten eines Dreiecks auf die andre, so sind die Rechtecke aus jeder Seite und der Projektion der andern gleich groß.

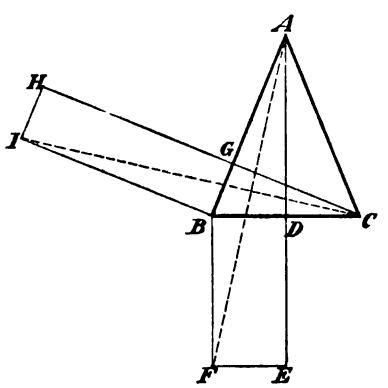


Fig. 95.

Um diesen Satz zu beweisen, sei zuerst vorausgesetzt, daß der von den Seiten *AB* und *BC* (Fig. 95) eingeschlossene Winkel *ABC* spitz sei. Sind dann *BDEF*, *BGHI* die Rechtecke, so ziehe man *CI*, *AF*, beweise wie in Nr. 1 die Kongruenz der Dreiecke *ABF* und *CBI*, sowie daß jedes dieser Dreiecke halb so groß als eins von den Rechtecken ist, und folgere daraus die Richtigkeit der Behauptung. Ist der Winkel *BAC* ein rechter, so wird das Rechteck *BGHI* zum Quadrate über *AB* und man erhält den Satz 1) als besondern Fall. Ist der Winkel *BAC* stumpf, so wird die Projektion *BG* größer als die Seite *AB* und fällt zum Teil auf die

Verlängerung von *BA*: der Beweis erleidet keine Veränderung. Ist ferner der eingeschlossene Winkel *ABC* ein rechter, so verschwinden beide Projektionen und mit ihnen die Rechtecke; diese sind also gleich Null und der Satz behält seine Gültigkeit. Ist endlich der eingeschlossene Winkel *ABC* stumpf (Fig. 96), so fallen die beiden Projektionen auf die Verlängerungen der Seiten *CB*, *BA* und die Rechtecke *BDEF*, *BGHI* außerhalb der Quadrate dieser Seiten: der Beweis mit Hilfe der Geraden *AF*, *CI* und der Dreiecke *ABF*, *CBI* bleibt derselbe wie vorher.

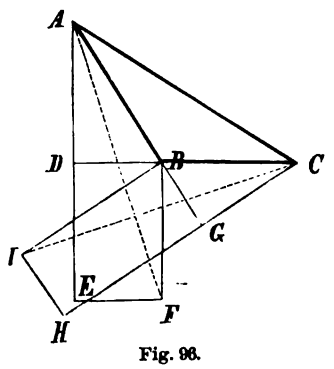


Fig. 96.

Konstruiert man über jeder Seite eines Dreiecks ein Quadrat und teilt jedes mittels der Senkrechten von dem gegenüberliegenden Eckpunkt zu der Seite, in zwei Rechtecke, von denen bei einem rechtwinkligen Dreieck zwei verschwinden, bei einem stumpfwinkligen zwei außerhalb der betreffenden Quadrate fallen, so erhält man durch wiederholte Anwendung des vorigen Satzes den folgenden:

4) Das Quadrat über einer Seite eines Dreiecks ist gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, vermindert um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projektion der andern auf diese, sofern man die Flächen von außerhalb der betreffenden Quadrate fallenden Rechtecken negativ nimmt.

Dieser Satz heißt der allgemeine pythagoreische Lehrsatz. Liegt die Seite einem spitzen Winkel gegenüber, so ist das doppelte Rechteck von der Summe der beiden Quadrate zu subtrahieren; liegt sie einem stumpfen Winkel gegenüber, so verwandelt sich diese Subtraktion in die Addition der absoluten Werte der Flächen; liegt sie einem rechten Winkel gegenüber, so werden diese gleich Null, und man erhält den pythagoreischen Lehrsatz.

Dieser ergibt sich überhaupt aus dem allgemeinen, wenn irgend ein Winkel ein rechter ist, jedoch erhält man ihn, wenn die erste Seite einem der spitzen Winkel gegenüberliegt, in der Form:

Das Quadrat jeder Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Differenz aus dem Quadrat der Hypotenuse und dem Quadrat der andern Kathete, welche Form sich selbstverständlich auch unmittelbar ableiten läßt. Der allgemeine pythagoreische Lehrsatz zeigt ferner, daß der besondere nur für das rechtwinklige Dreieck gilt, oder daß auch seine Umkehrung richtig ist. Man kann auch diese in die beiden Formen fassen:

Ist das Quadrat einer Seite eines Dreiecks gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, so ist der Winkel, der dieser Seite gegenüberliegt, ein rechter;

ist das Quadrat einer Seite eines Dreiecks gleich der Differenz der Quadrate der beiden andern Seiten, so ist der Winkel, der der größern dieser beiden Seiten gegenüberliegt, ein rechter.

Allgemein gilt die Umkehrung:

5) Je nachdem das Quadrat einer Seite eines Dreiecks kleiner, ebenso groß oder größer ist als die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, ist der der ersten gegenüberliegende Winkel spitz, recht oder stumpf.

Der Beweis ergibt sich indirekt durch den allgemeinen pythagoreischen Lehrsatz.

5. Eine andre Verallgemeinerung des pythagoreischen Lehrsatzes ist die folgende: Konstruiert man über zwei Seiten *BC*, *CA* eines Dreiecks *ABC* (Fig. 97) nach außen die beliebigen Parallelogramme *BCGF*, *CADE*, verlängert *DE*, *FG*

bis zu ihrem Schnittpunkt H, zieht durch H und den Eckpunkt C die Gerade, die BA in I schneidet, zieht BK bis zum Schnittpunkt K mit FH, und AL bis zum Schnittpunkt L mit DH, beide parallel zu HI, und verbindet endlich K mit L, so ist BK der Strecke AL gleich und parallel, da beide HC parallel und als Parallele zwischen Parallelen dieser gleich sind. Hieraus folgt, daß $ABKL$ ebenfalls ein Parallelogramm ist, das durch HI in zwei Parallelogramme $BKMI$ und $MLAI$ zerfällt, von denen das erste mit $KBCH$ dieselbe Grundlinie KB hat und zwischen denselben Parallelen KB und HI liegt. Das Parallelogramm $KBCH$ hat mit $BCGF$ dieselbe Grundlinie BC und liegt mit ihm zwischen denselben Parallelen BC und FH. Da hiernach $BKMI = KBCH$ und $KBCH = BCGF$, so ist auch $BKMI = BCGF$. Auf gleiche Weise kann gezeigt werden, daß $MLAI = LACH = CADE$ ist. Daher muß auch

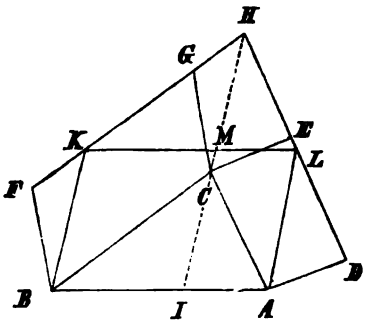


Fig. 97.

$$BKMI + MLAI = BCGF + CADE \quad ,$$

d. h. das Parallelogramm über BA muß gleich der Summe der Parallelogramme über den Seiten BC und CA sein.

Dieser Satz heißt der Lehrsatz des Pappus.

Ist insbesondere der Winkel BCA ein rechter, und sind die über BC und CA konstruierten Parallelogramme Quadrate, so wird auch das Parallelogramm über BA ein Quadrat, so daß der pythagorische Lehrsatz als besonderer Fall des Lehrsatzes des Pappus erscheint.

§ 26. Verwandlung und Teilung geradliniger Figuren.

1. Eine Figur in eine andre verwandeln, heißt eine andre Figur konstruieren, die der gegebenen gleich ist, aber gewissen weiteren Bedingungen entspricht.

Der Satz, daß Parallelogramme über derselben Grundlinie und zwischen denselben Parallelen gleich sind, dient dazu, ein Parallelogramm in ein andres zu verwandeln, das einen gegebenen Winkel hat. Ist insbesondere der an die Grundlinie des gegebenen Parallelogramms $ABCD$ (Fig. 98), in A anzulegende gegebene Winkel ein rechter, so hat man die Lösung der Aufgabe, ein Parallelogramm in ein Rechteck zu verwandeln. Die in A und B auf AB errichteten Senkrechten geben das verlangte Rechteck $ABEF$.

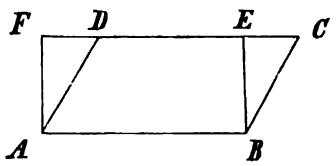


Fig. 98.

Ein Parallelogramm $ABCD$ läßt sich in ein Parallelogramm verwandeln, das eine gegebene Seite hat, indem man mit dieser um A einen Kreisbogen beschreibt, seinen Schnittpunkt mit der Seite DC oder deren Verlängerung mit A verbindet, und diese Verbindungslinie mit AB zu Seiten des gesuchten Parallelogramms nimmt. Diese Konstruktion setzt jedoch voraus, daß der Kreisbogen die der Grundlinie parallele Gerade schneidet oder berührt, also daß die gegebene Seite nicht kleiner sei als die Höhe, oder, da man jede Seite von $ABCD$ zur Grundlinie nehmen kann, nicht kleiner als die kleinere der beiden Höhen des gegebenen Parallelogramms. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so ist zwar die vorstehende Konstruktion, nicht aber die Lösung der Aufgabe unmöglich. Einfacher ist daher

eine andre Lösung, die in allen Fällen ausführbar ist, und sich auf folgenden Lehrsatz stützt:

Zieht man in einem Parallelogramm eine Diagonale und durch einen beliebigen Punkt auf dieser die Parallelen zu den Seiten des Parallelogramms, so sind die von der Diagonale nicht durchschnittenen Teilparallelogramme einander gleich.

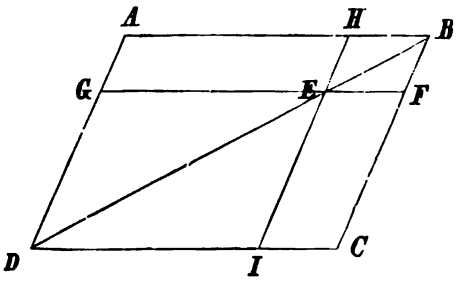


Fig. 99.

Jede Diagonale eines Parallelogramms teilt dieses in zwei kongruente, also auch gleiche Dreiecke, folglich ist (Fig. 99)

$$\triangle ABD = \triangle BDC \ ,$$
$$\triangle GED = \triangle EDI \ ,$$
$$\triangle HBE = \triangle BEF \ ,$$

also auch

$$ABD - GDE - HBE = BDC - EDI - BEF, \text{ d. i. } AHEG = EFCI \ .$$

Man erhält noch zwei Paare gleicher Parallelogramme, wenn man zu jedem der vorigen dieselbe Fläche *HEFB* oder *GEID* hinzufügt, d. h. es ist auch

$$ABFG = HBCI \text{ und } AHID = GFCD \ .$$

Die Anwendung dieses Satzes zur Verwandlung eines gegebenen Parallelogramms, z. *B. AHEG*, in ein anderes, daß eine gegebene Seite *EF* hat, bedarf keiner weitern Erläuterung. Bei dieser Lösung hat das gesuchte Parallelogramm noch die gleichen Winkel wie das gegebene.

Man kann nun auch ein gegebenes Parallelogramm in ein andres verwandeln, das sowohl einen gegebenen Winkel als eine gegebene Seite hat. Entweder verwandle man es zunächst in ein solches, das die gegebene Seite hat, und dann dieses unter Beibehaltung dieser Seite als Grundlinie in ein solches, das noch den gegebenen Winkel hat, oder man verwandle zuerst das Parallelogramm in ein solches, das den gegebenen Winkel besitzt und dieses auf die eben gezeigte Weise in ein drittes, das ohne Veränderung der Winkel auch die gegebene Seite hat.

2. Zu jeder der vorstehenden Aufgaben gibt es eine entsprechende für Dreiecke. Der Satz, daß Dreiecke über derselben Grundlinie und zwischen denselben Parallelen gleich sind, liefert unmittelbar die Lösung der Aufgabe, ein Dreieck *ABC* (Fig. 100) in ein andres *ABD* zu verwandeln, das einen gegebenen Winkel *DBA* hat, und auch insbesondere der Aufgabe, ein gegebenes Dreieck in ein rechtwinkliges zu verwandeln. Ebenso erhält man ein Dreieck, das einem gegebenen *ABC* gleich ist und eine gegebene Seite hat, indem man mit einem Radius gleich dieser Seite um *B* den Kreis beschreibt, durch *C* zu *AB* die Parallele zieht und den Schnittpunkt *D* der Parallele und des Kreises mit *A* und *B* verbindet. Hierbei ist vorauszusetzen, daß die gegebene Seite nicht kleiner als die kleinste der drei Höhen des Dreiecks *ABC* sei. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so kann man *ABC* zuerst in ein Dreieck verwandeln, das eine Seite von solcher Länge hat, daß die zu dieser Seite als Grundlinie gehörige Höhe nicht größer als die gegebene Seite ist: dieses zweite Dreieck kann dann in ein drittes verwandelt werden, das der Aufgabe entspricht. Man kann ferner ein gegebenes Dreieck in ein andres verwandeln, so daß beide

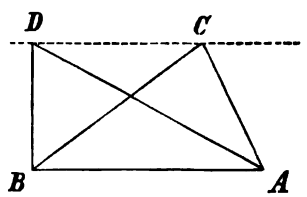


Fig. 100.

in einem Winkel übereinstimmen, indem man das gegebene durch zwei Parallelen zu einem Parallelogramm ergänzt, das man auf die vorher gezeigte Weise in ein andres mit gleichen Winkeln verwandelt, und dieses wieder durch eine Diagonale halbiert. Dabei hat man darauf zu sehen, daß in jeder der Figuren der vorgeschriebene Winkel enthalten ist. Man kann endlich auch ein Dreieck in ein andres Dreieck verwandeln, das sowohl eine gegebene Seite, als einen gegebenen Winkel enthält, indem man ähnlich wie in der entsprechenden Aufgabe für das Parallelogramm die beiden Bedingungen nacheinander erfüllt.

Um ein Parallelogramm in ein Dreieck zu verwandeln, hat man ein Dreieck von gleicher Höhe aber doppelter Grundlinie oder ein solches von gleicher Grundlinie aber doppelt so großer Höhe zu zeichnen. Um ein Dreieck in ein Parallelogramm zu verwandeln, nehme man entweder die Hälfte der Grundlinie des Dreiecks und dieselbe Höhe, oder die Hälfte der Höhe und dieselbe Grundlinie. Ebenso ist die Aufgabe zu lösen, ein beliebiges Dreieck in ein Rechteck zu verwandeln.

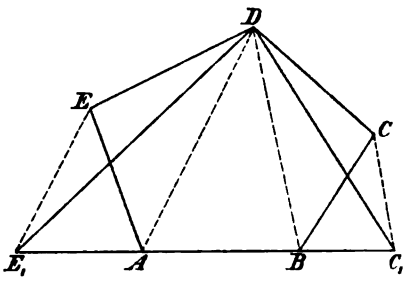


Fig. 101.

Auf die Verwandlung eines Dreiecks läßt sich auch die Aufgabe zurückführen:

Ein Vieleck in ein andres zu verwandeln, das eine Ecke weniger hat: also ein n-Eck in ein $(n-1)$-Eck.

Schneidet man z. B. von dem Fünfeck $ABCDE$ (Fig. 101) durch die Diagonale BD das Dreieck BDC ab, zieht durch C die Parallele zu BD, welche die Verlängerung von AB in C_1 schneidet und verbindet C_1 mit D, so ist das abgeschnittene Dreieck durch das ihm gleiche BDC_1 ersetzt und dadurch das gegebene Fünfeck in das Viereck AC_1DE verwandelt worden. Ebenso kann das Dreieck ADE durch das gleiche ADE_1 ersetzt und damit das Fünfeck in das Dreieck C_1DE_1 verwandelt werden.

Auf diese Weise kann ein n-Eck in ein Dreieck verwandelt werden und dieses in ein Rechteck.

3. Die Sätze 1) und 3) in § 25, geben zwei Wege zur Lösung der Aufgabe:

Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

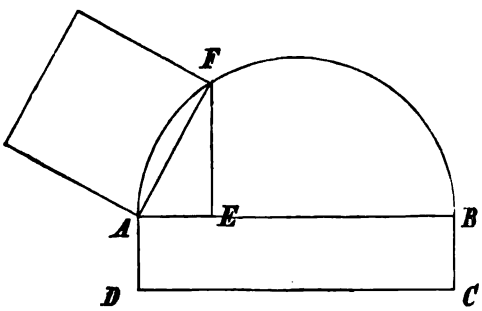


Fig. 102.

1. Man trage die kürzere Seite AD des Rechtecks $ABCD$ (Fig. 102) auf der längern AB ab, so daß $AE = AD$ wird, errichte in E auf AB die Senkrechte, beschreibe über AB als Durchmesser einen Halbkreis, verbinde den Schnittpunkt F des Halbkreises und der Senkrechten mit A und konstruiere über AF als Seite das Quadrat, so ist dieses das verlangte. Denn verbindet man noch F mit B, so ist der Winkel AFB als Peripheriewinkel in einem Halbkreis ein rechter, also das Dreieck AFB rechtwinklig und das Quadrat über der Kathete AF ist gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse AB und der Projektion $AE = AD$ der Kathete auf die Hypotenuse.

2. Man verlängert eine Seite AB des gegebenen Rechtecks (Fig. 103) um die anstoßende, so daß $BE = BC$ wird: schlägt über AE als Durchmesser den Halbkreis, der die Verlängerung von BC in F schneidet. Dann ist das Quadrat

über BF das gesuchte. Denn in dem rechtwinkligen Dreieck AFE ist das Quadrat über der Höhe BF gleich dem Rechteck aus den Projektionen AB und $BE = BC$ der Katheten auf die Hypotenuse.

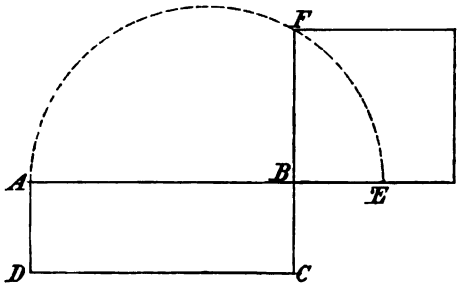


Fig. 103.

Da man nun ein Vieleck in ein Rechteck und dieses in ein Quadrat verwandeln kann, so ist damit die Aufgabe gelöst, ein beliebiges Vieleck in ein Quadrat zu verwandeln.

Da hiermit jedes Vieleck auf die Figur zurückgeführt ist, deren Inhalt sich am leichtesten bestimmen läßt, so kann man sagen mit dieser Aufgabe sei die Inhaltsbestimmung geradliniger Figuren durch Konstruktion gelöst. Man bezeichnet daher die Verwandlung einer Figur in ein Quadrat, als die Quadratur der Figur.

4. Die Zahl der Verwandlungsaufgaben geradliniger Figuren läßt sich durch Aufstellung verschiedener Bedingungen, welche die zu suchende Figur erfüllen soll, erheblich vermehren.

Wir fügen noch einige solcher Aufgaben hinzu, die in den Anwendungen häufig gebraucht werden.

Die früher gelöste Aufgabe, ein Dreieck in ein andres zu verwandeln, das mit ihm einen gleichen Winkel und außerdem eine gegebene Seite hat, kann auch in folgender Weise gelöst werden:

Man trage auf einem der Schenkel des betreffenden Winkels B des gegebenen Dreiecks ABC (Fig. 104) die Strecke BD gleich der verlangten Seite ab, ziehe DC, dann AE parallel zu DC und verbinde den Schnittpunkt E dieser Parallelen und der Seite BC mit D; dann ist BED das verlangte Dreieck. Diese Auflösung beruht darauf, daß der Flächeninhalt einer Figur, hier des Dreiecks BCA, nicht geändert wird, wenn man von ihr ein Dreieck CEA abschneidet und dafür ein gleiches Dreieck EAD ansetzt. Diese Auflösung der Aufgabe gilt sowohl, wenn die gegebene Seite BD länger als die ist, auf der sie abgetragen wurde, als wenn sie, wie BE auf BC, kürzer als diese ist.

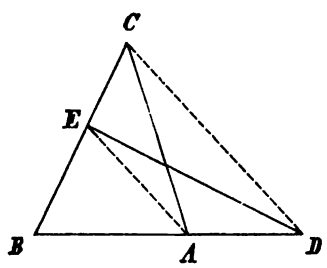


Fig. 104.

Es zeigt die vorstehende Aufgabe auch, wie man ein gegebenes Dreieck in ein andres verwandeln kann, das mit ihm einen Winkel gemeinschaftlich und außerdem eine gegebene Höhe hat. In diesem Falle bestimmt man zunächst mittels dieser Höhe durch eine Parallele zur Grundlinie BA den Punkt E auf BC oder deren Verlängerung.

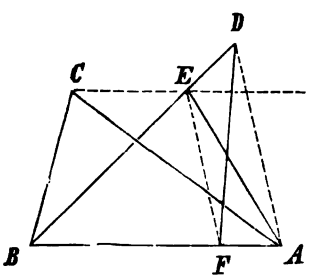


Fig. 105.

Man kann hiernach ferner jedes Dreieck in ein andres verwandeln, dessen Grundlinie mit einer bestimmten Seite des ersten in derselben Geraden, und dessen Spitze ein gegebener Punkt ist. Es sei AB die betreffende Seite des gegebenen Dreiecks ABC (Fig. 105), D die Spitze des gesuchten; dann kann man zuerst mittels der durch C zu BA gelegten Parallelen, welche die Verbindungslinie BD oder deren Verlängerung in E schneidet, ABC in das Dreieck ABE verwandeln, in dessen Seite BE oder deren Verlängerung der Punkt D liegt. Auf dieses

wendet man die obige Konstruktion an und verwandelt es mittels DA und der zu dieser parallelen EF in das verlangte Dreieck BDF.

Andre Aufgaben finden ihre Auflösungen durch Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes. Unmittelbar einleuchtend sind die Lösungen der beiden Aufgaben:

Ein Quadrat zu zeichnen, das gleich der Summe zweier gegebenen Quadrate ist, und

ein Quadrat zu zeichnen, das gleich der Differenz zweier gegebenen Quadrate ist.

Durch wiederholte Anwendung der ersten Aufgabe gelangt man zur Konstruktion eines Quadrates, das gleich der Summe von drei oder mehreren gegebenen Quadraten ist, und wendet man auch die zweite für die subtraktiven Glieder an, so kann auch eine algebraische Summe gegebener Quadrate in ein Quadrat verwandelt werden.

Sind die Quadrate, deren Summe verlangt ist, gleich, so erhält man die Auflösung der folgenden Aufgaben:

Ein Quadrat zu zeichnen, das doppelt so groß als ein gegebenes Quadrat ist. Man findet, daß die Diagonale des gegebenen gleich der Seite des gesuchten ist.

Ein Quadrat zu zeichnen, das dreimal, oder fünfmal so groß als ein gegebenes Quadrat oder allgemein ein Vielfaches von diesem ist.

Hierbei beachte man, daß ein Quadrat, das $4, 9, \ldots n^2$ mal so groß als ein gegebenes ist, dadurch gefunden wird, daß man seine Seite $2, 3, \ldots n$ mal so groß als die des gegebenen macht. Man wird daher auch, um z. B. ein Quadrat zu zeichnen, das 17 mal so groß ist als ein andres, zunächst ein solches konstruieren, das eine viermal so lange Seite hat als das gegebene und dann ein solches, das gleich der Summe dieses konstruierten und des gegebenen ist. Soll das gesuchte ferner beispielsweise 26 mal so groß sein als das gegebene, so zeigt die Gleichung $26 = 25 + 1$ den kürzesten Weg; für ein 19 mal so großes kann man sich der Gleichungen $19 = 16 + 3 = 25 - 6 = 16 + 4 - 1$ u. dgl. m. bedienen.

Durch Umkehrung ergibt sich ferner die Konstruktion eines Quadrats, das einem bestimmten Teile des gegebenen gleich ist. So erhält man ein Quadrat, das halb so groß ist als ein gegebenes, indem man seine Seite als Diagonale des gesuchten nimmt. Die einfachste Auflösung der Aufgabe, ein Quadrat zu zeichnen, das gleich dem n-ten Teile eines gegebenen ist, erhält man dadurch, daß man ein Rechteck, dessen eine Seite gleich der Seite des gegebenen Quadrats, und dessen andre Seite gleich einem n-ten Teile ist, in ein Quadrat verwandelt.

Die Umkehrung der Aufgabe, ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln, würde sein: ein Quadrat in ein Rechteck, von dem eine Seite gegeben ist, zu verwandeln. Die in Nr. 3 gegebenen Auflösungen 1 und 2 der ersten Aufgabe geben auch die Lösung ihrer Umkehrung und zwar die erste in zwei Arten, je nachdem die gegebene Rechteckseite größer oder kleiner als die Quadratseite ist.

5. Die Teilungsaufgaben für Vielecke verlangen, daß durch Gerade, für die besondere Bedingungen gestellt sein können, Figuren abgeschnitten werden sollen, deren Inhalte in gegebenen Verhältnissen stehen. Bei dem einfachsten Verhältnis der Teile, das der Gleichheit, hat man die Aufgabe, die gegebene Figur in eine gegebene Anzahl gleicher Teile zu teilen.

Ein Dreieck läßt sich am einfachsten in gleiche Teile teilen durch Gerade, die von einem Eckpunkt ausgehen. Man hat dann nur nötig, die gegenüberliegende Seite in die verlangte Anzahl gleicher Teile zu teilen (Aufgabe 6 in § 20 Nr. 2), und die Teilpunkte mit dem Eckpunkt zu verbinden; denn die Teile sind dann Dreiecke mit gleichen Grundlinien und derselben Höhe. Auch wenn

die Teile des gegebenen Dreiecks nicht gleich groß sein, sondern in einem andern Verhältnis zueinander stehen sollen, ist eine Seite in diesem Verhältnis zu teilen (§ 22 Nr. 3) und die Teilpunkte mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt zu verbinden. Die Richtigkeit dieser Konstruktion folgt daraus, daß Dreiecke mit derselben Höhe sich wie ihre Grundlinien verhalten.

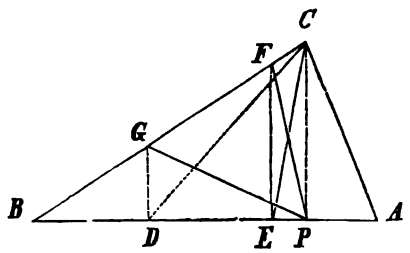


Fig. 106.

Soll ein Dreieck durch Gerade geteilt werden, die nicht von einem Eckpunkt ausgehen, so kann man zuerst die Teilung in dem verlangten Verhältnis durch Gerade der ersten Art vornehmen und dann die Teile in andre verwandeln, die den gegebenen Bedingungen genügen. Ist z. B. auf einer Seite *AB* des Dreiecks *ABC* (Fig. 106) ein Punkt *P* gegeben, durch den die Teilungslinien gehen sollen, und teilt man das Dreieck zunächt durch die vom gegenüberliegenden Eckpunkt *C* ausgehenden Geraden *CD*, *CE* in Teile, die in dem verlangten Verhältnis stehen, so hat man noch *C* mit *P* zu verbinden, durch *E* und *D* die Parallelen zu *CP* zu ziehen, die *BC* in *F* und *G* schneiden und *PF* und *PG* als die verlangten Teilungslinien zu ziehen. Es ist nämlich das Viereck *APFC* gleich *AEC*, da beide das Stück *ACP* gemeinsam haben und die Dreiecke *CFP* und *CEP* auf derselben Grundlinie *CP* stehen und zwischen denselben Parallelen *CP* und *EF* liegen. In gleicher Weise läßt sich zeigen, daß das Viereck *ACGP* gleich dem Dreiecke *ACD*, also auch der Teil *FPG* gleich *CDE* sein muß u. s. w.

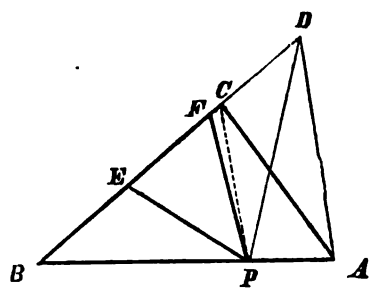


Fig. 107.

Man kann ferner zunächst das gegebene Dreieck in ein andres verwandeln, das die bequemere Teilung von einem Eckpunkte aus zuläßt. Soll z. B. das Dreieck *ABC* (Fig. 107) durch Gerade, die von einem auf *AB* gegebenen Punkt *P* ausgehen, in drei gleiche Teile geteilt werden, so kann man zuerst *ABC* mittels *CP* und der zu ihr parallelen *AD* in das Dreieck *BPD* verwandeln, dann *BD* durch *E* und *F* in drei gleiche Teile teilen und schließlich *PE* und *PF* als die verlangten Teilungslinien ziehen.

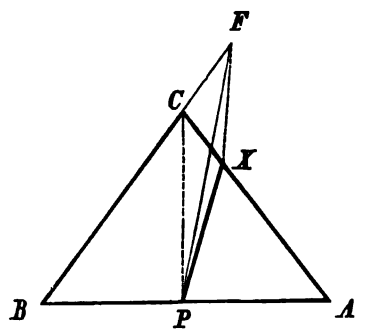


Fig. 108.

Bei dieser Konstruktion kann es vorkommen, daß eine der Teilungslinien, z. B. *PF*, teilweise außerhalb des zu teilenden Dreiecks *ABC* fällt. Dann muß sie durch eine andre *PX* (Fig. 108) ersetzt werden, so daß die Flächen *BFP* und *BCXP* gleich sind und *PX* innerhalb *ABC* liegt. Man sieht, daß diese Linie mittels der Geraden *CP* und der zu ihr parallelen *FX*, die *CA* in *X* schneidet, bestimmt werden kann, wie wieder aus der Gleichheit der Dreiecke *CFP* und *CXP* hervorgeht.

6. Die Teilung eines Parallelogramms geschieht am einfachsten durch Gerade, die einer Seite parallel sind und eine anliegende Seite in demselben Verhältnis teilen, in dem das Parallelogramm geteilt werden soll. Die Teile sind dann wieder Parallelogramme und müssen sich also bei gleichen Höhen zueinander verhalten wie ihre Grundlinien.

Eine solche Teilungslinie FE eines Parallelogramms $ABCD$ (Fig. 109) kann durch jede Gerade XY ersetzt werden, die zwischen denselben parallelen Seiten AB, DC und durch den Schnittpunkt von EF mit der durch die Halbierungspunkte G, H der beiden andern Seiten gehenden Mittellinie GH des Parallelogramms gezogen werden kann, denn das von $AEFD$ abgeschnittene Dreieck XEI ist dem angesetzten IYF kongruent. Man kann daher, wenn für die Teilungslinien eines Parallelogramms besondere Bedingungen gestellt sind, z. B. daß sie zu DC und AB senkrecht stehen, oder daß sie durch einen auf AB gegebenen Punkt X gehen sollen u. dgl. m., unmittelbar die Mittellinie GH in dem gegebenen Verhältnis teilen, da $GI = DF$ sein muß und durch die Teilpunkte die Teilungslinien ziehen. Hierbei ist wieder vorauszusetzen, daß keine der so gefundenen Geraden teilweise außerhalb des gegebenen Parallelogramms falle: ist diese Forderung nicht erfüllt, so ist noch die betreffende Verwandlungsaufgabe behufs Ersatz dieser Teilungslinie durch eine passende zu lösen.

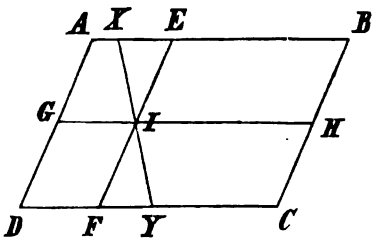


Fig. 109.

Die Teilung eines Parallelogramms ist ein besonderer Fall der Teilung eines Trapezes. Zieht man dessen Mittelparallele, teilt diese in einem gegebenen Verhältnis und zieht durch die Teilpunkte beliebige, einander nicht innerhalb des Trapezes schneidende Gerade zwischen den parallelen Seiten, so teilen diese Geraden das Trapez in kleinere Trapeze, die bei der Gleichheit ihrer Höhen sich zueinander verhalten müssen, wie ihre Mittelparallelen, d. h. wie die Teile der Mittelparallele des ganzen Trapezes. Hieraus ergeben sich ohne weiteres die Lösungen für die einfacheren Teilungsaufgaben des Trapezes.

Verlängert man die nicht parallelen Seiten eines Trapezes bis zu ihrem Schnittpunkt, so erscheint das Trapez als Differenz zweier Dreiecke. Durch geeignete Teilung dieser Dreiecke gelangt man zu einem andern Verfahren der Teilung des Trapezes.

Um ein Vieleck in einer bestimmten Weise zu teilen, zerlege man es auf geeignete Weise in Figuren, deren Teilung im vorigen gelehrt ist, z. B. durch Diagonalen in Dreiecke. Soll z. B. das Fünfeck $ABCDE$ (Fig. 110) durch eine von dem Eckpunkt A ausgehende Gerade halbiert werden, so kann man die Diagonale EB und durch D zu EB die Parallele DF ziehen, also das Fünfeck in die Dreiecke ABE, DCF und das Trapez $EBFD$ zerlegen. Halbiert man nun EB in G und DF in H und zieht die gebrochene Linie $AGHC$, so wird durch diese das Fünfeck halbiert; denn es ist $\triangle AEG = \triangle AGB$, $\triangle DHC = \triangle HFC$ und das Trapez $EGHD$ gleich $GBFH$, da beide gleiche Höhen und infolge der Gleichheit der parallelen Seiten auch gleiche Mittelparallelen haben. Da aber die Teilungslinie eine Gerade sein soll, so kann man die Figur $AGHCDE$ in eine solche verwandeln, die zwei Seiten weniger, nämlich statt der drei Seiten AG, GH, HC nur eine hat. Dazu kann man GC, dann HX parallel zu GC ziehen und X mit G verbinden, dann AX und zu ihr parallel GY, sowie endlich AY als verlangte Teilungslinie ziehen.

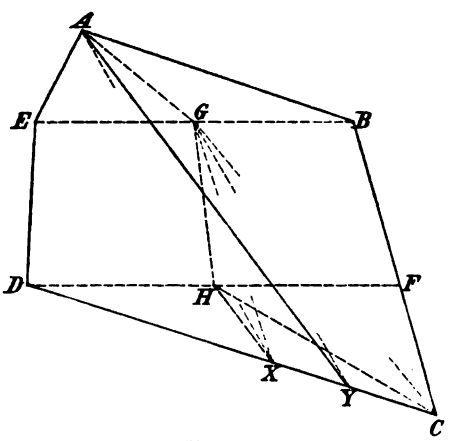


Fig. 110.

Vierter Abschnitt.

Die Ähnlichkeit geradliniger Figuren.

§ 27. Die Ähnlichkeit der Dreiecke.

1. Zieht man zwischen den Schenkeln eines Winkels zwei beliebige Parallele, so entstehen zwei Dreiecke ABC und $A'B'C$ (Fig. 111). Diese Dreiecke stimmen in den Winkeln überein, denn sie haben den Winkel C gemeinschaftlich, und die Winkel CBA und $CB'A'$, sowie BAC und $B'A'C$, sind korrespondierende Winkel an Parallelen. Aus § 22 ist ferner bekannt, daß

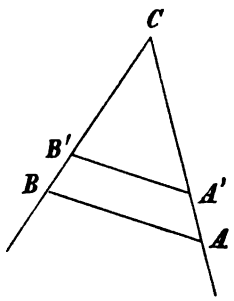


Fig. 111.

$$CA' : CA = CB' : CB = A'B' : AB \quad ,$$

daß also je zwei entsprechende Seiten dieser beiden Dreiecke, d. h. solche, die gleichen Winkeln gegenüberliegen, in demselben Verhältnis stehen oder proportional sind.

Durch Vertauschung der Mittelglieder der Proportionen erhält man

$$AB : BC = A'B' : B'C = CA : CA' \quad ,$$

oder die fortlaufende Proportion:

$$AB : BC : CA = A'B' : B'C : CA' \quad .$$

Es ist also auch das Verhältnis zweier Seiten des einen Dreiecks gleich dem Verhältnis der entsprechenden Seiten des andern.

Da eins dieser Dreiecke als ein in verkleinertem (verjüngtem) oder vergrößertem Maßstab gezeichnetes Bild des andern betrachtet werden kann, so haben beide Dreiecke gleiche Gestalt und man nennt sie ähnlich. Es ist also $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C$; wobei man voraussetzt, daß A und A', B und B', entsprechende Punkte sind. Es ist nicht notwendig, daß zwei ähnliche Dreiecke auch die Lage zueinander haben, daß ein Winkel beiden gemeinschaftlich ist, aber man kann sie stets in diese gegenseitige Lage bringen. Es folgt daher allgemein:

1) Wenn zwei Dreiecke in den Winkeln übereinstimmen, so sind sie ähnlich und die entsprechenden Seiten sind proportional. Da der dritte Winkel eines Dreiecks durch die beiden andern bestimmt ist, so genügt es, die Übereinstimmung der Dreiecke in zwei Winkeln nachzuweisen.

Man kann den Satz 1) auch aussprechen:

Die Gestalt eines Dreiecks ist durch die Winkel bestimmt.

Hieraus ergeben sich als besondere Fälle:

Gleichseitige Dreiecke sind ähnlich.

Rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in einem spitzen Winkel übereinstimmen. Die Gestalt eines rechtwinkligen Dreiecks ist also durch einen spitzen Winkel bestimmt.

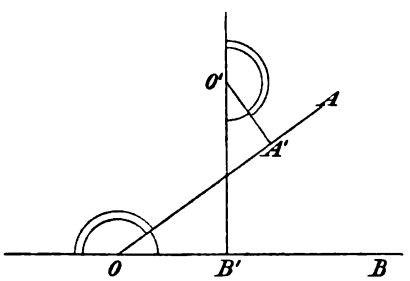


Fig. 112.

Da Winkel mit parallelen Schenkeln gleich sind (§ 8 Nr. 2, 8)), wenn beide spitz oder beide stumpf sind, so sind zwei Dreiecke ähnlich, wenn ihre Seiten paarweise im gleichen oder entgegengesetzten Sinne parallel laufen.

Zwei gleichartige Winkel (beide spitz oder beide stumpf) sind gleich, wenn ihre Schenkel aufeinander senkrecht stehen. Denn sind (Fig. 112) die Schenkel der spitzen Winkel AOB und $A'O'B'$ aufeinander senkrecht, so haben die Winkel dasselbe Komplement,

sie sind also einander gleich, wie auch ihre stumpfen Nebenwinkel. Daher folgt auch, daß zwei Dreiecke ähnlich sind, wenn ihre Seiten paarweis aufeinander senkrecht stehen.

2. Der Satz, daß aus der Gleichheit der Winkel zweier Dreiecke ihre Ähnlichkeit und damit die Proportionalität der entsprechenden Seiten folgt, gestattet mehrere Umkehrungen, die an sich interessant, wenn sie auch selten angewandt werden. Zunächst sieht man, daß wenn in zwei Dreiecken ABC und $A'B'C'$ (Fig. 113), $\angle C' = \angle C$ ist, sie sich so aufeinander legen lassen, daß sich die Schenkel dieser Winkel decken. Sind dann noch die Verhältnisse der einschließenden Seiten gleich, ist also

$$A'C' : C'B' = AC : CB ,$$

und legt man die entsprechenden Seiten aufeinander, so daß $A'C' = A''C$, $C'B' = CB''$ wird, so muß nach § 22 Nr. 3, 4) $A''B''$ parallel zu AB sein. Daher ist $\triangle A''B''C \sim \triangle ABC$ und da $\triangle A''B''C \cong \triangle A'B'C'$ ist, so muß auch $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ sein. Zwei Dreiecke sind also ähnlich, wenn sie in einem Winkel und dem Verhältnis der einschließenden Seiten übereinstimmen.

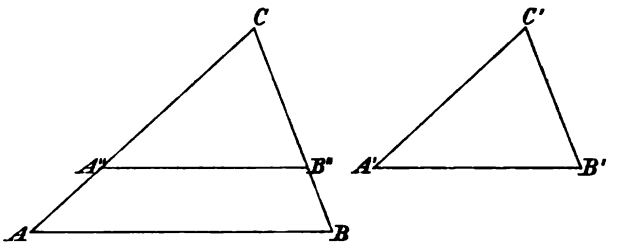


Fig. 113.

Sind in den beiden Dreiecken ABC und $A'B'C'$ die Winkel C und C' und die Verhältnisse zweier nicht einschließender Seiten gleich, etwa

$$A'B' : B'C' = AB : BC ,$$

so kann man $B''C = B'C'$ machen und durch B'' die Parallele $B''A''$ zu BA ziehen, so daß

$$A'B'' : B''C = AB : BC$$

wird. Dann muß aber auch

$$A''B'' : B'C' = AB : BC$$

sein, also $A'B' = A''B''$. Die Dreiecke $A'B'C'$ und $A''B''C$ wären daher kongruent, wenn $A'B' > B'C'$ und $AB > BC$ wäre. In diesem Falle würde $\triangle A''B''C$, also auch das ihm kongruente $A'B'C'$ dem Dreieck ABC ähnlich sein. Dreiecke sind also ähnlich, wenn sie in einem Winkel und dem Verhältnis zweier diesen Winkel nicht einschließenden Seiten übereinstimmen, vorausgesetzt, daß in jedem Dreieck der gleiche Winkel der größern dieser beiden Seiten gegenüberliegt.

Setzt man endlich voraus, daß die Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ denen des Dreiecks ABC proportional sind, so daß

$$A'B' : B'C' : C'A' = AB : BC : CA$$

ist, so kann man wieder $B''C = B'C'$ machen und durch B'' die Parallele $B''A''$ zu AB ziehen. Dann ist $\triangle A''B''C \sim \triangle ABC$ also

$$A''B'' : B''C : CA'' = AB : BC : CA$$

oder

$$A''B'' : B'C' : CA'' = AB : BC : CA ,$$

woraus folgt, daß $A''B'' = A'B'$, $CA'' = C'A'$ sein muß. Dann ist aber $\triangle A''B''C \cong \triangle A'B'C'$ und mithin $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$. Es ergibt sich also, daß zwei Dreiecke ähnlich sind, wenn ihre Seiten proportional sind.

3. Schon aus dem Begriffe der Ähnlichkeit als Gleichheit der Gestalt folgt, läßt sich aber auch in jedem einzelnen Falle beweisen, daß in zwei ähnlichen Dreiecken nicht nur das Verhältnis zweier entsprechender Seiten konstant ist,

sondern daß auch zwei in den beiden Dreiecken entsprechend konstruierte Strecken dieses Verhältnis haben. Wie zwei entsprechende Seiten verhalten sich also in ähnlichen Dreiecken z. B. entsprechende Höhen, Mittellinien, Winkelhalbierende, entsprechende Abschnitte dieser Geraden auf entsprechenden Seiten, die Radien der Um- und Inkreise, die Radien entsprechender Ankreise; ebenso Summen und Differenzen von Seiten oder entsprechender Strecken, wie die Umfänge der Dreiecke u. s. w. Man kann daher dieses konstante Verhältnis zweier entsprechender Längen das herrschende Verhältnis der beiden ähnlichen Dreiecke nennen. Sind zwei entsprechende Längen, z. B. zwei entsprechende Seiten, a und a', so ist das herrschende Verhältnis $a : a'$.

Ebenso folgt, daß entsprechende Winkel, die entsprechende Strecken ähnlicher Dreiecke mit den Seiten oder miteinander bilden, gleich sein müssen.

In Beziehung auf die Inhalte ähnlicher Dreiecke gilt dagegen folgendes:

Sind zwei entsprechende Seiten a und a' und die darauf stehenden Höhen h und h', so ist das Verhältnis der Flächen F und F' gemäß § 24 Nr. 4 gleich dem Verhältnis der Produkte aus Grundlinie und Höhe, also

$$\frac{F}{F'} = \frac{ah}{a'h'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{h}{h'} \quad ;$$

da aber nach dem vorhergehenden

$$\frac{h}{h'} = \frac{a}{a'}$$

sein muß, so ist

$$\frac{F}{F'} = \frac{a^2}{a'^2} = \left(\frac{a}{a'}\right)^2 \quad .$$

D. h. die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Seiten, oder das Verhältnis der Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke ist gleich dem Quadrate des herrschenden Verhältnisses.

Dieses Flächenverhältnis gilt nun auch für das Verhältnis der Inhalte entsprechender Dreiecke, die von entsprechenden Strecken der ähnlichen Dreiecke begrenzt werden.

§ 28. Proportionen beim rechtwinkligen Dreieck.

1. Die zur Hypotenuse senkrechte Höhe CD eines rechtwinkligen Dreiecks ABC (Fig. 114) teilt dieses in zwei rechtwinklige Dreiecke, die einander und dem ganzen ähnlich sind. Die rechtwinkligen Dreiecke CBD und ABC stimmen in dem ihnen gemeinschaftlichen Winkel B und die Dreiecke ACD und ABC in dem Winkel A überein; in den rechtwinkligen Dreiecken CBD und ACD sind die Winkel BCD und CAD (und ebenso die Winkel DBC und DCA) gleich, da beide denselben dritten Winkel DCA (BCD) zu 90^0 ergänzen.

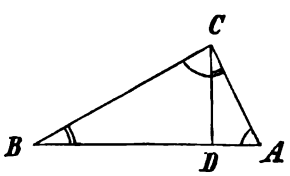


Fig. 114.

Durch die gleichen Winkel sind die entsprechenden Seiten dieser Dreiecke bestimmt.

Unter den 3 · 3 Proportionen zwischen den Seiten der genannten Dreiecke, die sich aus ihrer Ähnlichkeit ergeben, sind folgende von Interesse:

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CBD und ACD folgt:

$$BD : DC = DC : DA \quad .$$

Eine solche Proportion heißt eine stetige und besagt, daß die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks die mittlere Proportionale zwischen den Projektionen der Katheten auf die Hypotenuse ist.

Man kann auch schreiben $DC^2 = BD \cdot DA$, und sind $CD = h$, $BD = p$, $DA = q$, so gestattet die hiernach zwischen diesen drei Strecken bestehende Beziehung

$$1) \qquad h^2 = pq$$

die Berechnung einer aus den beiden andern. So ist

$$h = \sqrt{pq}, \quad p = \frac{h^2}{q}, \quad q = \frac{h^2}{p}.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CBD und ABC folgt:

$$DB : BC = BC : AB.$$

Auch diese Proportion ist eine stetige; sie besagt, daß eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks die mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und ihrer Projektion auf die Hypotenuse ist.

Dieser Satz gilt selbstverständlich für jede der beiden Katheten; man kann ganz ebenso wie für BC den Beweis für AC, nämlich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ACD und ABC, führen. Es ist also auch

$$DA : AC = AC : AB.$$

Diese beiden Proportionen lassen sich in die Gleichungen

$$BC^2 = DB \cdot AB, \quad AC^2 = DA \cdot AB$$

umformen, oder wenn $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ gesetzt wird:

$$2) \qquad a^2 = cp, \quad b^2 = cq.$$

Durch Addition erhält man

$$a^2 + b^2 = c(p + q)$$

und da

$$3) \qquad p + q = c$$

ist:

$$4) \qquad a^2 + b^2 = c^2.$$

Diese Gleichung drückt in arithmetischer Form den pythagoreischen Lehrsatz (§ 25 Nr. 2) aus, wie die Gleichungen 1) und 2) die mit diesem im Zusammenhang stehenden Sätze 3) und 1) in § 25 Nr. 2. Das Quadrat über einer Strecke wird ausgedrückt durch das (arithmetische) Quadrat der Strecke und das Rechteck aus zwei Strecken durch das Produkt dieser Strecken.

Die Gleichungen 1) bis 4) dienen dazu, vier der sechs Strecken a, b, c, p, q, h zu berechnen, wenn zwei gegeben sind.

So erhält man z. B. aus $a = 3$, $b = 4$, zunächst $c = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$;

$$p = \frac{a^2}{c} = \frac{9}{5} = 1{,}8; \quad q = \frac{b^2}{c} = \frac{16}{5} = 3{,}2,$$

oder

$$q = c - p = 5 - 1{,}8 = 3{,}2;$$

ferner

$$h = \sqrt{pq} = \sqrt{\frac{9}{5} \cdot \frac{16}{5}} = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2{,}4.$$

Ist ferner $c = 101$, eine Kathete $b = 99$ gegeben, so hat man

$$a = \sqrt{101^2 - 99^2} = \sqrt{(101 + 99)(101 - 99)} = \sqrt{400} = 20 \quad ,$$

und dann wie vorher $p = \frac{20 \cdot 20}{101}$, u. s. w.

Sind a und h gegeben, so ist die Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes auf das rechtwinklige Dreieck BCD kürzer als die Auflösung der obigen Gleichungen. Man erhält dann

$$a^2 = h^2 + p^2 \, , \qquad p = \sqrt{a^2 - h^2} \quad ,$$

ferner nach 1):

$$q = \frac{h^2}{p} = \frac{h^2}{\sqrt{a^2 - h^2}} \quad ,$$

nach 2)

$$c = \frac{a^2}{p} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - h^2}} \, , \quad b = \sqrt{c\,q} = \frac{a\,h}{\sqrt{a^2 - h^2}} \quad .$$

Sind ferner a und q gegeben, so erhält man zunächst p durch Auflösung der quadratischen Gleichung

$$a^2 = p\,(p + q)$$

auf die Unbekannte p, wobei die negative Wurzel der Gleichung zu verwerfen ist, da p eine absolute Länge ist. Aus p und a erhält man c, aus p und q ebenso h u. s. w.

Insbesondere ist die Bestimmung der Höhe h aus zwei Seiten des Dreiecks bemerkenswert. Aus $p = \frac{a^2}{c}$, $q = \frac{b^2}{c}$ und $h^2 = p\,q$ folgt

$$h = \frac{a\,b}{c} \quad ,$$

Dieselbe Gleichung erhält man, wenn man den doppelten Inhalt des rechtwinkligen Dreiecks einmal mit der Hypotenuse als Grundlinie, das andre Mal durch die beiden Katheten ausdrückt.

Mit Benutzung von 4) erhält man noch:

$$h = \frac{a\,b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

und die bemerkenswerte Beziehung:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \quad .$$

In den vorstehenden Zahlenbeispielen sind die Quadratwurzeln rational. Dies ist im allgemeinen nicht der Fall. So erhält man für $a = 1$, $b = 2$ den Wert $c = \sqrt{5}$. In einem gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck ist $a = b$, $c = \sqrt{2\,a^2} = a\sqrt{2}$.

2. Aus der arithmetischen Fassung des pythagoreischen Lehrsatzes ergibt sich unmittelbar auch seine Umkehrung. Sind a, b, c die Seiten eines Dreiecks und besteht die Beziehung:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad ,$$

so ist das Dreieck rechtwinklig und c die Hypotenuse.

Da beispielsweise $3^2 + 4^2 = 5^2$ ist, so muß ein Dreieck, dessen Seiten das Dreifache, Vierfache und Fünffache einer beliebigen Strecke sind, rechtwinklig sein. Man kann sich dieser Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks zur Konstruktion

eines rechten Winkels, also zur Lösung der Aufgabe bedienen, auf einer gegebenen Geraden in einem gegebenen Punkte die Senkrechte zu errichten; ein Verfahren, das in der Tat bei Bauhandwerkern in Gebrauch ist. Dieses Dreieck, dessen Seiten sich zueinander wie 3 : 4 : 5 verhalten, also in rationalen Verhältnissen stehen, wird das ägyptische genannt. Andre rechtwinklige Dreiecke, welche dieselbe Eigenschaft rationaler Seitenverhältnisse haben, sind beispielsweise die mit den Seiten 12, 5, 13 oder 8, 15, 17, allgemein diejenigen, deren Seiten den Formeln

$$a = 2mn\,, \quad b = m^2 - n^2\,, \quad c = m^2 + n^2$$

für rationale Werte von m und n entsprechen. Man nennt solche rechtwinklige Dreiecke überhaupt rationale oder pythagoreische und das ägyptische ist dasjenige, dessen Seiten die kleinsten in natürlichen Zahlen ausgedrückten Werte haben.

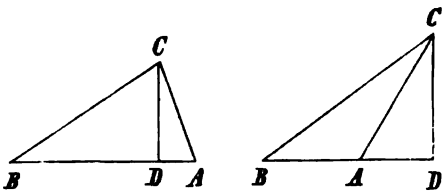


Fig. 115.

3. Auch der allgemeine pythagoreische Lehrsatz (§ 25 Nr. 4) läßt sich in arithmetischer Form ableiten, indem man den besondern benutzt. Ist nämlich im Dreieck ABC (Fig. 115), $CD = h$, die Höhe auf $AB = c$ und sind die Seiten $BC = a$, $CA = b$ und die Projektion von b auf c, $AD = q$, so hat man im Dreieck BCD:

$$a^2 = h^2 + (c \mp q)^2 \quad ,$$

wobei das obere oder das untere Vorzeichen gilt, je nachdem a einem spitzen oder stumpfen Winkel gegenüberliegt. Nun ist

$$h^2 = b^2 - q^2 \quad ,$$

also

$$a^2 = b^2 - q^2 + c^2 \mp 2cq + q^2$$

oder endlich:

$$5) \qquad a^2 = b^2 + c^2 \mp 2cq \quad .$$

Dies ist in der Tat der Satz 4) in § 25 Nr. 4 in arithmetischer Form.

Mittels dieses allgemeinen pythagoreischen Lehrsatzes kann man aus den drei Seiten eines Dreiecks die Projektion einer Seite auf eine andre berechnen. Es ist

$$\pm q = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \quad .$$

Hieraus ergibt sich ferner

$$h^2 = b^2 - q^2 = (b+q)\cdot(b-q) = \left(b + \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\cdot\left(b - \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)$$

$$= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2c} \cdot \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2c} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2c} \cdot \frac{a^2 - (b-c)^2}{2c}$$

$$= \frac{(a+b+c)(b+c-a)\cdot(a-b+c)(a+b-c)}{4c^2} \quad .$$

Da nun der Inhalt des Dreiecks

$$F = \tfrac{1}{2} ch$$

ist, so kann man ihn aus den drei Seiten mittels der Formel

$$6) \qquad F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$$

berechnen. Setzt man zur Abkürzung die Summe der drei Seiten oder den Umfang des Dreiecks

$$a + b + c = 2s \quad ,$$

so wird $b + c - a = 2s - 2a = 2(s - a)$, und entsprechend

$$a + c - b = 2(s - b), \quad a + b - c = 2(s - c) \quad ,$$

wodurch die Formel 6) in

$$7) \qquad F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

übergeht. Diese, die Heronische Dreiecksformel, ist eine der wichtigsten Formeln der Geometrie.

Der Inhalt des Dreiecks ist also im allgemeinen irrational durch die Seiten ausgedrückt.

Aus der Formel 6) erhält man noch, wenn man quadriert und die Faktoren ausmultipliziert:

$$16F^2 = [(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2] = a^2(b+c)^2 + a^2(b-c)^2 - (b^2 - c^2)^2 - a^4$$
$$= 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 \quad .$$

Aus dem Inhalt des Dreiecks ergeben sich die Höhen:

$$8) \qquad h_a = \frac{2F}{a}, \quad h_b = \frac{2F}{b}, \quad h_c = \frac{2F}{c} \quad .$$

Aus diesen drei Gleichungen finden sich die Beziehungen:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a+b+c}{2F} = \frac{s}{F} \quad ,$$

$$-\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{-a+b+c}{2F} = \frac{s-a}{F} \quad ,$$

$$\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a-b+c}{2F} = \frac{s-b}{F} \quad ,$$

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} = \frac{a+b-c}{2F} = \frac{s-c}{F} \quad ,$$

deren Multiplikation ergibt:

$$\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(-\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)$$
$$= \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{F^4} = \frac{1}{F^2} \quad .$$

Daraus erhält man durch die Formel

$$\frac{1}{F} = \sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(-\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)}$$

ein Mittel, um den Inhalt des Dreiecks aus den drei Höhen zu berechnen.

Die in § 24 Nr. 5 entwickelten Gleichungen:

$$F = s\varrho = (s-a)\varrho_a = (s-b)\varrho_b = (s-c)\varrho_c \quad ,$$

ermöglichen auch die Berechnung der Radien des In- und der Ankreise aus den drei Seiten des Dreiecks. Man erhält

$$\varrho = \frac{F}{s} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2}} \quad ,$$

oder

$$9) \qquad \varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \quad ,$$

und ebenso

$$10) \qquad \varrho_a = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}} \quad ,$$

u. s. w.

Multipliziert man die vier Gleichungen für F, so erhält man

$$F^4 = s(s-a)(s-b)(s-c) \cdot \varrho\,\varrho_a\varrho_b\varrho_c = F^2 \cdot \varrho\,\varrho_a\varrho_b\varrho_c \quad ,$$

also

$$F = \sqrt{\varrho\,\varrho_a\varrho_b\varrho_c} \quad .$$

Aus denselben Gleichungen ergeben sich noch die weiteren:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{s}{F}, \quad \frac{1}{\varrho_a} = \frac{s-a}{F}, \quad \frac{1}{\varrho_b} = \frac{s-b}{F}, \quad \frac{1}{\varrho_c} = \frac{s-c}{F} \quad .$$

Addiert man die drei letzten dieser Gleichungen, so wird

$$\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} = \frac{3s-(a+b+c)}{F} = \frac{s}{F} \quad ,$$

also nach der ersten:

$$\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} = \frac{1}{\varrho} \quad .$$

Vergleicht man endlich diese Gleichungen mit den Beziehungen für die Höhen, so erhält man die neuen Beziehungen:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\varrho}, \quad -\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\varrho_a} \quad ,$$

u. s. w.

Die hier vorkommenden Größen $s-a$, $s-b$, $s-c$ haben übrigens eine geometrische Bedeutung, die an der Figur leicht zu erkennen ist. Fällt man nämlich vom Mittelpunkt des Inkreises die Senkrechten auf die drei Seiten, die alle gleich ϱ und deren Fußpunkte die Berührungspunkte sind, so wird jede Seite in zwei Abschnitte geteilt. Je zwei an einer Ecke anliegende Abschnitte sind aber einander gleich als Tangenten von dem Eckpunkt an den Inkreis. Bezeichnet man die an A, B, C liegenden Abschnitte mit x, y, z, so ist

$$2x + 2y + 2z = 2s, \quad x + y + z = s \quad ;$$

nun ist aber

$$y + z = a \quad ,$$

folglich

$$x = s - a$$

und entsprechend

$$y = s - b, \quad z = s - c \quad .$$

4. Der allgemeine pythagoreische Lehrsatz gestattet ferner die Berechnung der drei Mittellinien eines Dreiecks aus den drei Seiten. Ist unter Beibehaltung der vorher gebrauchten Bezeichnungen $CE = m_c$ die Mittellinie, welche die Seite c in E halbiert, so liefert die Anwenduug des Lehrsatzes auf die Dreiecke BCE und ACE die Gleichungen:

$$a^2 = m_c^2 + \tfrac{1}{4}c^2 \pm 2 \cdot \tfrac{1}{2}c \cdot ED \quad ,$$
$$b^2 = m_c^2 + \tfrac{1}{4}c^2 \mp 2 \cdot \tfrac{1}{2}c \cdot ED \quad ,$$

aus denen durch Addition folgt:

$$a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \tfrac{1}{2}c^2 \quad .$$

Hieraus erhält man:

$$11) \qquad m_c = \tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

und entsprechend die beiden andern Mittellinien durch Vertauschung der Buchstaben.

Addiert man die drei Gleichungen für m_a^2, m_b^2, m_c^2 so ergibt sich die Beziehung:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \tfrac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \quad ,$$

oder

$$a^2 + b^2 + c^2 = \tfrac{4}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) \quad ;$$

da nun auch

$$a^2 + b^2 - \tfrac{1}{2}c^2 = 2m_c^2$$

ist, so erhält man durch Subtraktion der beiden letzten Gleichungen:

$$\tfrac{3}{2}c^2 = \tfrac{4}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) - 2m_c^2 \quad ,$$

woraus sich

$$12) \qquad c = \tfrac{2}{3}\sqrt{2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2}$$

ergibt.

5. Beispiele:

1. Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks aus der Seite a zu berechnen. Aus dem pythagoreischen Lehrsatze folgt

$$h = \sqrt{a^2 - (\tfrac{1}{2}a)^2} = \tfrac{1}{2}a\sqrt{3} \quad .$$

2. Den Inhalt F eines gleichseitigen Dreiecks aus der Seite a zu berechnen. Es ist:

$$F = \tfrac{1}{2}ah = \tfrac{1}{4}a^2\sqrt{3} \quad .$$

3. Den Inhalt F eines gleichseitigen Dreiecks aus der Höhe h zu berechnen. Da $\frac{3}{4}a^2 = h^2$, so ist $a = \dfrac{2h}{\sqrt{3}} = \tfrac{2}{3}h\sqrt{3}$, und

$$F = \tfrac{1}{2}ah = \tfrac{1}{3}h^2\sqrt{3} \quad .$$

4. Die Hypotenuse c eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks aus der Kathete a zu berechnen. Es ist:

$$a^2 + a^2 = c^2, \quad c = a\sqrt{2} \quad .$$

5. Die Katheten a, b eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks aus der Hypotenuse c zu berechnen. Man hat

$$a = b = c\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}c\sqrt{2} \quad .$$

6. Die Höhe h eines gleichschenkligen Dreiecks aus dem Schenkel a und der Basis b zu berechnen. Nach dem pythagoreischen Lehrsatze ist:

$$h = \sqrt{a^2 - \tfrac{1}{4}b^2} = \sqrt{(a + \tfrac{1}{2}b)(a - \tfrac{1}{2}b)} \quad .$$

7. Den Flächeninhalt F eines gleichschenkligen Dreiecks aus dem Schenkel a und der Basis b zu berechnen. Man erhält

$$F = \tfrac{1}{2}b\sqrt{a^2 - \tfrac{1}{4}b^2} \quad .$$

8. Aus dem Flächeninhalt F und der Hypotenuse c eines rechtwinkligen Dreiecks die Katheten $a > b$ zu berechnen. Man hat die Gleichungen:

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad ab = 2F \quad ,$$

aus denen man erhält:

$$(a+b)^2 = c^2 + 4F, \quad (a-b)^2 = c^2 - 4F \quad ,$$

$$\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{c^2+4F} \pm \sqrt{c^2-4F}\right] \quad .$$

9. Aus den Katheten a, b eines rechtwinkligen Dreiecks den Radius ϱ des Inkreises zu berechnen. Es ist:

$$\tfrac{1}{2}ab = F, \quad \tfrac{1}{2}(a+b+c)\varrho = F, \quad c = \sqrt{a^2+b^2} \quad ,$$

also

$$(a+b+\sqrt{a^2+b^2})\varrho = ab \quad ,$$

woraus:

$$\varrho = \frac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ab\left[a+b-\sqrt{a^2+b^2}\right]}{(a+b)^2-(a^2+b^2)} = \tfrac{1}{2}\left(a+b-\sqrt{a^2+b^2}\right) \quad .$$

Aus der Figur findet man sofort

$$\varrho = s - c = \tfrac{1}{2}(a+b-c)$$

10. Den Inhalt F eines regelmäßigen Sechsecks aus seiner Seite a zu berechnen. Es ist:

$$F = \tfrac{1}{2}\varrho u = 3a\varrho \; ; \quad \varrho^2 = a^2 - \tfrac{1}{4}a^2 \; ; \quad F = \tfrac{3}{2}a^2\sqrt{3} \quad .$$

Dasselbe Resultat erhält man durch Zerlegung des regelmäßigen Sechsecks in sechs gleichseitige Dreiecke mit der Seite a.

11. Ein 32 Fuß hohes Bambusrohr wurde vom Winde geknickt, und die gesenkte Spitze berührte den Boden in einer Entfernung von 16 Fuß vom Stamme. Wie hoch über dem Boden befand sich die Stelle, an der es geknickt wurde? Aus $(32-x)^2 = x^2 + 16^2$ folgt $x = 12$ Fuß.

12. Eine Lotosblume, die in einem See $\frac{1}{2}$ Fuß über das Wasser hervorragte, neigte sich vom Winde getrieben, und die Knospe verschwand in einer Entfernung von zwei Fuß von ihrem früheren Orte. Wie tief war das Wasser? Die Gleichung: $(x+\frac{1}{2})^2 = x^2 + 4$ ergibt $x = 3\frac{3}{4}$ Fuß.

13. In einen Kreis vom Radius r ist ein Rechteck beschrieben, dessen eine Seite die Länge a hat. Man berechne den Flächeninhalt F des Rechtecks. Ist die andre Seite b, so hat man:

$$b = \sqrt{4r^2 - a^2} \; , \quad F = ab = a\sqrt{4r^2 - a^2} \quad .$$

14. Wie lang ist die Sehne s eines Kreises mit dem Radius $r = 25{,}9$, deren Abstand vom Mittelpunkt $d = 8{,}4$ ist? Es ergibt sich:

$$s = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{(25{,}9+8{,}4)\,(25{,}9-8{,}4)} = 49 \quad .$$

15. Eine Höhe eines Dreiecks sei gleich h gegeben und teile die Grundlinie c in zwei Abschnitte p und q. Man berechne die drei Seiten des Dreiecks. $h = 140$; $p = 48$; $q = 105$. Sind a, b die beiden andern Seiten, so hat man:

$$a = \sqrt{h^2+p^2} = 148 \; ; \quad b = \sqrt{h^2+q^2} = 175 \; ; \quad c = q \pm p \; , \quad c_1 = 153 \; , \quad c_2 = 57 \quad .$$

16. Die Diagonale eines Rechtecks sei d und eine Seite sei um c länger als die andre; man berechne die Seiten $x > y$. Aus den Gleichungen:

$$x^2 + y^2 = d^2 \; ; \quad x - y = c \quad ,$$

findet man:

$$(x+y)^2 = 2d^2 - c^2 \; , \quad \left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{2d^2-c^2} \pm c\right] \quad .$$

17. Den Flächeninhalt F eines Quadrats aus der Summe s seiner Diagonale und Seite zu berechnen. Aus:

$$s = a\sqrt{2} + a \quad ;$$

findet man:

$$a = \frac{s}{\sqrt{2}+1} = s(\sqrt{2}-1) \; ; \quad F = a^2 = (3 - 2\sqrt{2})\, s^2 \quad .$$

18. Den Flächeninhalt F eines rechtwinkligen Dreiecks aus den beiden durch die Höhe gebildeten Abschnitten p, q der Hypotenuse zu berechnen. $p = 0{,}18$, $q = 0{,}50$. Es ist:

$$c = p + q \, , \quad h = \sqrt{p\,q} \; ; \quad F = \tfrac{1}{2}(p+q)\sqrt{p\,q} = 0{,}102 \quad .$$

19. Den Flächeninhalt F eines gleichschenkligen Dreiecks aus der Höhe h_a auf einem Schenkel und der Höhe h_b auf der Basis zu berechnen. Es ist:

$$F = \tfrac{1}{2}\, a\, h_a = \tfrac{1}{2}\, b\, h_b \, , \quad a^2 = h_b^2 + \tfrac{1}{4} b^2 \quad ,$$

daher

$$\frac{b^2 h_b^2}{h_a^2} = h_b^2 + \tfrac{1}{4} b^2 \quad ,$$

woraus

$$b^2 = \frac{4\, h_a^2 h_b^2}{4\, h_b^2 - h_a^2} \, , \quad F = \frac{h_a h_b^2}{\sqrt{4\, h_b^2 - h_a^2}} \quad .$$

20. Den Flächeninhalt F eines Trapezes aus der Höhe h, den nicht parallelen Seiten c, d und der kleinern parallelen Seite b zu berechnen. Ist a die größere parallele Seite, so ergibt sich:

$$a = b + \sqrt{c^2 - h^2} + \sqrt{d^2 - h^2} \; ; \quad F = \tfrac{1}{2}(a+b)\, h \quad .$$

21. Von einem Dreieck seien die drei Seiten a, b, c gegeben; man berechne die Projektionen von a auf die beiden andern. $a = 12$, $b = 13$, $c = 14$. Aus:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\, c\, p \; : \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2\, b\, q \quad ,$$

finden sich:

$$p = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\, c} \, , \quad q = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\, b} \; ; \quad p = 6\tfrac{3}{28} \, , \quad q = 4\tfrac{1}{2} \quad .$$

22. Den Flächeninhalt eines Dreiecks aus seinen drei Seiten a, b, c zu berechnen für α) $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$; β) $a = 150$, $b = 25$, $c = 145$; γ) $a = 120$, $b = 29$, $c = 101$. Resultate: α) 84, β) 1800, γ) 1200.

23. Aus den drei Seiten a, b, c eines Dreiecks die drei Höhen zu berechnen. $a = 408$, $b = 41$, $c = 401$. Resultat: 40; 398,0488; 40,6983.

24. Aus den drei Seiten a, b, c eines Dreiecks den Radius des Inkreises zu berechnen. $a = 40$, $b = 13$, $c = 37$. Resultat: $5\frac{1}{3}$.

25. Aus den drei Seiten a, b, c eines Dreiecks die Radien der Ankreise zu berechnen. $a = 44$, $b = 15$, $c = 37$. Resultat: 66; 8; 24.

26. Aus den drei Seiten eines Dreiecks die drei Mittellinien zu berechnen. $a = 102$, $b = 61$, $c = 109$. Resultat: 72,1110; 101,0557; 63,9707.

27. Aus den drei Mittellinien eines Dreiecks die drei Seiten zu berechnen. $m_a = 63$, $m_b = 42$, $m_c = 39$. Resultat: $a = 34$, $b = 64$, $c = 66{,}4830$.

28. Aus zwei Seiten a, b eines Dreiecks und dem Inhalt F die dritte Seite c zu berechnen. Aus der Gleichung

$$c^4 - 2\,(a^2 + b^2)\, c^2 + (a^2 - b^2)^2 + 16\, F^2 = 0$$

erhält man

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 \mp 2\sqrt{a^2 b^2 - 4\, F^2}} \quad .$$

Es muß $F < \frac{1}{2} a b$ sein; für $F = \frac{1}{2} a b$ gibt es ein rechtwinkliges, für $F < \frac{1}{2} a b$ ein spitz- und ein stumpfwinkliges Dreieck. Die Zweideutigkeit geht aus der Konstruktion hervor: ein Dreieck von gegebener Grundlinie a in ein andres auf derselben Grundlinie mit der Seite b zu verwandeln.

§ 29. Proportionen beim Kreise.

1. Gehen durch einen Punkt P innerhalb eines Kreises (Fig. 116) zwei Sehnen AB, CD, so entstehen durch die Verbindungslinien AC, BD ihrer Endpunkte zwei Dreiecke ACP und DBP. In diesen sind die Winkel APC und BPD als Scheitelwinkel, und die Winkel ACP und PBD als Peripheriewinkel über demselben Bogen gleich, mithin sind diese Dreiecke ähnlich. Daher folgt

$$PA : PC = PD : PB \quad ,$$

oder auch

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD \quad ,$$

d. h. das Produkt der Abschnitte der einen Sehne ist gleich dem Produkt der Abschnitte der andern.

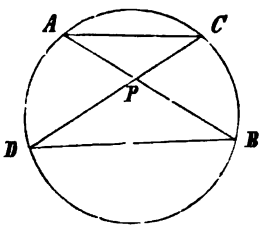


Fig. 116.

Gehen ferner durch einen Punkt P außerhalb eines Kreises zwei Sekanten (Fig. 117), so erhält man durch die einander innerhalb des Kreises schneidenden Verbindungslinien AC, DB ihrer Schnittpunkte mit dem Kreise die Dreiecke ACP und DBP, die den Winkel P gemeinschaftlich haben, und deren Winkel PAC und PDB als Peripheriewinkel auf demselben Bogen einander gleich sind. Diese Dreiecke sind daher ähnlich, und hieraus folgt die Proportion

$$PA : PC = PD : PB \quad ,$$

oder die Gleichung

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD \quad .$$

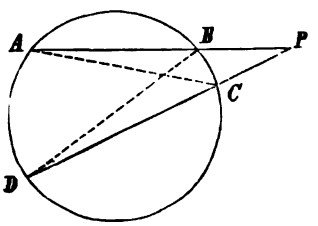


Fig. 117.

Versteht man unter den Abschnitten zweier Sekanten, die sich innerhalb oder außerhalb des Kreises schneiden, die Strecken, die zwischen ihrem Schnittpunkt und den Punkten des Kreises liegen, so hat man in beiden Fällen den Satz:

1) Schneiden sich zwei Sekanten eines Kreises, so sind die Produkte ihrer Abschnitte gleich.

Ebenso wichtig wie dieser Satz ist seine Umkehrung: Liegen auf zwei Geraden, die sich in P schneiden, je zwei Punkte A, B: C, D so, daß

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

ist, und werden die Strecken AB und CD durch P beide innen oder beide außen geteilt (§ 23 Nr. 1), so liegen die vier Punkte A, B, C, D auf einem Kreise. Durch drei Punkte A, B, C ist nämlich ein Kreis bestimmt: würde dieser nicht durch D gehen, so müßte PC von ihm in D' geschnitten werden. Es müßte also

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD'$$

sein. Diese Gleichung würde aber der Voraussetzung widersprechen: also muß D' mit D zusammenfallen.

Dieser Satz bietet außer dem Satze vom Sehnenviereck (§ 17 Nr. 3) ein Mittel um zu beweisen, daß vier Punkte auf einem Kreise liegen.

Der Satz 1) bleibt auch noch richtig, wenn P auf dem Kreise liegt, denn es wird dann auf jeder Sekante ein Abschnitt gleich Null, also auch beide Produkte.

Zieht man durch einen Punkt P im Innern des Kreises den Durchmesser und die in P zu diesem senkrechte Sehne, so wird die Sehne von dem Durchmesser halbiert. Es ist dann nach 1) das Quadrat der halben Sehne gleich dem Produkt der Abschnitte des Durchmessers. Da aber der Durchmesser mit einem Endpunkt der Sehne ein rechtwinkliges Dreieck bestimmt, so erkennt man den Satz 1) in § 25 Nr. 1 als besondern Fall des obigen.

Liegt P außerhalb des Kreises, so gilt der Satz 1) auch für den Fall, daß eine Sekante zu einer Tangente wird. Dann fällt z. B. Punkt B mit A in den Berührungspunkt der Tangente zusammen: ihre beiden Abschnitte werden gleich und der Satz 1) nimmt die Gestalt an:

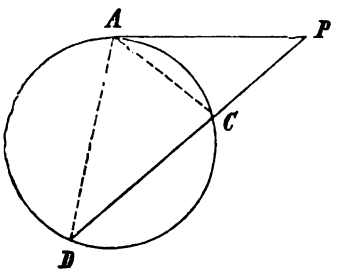


Fig. 118.

2) Schneiden sich eine Tangente und eine Sekante eines Kreises, so ist das Quadrat der Tangente gleich dem Produkt der Sekantenabschnitte oder die Tangente ist die mittlere Proportionale zwischen den Sekantenabschnitten.

Der Satz 2) kann auch unabhängig von 1) bewiesen werden. Zieht man die Hilfslinien AC und AD (Fig. 118), so ist in den Dreiecken ACP und DAP der Sehnen-Tangentenwinkel PAC gleich dem Peripheriewinkel ADP. Damit ist, da die Dreiecke den Winkel P gemein haben, die Ähnlichkeit dieser Dreiecke und somit auch die Gültigkeit der Proportion

$$PC : PA = PA : PD$$

bewiesen.

Gehen beide Sekanten in Tangenten über, so sind nach 1) und 2) die Quadrate der Tangenten also auch diese selbst gleich. Dieser besondere Fall ist dann der Satz, daß die von einem Punkt an den Kreis gelegten Tangenten gleich sind (§ 15 Nr. 2).

Aus den Sätzen 1) und 2) folgt nun:

3) Für alle durch denselben Punkt gehenden Sekanten eines Kreises hat das Produkt der Abschnitte einen konstanten Wert.

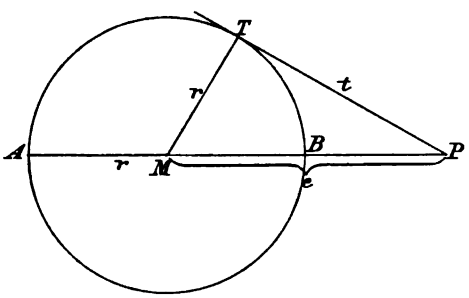


Fig. 119.

Dieser konstante Wert heißt die Potenz des Punktes in Bezug auf den Kreis. Liegt der Punkt außerhalb des Kreises, dessen Radius r ist, in der Entfernung $e > r$ vom Mittelpunkt (Fig. 119), so kann man den konstanten Wert bestimmen, wenn man irgend eine Sekante von dem Punkte durch den Kreis zieht, z. B. die durch den Mittelpunkt gehende. Die Abschnitte dieser Sekante sind $PA = e + r$ und $PB = e - r$, folglich ist die Potenz des Punktes in Bezug auf den Kreis

$$(e + r)(e - r) = e^2 - r^2 \quad .$$

Denselben Wert erhält man, wenn man von P die Tangente $PT = t$ an den Kreis legt; denn nach dem pythagoreischen Lehrsatz ist in dem rechtwinkligen Dreieck PTM:

$$t^2 = e^2 - r^2 \quad .$$

Setzt man nun fest, daß der Wert der Potenz berechnet werden soll, indem man das Quadrat der Entfernung des Punktes vom Mittelpunkt des Kreises um das Quadrat des Radius vermindert, so wird für einen Punkt P innerhalb des Kreises

die Potenz negativ zu nehmen sein und in dem besondern Falle, daß P auf dem Kreise liegt, nimmt sie den Wert Null an. Liegt P innerhalb des Kreises, so wird der absolute Wert der Potenz gleich dem Quadrat der halben kürzesten Sehne, die man durch diesen Punkt ziehen kann.

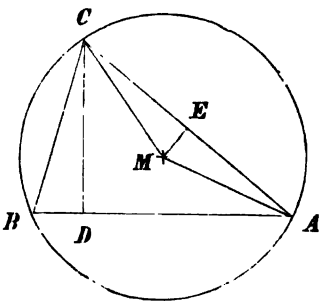


Fig. 120.

2. Verbindet man den Mittelpunkt M des Umkreises eines Dreiecks ABC (Fig. 120) mit den Eckpunkten A und C, so ist der Winkel CMA als Centriwinkel auf demselben Bogen doppelt so groß als der Winkel CBA. Fällt man also die Senkrechte ME auf CA, so ist $\angle EMA = \angle CBA$. Es sei ferner CB die Höhe auf AB: dann stimmen die rechtwinkligen Dreiecke CBD und AME in den genannten Winkeln überein, und sind mithin ähnlich. Hieraus folgt

$$CD : BC = AE : MA \quad ,$$

oder wenn man $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $MA = r$, $CD = h_c$ setzt,

$$h_c : a = \tfrac{1}{2} b : r \quad ,$$

oder

$$5) \qquad a b = 2 r h_c \quad ,$$

d. h. das Produkt aus zwei Seiten eines Dreiecks ist gleich dem Produkt aus dem Durchmesser des Umkreises und der Höhe auf der dritten Seite.

Aus der vorstehenden Gleichung folgt ferner

$$h_c = \frac{a b}{2 r} \quad ,$$

und setzt man dies in die Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks $F = \frac{1}{2} c h_c$ ein, so erhält man

$$5) \qquad F = \frac{a b c}{4 r} \quad .$$

Durch Anwendung der Heronischen Dreiecksformel kann man auch den Radius r des Umkreises durch die Seiten ausdrücken. Man erhält

$$6) \quad r = \frac{a b c}{4 F} = \frac{a b c}{4 \sqrt{s (s-a) (s-b) (s-c)}}$$

$$= \frac{a b c}{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}} \quad .$$

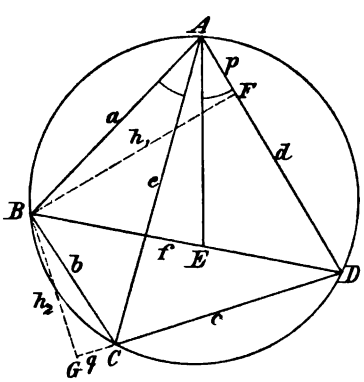


Fig. 121.

3. Ist $ABCD$ (Fig. 121) ein Sehnenviereck, dessen Diagonalen AC und BD sind, und macht man $\angle DAE = \angle BAC$, so sind die Dreiecke AED und ABC, die auch in den auf demselben Bogen stehenden Peripheriewinkeln ACB und ADE übereinstimmen, ähnlich. Ferner ist auch $\angle BAE = \angle DAC$, und da die Dreiecke DAC und BAE außerdem in den Peripheriewinkeln ACD und ABE übereinstimmen, so sind auch diese Dreiecke ähnlich. Hieraus folgt:

$$AD : AC = DE : BC, \quad AD \cdot BC = AC \cdot DE$$

und

$$AC : CD = AB : BE, \quad AB \cdot CD = AC \cdot BE \quad ;$$

daher ist auch

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot (DE + BE) \quad ,$$

oder

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD \quad ,$$

d. h. 7) in einem Sehnenviereck ist das Produkt aus den beiden Diagonalen gleich der Summe der Produkte aus je zwei gegenüberliegenden Seiten.

Dieser Satz heißt der PTOLEMÄische Lehrsatz.

Setzt man $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$, $BD = f$ und den Radius des Umkreises gleich r, so ist also

$$ef = ac + bd \quad .$$

Der Inhalt F des Sehnenvierecks $ABCD$ läßt sich sowohl als Summe der Dreiecke ABC und ACD, wie als Summe der Dreiecke ABD und BCD durch die Seiten dieser Dreiecke und den Radius r des Umkreises ausdrücken. Man erhält hiernach:

$$F = \frac{(ab + cd)e}{4r} = \frac{(ad + bc)f}{4r} \quad .$$

Aus der Gleichheit dieser beiden für F gefundenen Ausdrücke folgt dann

$$\frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd} \quad .$$

Hiernach kann man die Diagonalen des Sehnenvierecks aus den vier Seiten berechnen, indem man die vorstehende Gleichung mit der Formel des PTOLEMÄischen Lehrsatzes multipliziert und dividiert. Man erhält so:

8) $$e = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}, \quad f = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}} \quad .$$

Um den Flächeninhalt des Sehnenvierecks aus seinen vier Seiten zu berechnen, fälle man die Senkrechte $BF = h_1$ auf AD und die Senkrechte $BG = h_2$ auf CD (oder deren Verlängerung). Dann ist

$$F = \triangle ABD + \triangle BCD = \tfrac{1}{2}(dh_1 + ch_2) \quad .$$

Da nun ein Innenwinkel des Sehnenvierecks gleich dem gegenüberliegenden Außenwinkel, also $\angle BAF = \angle BCG$ ist, so sind die rechtwinkligen Dreiecke BAF nnd BCG ähnlich, woraus

$$h_1 : h_2 = a : b \, , \quad h_2 = \frac{b}{a} h_1$$

folgt. Man hat daher

$$F = \tfrac{1}{2} h_1 \left(d + \frac{bc}{a}\right) = \tfrac{1}{2} h_1 \frac{ad + bc}{a} \quad .$$

Drückt man die den beiden Dreiecken ABD und BCD gemeinsame Diagonale f nach dem allgemeinen pythagoreischen Lehrsatz doppelt aus, indem man noch $AF = p$, $CG = q$ setzt, so erhält man

$$a^2 + d^2 - 2dp = b^2 + c^2 + 2cq \quad .$$

Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke BAF und BCG ist aber:

$$\frac{q}{p} = \frac{b}{a}, \quad q = \frac{b}{a} p \quad ,$$

so daß die obige Gleichung heißt:

$$a^2 + d^2 - 2dp = b^2 + c^2 + 2\frac{bc}{a}p \quad ,$$

woraus sich

$$p = a\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}$$

ergibt. Da nun

$$h_1 = \sqrt{a^2 - p^2} = \sqrt{(a+p)(a-p)}$$

ist, so findet man:

$$a + p = a\frac{2ad + 2bc + a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} = a\frac{(a+d)^2 - (b-c)^2}{2(ad+bc)}$$
$$= a\frac{(a - b + c + d)(a + b - c + d)}{2(ab + cd)} \quad ,$$

$$a - p = a\frac{2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2}{2(ad + bc)} = a\frac{(b+c)^2 - (a-d)^2}{2(ad+bc)}$$
$$= a\frac{(-a + b + c + d)(a + b + c - d)}{2(ad + bc)} \quad .$$

Damit ergibt sich nun

$$h_1 = \frac{a}{2(ad+bc)}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}$$

und

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)} \, .$$

Setzt man zur Abkürzung noch $a + b + c + d = 2s$, so erhält man

$$9) \qquad F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \quad .$$

Aus den Formeln für den Flächeninhalt erhält man umgekehrt

$$r = \frac{(ab + cd)e}{4F} = \frac{(ad + bc)f}{4F} \quad ;$$

setzt man hierin die Werte von e, f und F ein, so ergibt sich der Radius des Umkreises ausgedrückt durch die vier Seiten:

$$10) \; r = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}} \, .$$

Für $d = 0$ geht die Formel 9) in die Heronische Dreiecksformel und Formel 10) in 6) über.

4. Beispiele: 1. Den Radius r des Umkreises eines Dreiecks mit den Seiten $a = 7$, $b = 7{,}5$, $c = 6{,}5$ zu berechnen. Es ist der Inhalt $F = \sqrt{10{,}5 \cdot 3{,}5 \cdot 3 \cdot 4} = 21$, $r = 7 \cdot 7{,}5 \cdot 6{,}5 : 84 = 4\frac{1}{16}$.

2. Der Flächeninhalt eines Sehnenvierecks mit den Seiten $a = 57$, $b = 14$, $c = 42$, $d = 41$ ist: $F = \sqrt{20 \cdot 63 \cdot 35 \cdot 36} = 1260$.

3. Sind die Seiten eines Sehnenvierecks $a = 52$, $b = 25$, $c = 39$, $d = 60$, so erhält man die Diagonalen aus $ef = 8 \cdot 9 \cdot 49$ und $\frac{e}{f} = \frac{9}{8}$, nämlich $e = 63$, $f = 56$. Da der Inhalt $F = 1764$ ist, so ergibt sich der Radius des Umkreises $r = 32{,}5$.

§ 30. Konstruktionsaufgaben zur Ähnlichkeit.

Auf der Proportionalität der Seiten ähnlicher Dreiecke beruht die Auflösung einiger wichtiger Konstruktionsaufgaben:

1) Zu drei gegebenen Strecken die vierte Proportionale zu konstruieren,

d. h. zu drei Strecken a, b, c, eine vierte Strecke x zu finden, so daß

$$a : b = c : x, \quad x = \frac{bc}{a}$$

ist. Schon mit Hilfe der Sätze von den parallelen Transversalen eines Dreiecks (§ 22) lassen sich verschiedene Lösungen dieser Aufgabe geben. Beispielsweise kann man (Fig. 122) auf einer beliebigen Geraden zwei Strecken $AB = a$, $BC = b$ nacheinander abtragen, durch A eine beliebige Gerade ziehen, auf dieser $AD = c$ abtragen, D mit B verbinden und durch C die Parallele CX zu BD ziehen; dann ist DX die gesuchte Strecke. Oder man kann — wodurch an Raum gespart wird — auf einer beliebigen Geraden von demselben Punkte A aus die Strecken $AB = a$, $AC = b$, dann auf einer durch A gelegten Geraden $AD = c$ abtragen, wieder D mit B verbinden und zu BD die Parallele CX ziehen; dann ist AX die verlangte Strecke. — Man konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck ABC, dessen Schenkel CA, CB gleich a sind, und dessen Grundlinie $AB = b$ ist, beschreibe mit einem Radius gleich c um C einen Kreisbogen, der CB (oder deren Verlängerung) in D, CA in E schneidet, so ist DE die verlangte vierte Proportionale. Diese Auflösung empfiehlt sich besonders dann, wenn zu denselben Strecken a und b und verschiedenen c mehrere vierte Proportionalen zu suchen sind, da man in jedem neuen Falle nur eines neuen Kreisbogens bedarf. Sie setzt übrigens voraus, daß b kleiner als $2a$ sei. Von dieser Beschränkung frei ist die folgende: Man konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck ABC, dessen Schenkel CA, CB gleich a sind, dessen Basis aber beliebig lang ist, beschreibe um C mit b einen Kreisbogen, der AB oder deren Verlängerung in F schneidet, ziehe CF, beschreibe um C mit c einen Kreisbogen, der CB in D, CA in E trifft, und ziehe DE, so schneidet diese Gerade oder deren Verlängerung von CF eine Strecke CX ab, welche die gesuchte ist.

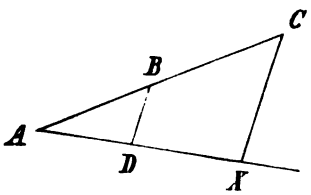


Fig. 122.

Man kann sich auch des Satzes 1) in § 29 zur Lösung dieser Aufgabe bedienen: Trägt man auf einer Geraden die Strecken $AB = b$, $BC = c$ nacheinander ab, beschreibt durch die Punkte A und C einen beliebigen Kreis, sowie um B mit a einen Kreisbogen, der diesen Kreis in D schneidet und zieht durch D und B die Sehne, so ist deren zweiter Abschnitt BX die verlangte Strecke. In ähnlicher Weise lassen sich zwei Sekanten benutzen, die einander außerhalb des Kreises schneiden. Auch bei diesen Konstruktionen bedarf man für jedes neue a bei denselben b und c nur eines neuen Kreisbogens.

Schreibt man die Bedingung der Aufgabe

$$ax = bc \quad ,$$

so hat man die Aufgabe, ein Rechteck mit den Seiten b, c in ein andres mit der Seite a zu verwandeln.

2) Sind die zweite und dritte der drei gegebenen Strecken einander gleich, so entsteht die folgende Aufgabe:

Zu zwei gegebenen Strecken die dritte Proportionale zu konstruieren, d. h. wenn a, b die gegebenen Strecken sind, eine dritte Strecke x

zu finden, so daß

$$a : b = b : x, \quad x = \frac{b^2}{a}$$

ist. Die Auflösung kann in derselben Weise geschehen, wie bei der vorigen Aufgabe, indem statt c die Strecke b wiederholt gesetzt wird. Man kann aber auch die Sätze in § 28 Nr. 1 von den mittleren Proportionalen beim rechtwinkligen Dreieck benutzen, indem man ein solches Dreieck so konstruiert, daß entweder b die Höhe und a der eine Abschnitt der Hypotenuse: oder b eine Kathete und, je nachdem a größer oder kleiner als b ist, a entweder die Hypotenuse oder die Projektion jener Kathete auf die Hypotenuse wird. Bei der ersten Konstruktion ist der andre Abschnitt der Hypotenuse, bei der zweiten die Projektion der Kathete auf die Hypotenuse oder diese selbst die gesuchte Strecke. Da man ferner die obige Proportion in

$$a x = b^2$$

umformen kann, so ergibt sich die Zusammengehörigkeit dieser Aufgabe mit der frühern: ein gegebenes Quadrat in ein Rechteck zu verwandeln, von dem eine Seite gegeben ist.

3) Die Aufgabe zu zwei gegebenen Strecken die mittlere Proportionale zu konstruieren,

d. h. wenn a, b die gegebenen Strecken sind, eine dritte Strecke x zu finden, so daß

$$a : x = x : b$$

ist, läßt sich ebenfalls mittels der Sätze vom rechtwinkligen Dreieck (§ 28 Nr. 1) lösen. Konstruiert man über einer aus $AB = a$ und $BC = b$ bestehenden Strecke AC als Durchmesser den Halbkreis und errichtet auf AC in B die Senkrechte BD, die den Halbkreis in D trifft, so ist BD die verlangte Strecke; denn zieht man AD und CD, so ist der Winkel ADC als Peripheriewinkel im Halbkreise ein rechter und somit die Höhe BD des rechtwinkligen Dreiecks ADC die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten AB und BC der Hypotenuse. Oder man kann auf einer Strecke AB, die gleich der größern der beiden Strecken a, b gemacht ist, eine Strecke AC gleich der kleinern abschneiden, über AB als Durchmesser den Halbkreis und auf AB in C die Senkrechte CD bis zum Durchschnitt mit dem Halbkreis ziehen; die Verbindungslinie AD ist dann die gesuchte Strecke x.

Man kann ferner die Sätze in § 29 Nr. 1 anwenden. Zeichnet man wieder eine Linie AC, welche die Summe der Strecken $AB = a$ und $BC = b$ ist, legt dann durch A und C einen beliebigen Kreis, verbindet dessen Mittelpunkt M mit B und errichtet auf MB in B die Senkrechte, die den Kreis in D schneidet, so ist BD die verlangte Strecke x, denn BD ist die Hälfte einer in B halbierten Sehne und daher $BD \cdot BD = AB \cdot BC$. Macht man AC zum Durchmesser des Kreises, so wird diese Konstruktion mit der ersten der vorher angegebenen identisch. — Konstruiert man ferner BC als Differenz der gegebenen Strecken $AB = a$, $AC = b$ legt durch B und C einen beliebigen Kreis und zieht an diesen von A aus die Tangente, so ist diese die gesuchte mittlere Proportionale.

Endlich ergibt sich durch die Umformung der obigen Proportion in

$$x^2 = a b$$

unmittelbar der Zusammenhang der vorstehenden Aufgabe mit der frühern, ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

4) Mit dem Namen des goldenen Schnitts (sectio aurea, auch sectio divina) bezeichnet man die Teilung einer Strecke in der Art, daß der größere Abschnitt die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Strecke und dem kleinern

Abschnitt ist. Bezeichnet man also die zu teilende Strecke durch a, den größern Abschnitt durch x, so daß der kleinere $a - x$ ist, so soll

$$a : x = x : (a - x)$$

sein.

Zieht man an einen Kreis mit dem Mittelpunkt M (Fig. 123) eine dem Durchmesser gleiche Tangente AB und durch B und den Mittelpunkt des Kreises die Sekante, die den Kreis in C und D schneidet, so ist BD in C nach dem goldenen Schnitt geteilt, denn es ist (§ 29 Nr. 1, 2)).

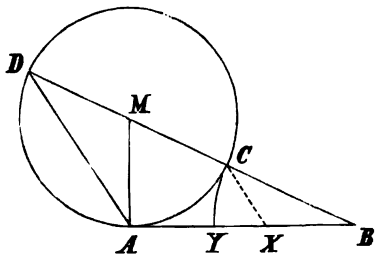


Fig. 123.

$$BA^2 = BC \cdot BD$$

und da $AB = CD$ nach Konstruktion ist, auch

$$CD^2 = BC \cdot BD \quad ,$$

$$BD : CD = CD : BC \quad .$$

Zieht man daher DA und darauf CX parallel zu DA bis zum Durchschnitt X mit AB, so ist auch AB in X nach dem goldenen Schnitt geteilt, denn es ist

$$AB : AX = BD : CD \text{ und } AX : BX = CD : BC \quad ,$$

mithin nach der letzten Proportion:

$$AB : AX = AX : BX \quad .$$

Beachtet man noch, daß aus

$$AB : AX = BD : CD$$

und der andern

$$AB : BC = BD : AB$$

unter Berücksichtigung von $CD = AB$ folgt, daß $AX = BC$ ist, so ergibt sich folgende Auflösung der Aufgabe, eine Strecke $AB = a$ nach dem goldenen Schnitt zu teilen: Man errichte in A zu AB die Senkrechte $AM = \frac{1}{2} a$, verbinde M mit B und mache $MC = MA$; trägt man BC auf AB von B auf, so ist der Endpunkt Y der gesuchte Teilpunkt und BY ist der größere Abschnitt der nach dem goldenen Schnitt geteilten Strecke a.

§ 31. Ähnlichkeit der Vielecke.

1. Verbindet man einen beliebigen Punkt S in der Ebene eines Vielecks mit allen Eckpunkten, teilt sämtliche Verbindungslinien in demselben beliebigen Verhältnis, derart daß alle Teilpunkte entweder auf den Verbindungslinien selbst oder daß alle auf deren Verlängerungen über die Eckpunkte, oder endlich daß alle auf den Verlängerungen über den Punkt S liegen, so sind die Teilpunkte die Eckpunkte eines Vielecks von ebensoviel Seiten wie das erste. Es sei $ABCDE$ die eine, $A'B'C'D'E'$ (Fig. 124) die andre dieser Figuren, also $SA' : A'A = SB' : B'B$ u. s. w., mithin auch

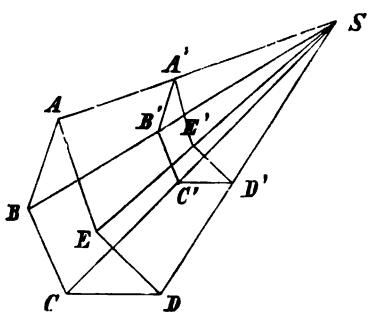


Fig. 124.

$$SA' : SA = SB' : SB = SC' : SC = \ldots \quad .$$

so folgt aus § 22 Nr. 2, 4), daß je zwei entsprechende Seiten $A'B'$, AB; $B'C'$, BC; u. s. w. parallel sind.

Liegt hierbei der Punkt S auf den Verlängerungen der Verbindungslinien AA', BB' u. s. w., so sind je zwei parallele Seiten gleich gerichtet, liegt dagegen S auf den Strecken AA', BB' u. s. w. selbst (Fig. 125), so sind je zwei parallele Seiten entgegengesetzt gerichtet.

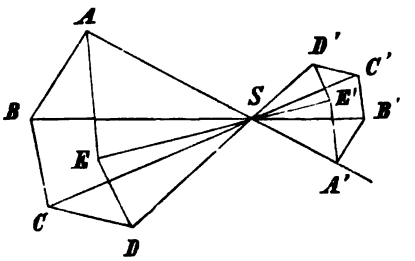


Fig. 125.

Hieraus folgt weiter nach § 8 Nr. 2, 8), daß je zwei entsprechende Winkel der beiden Vielecke gleich sind. Ferner ist nach § 22

$$A'B' : AB = SB' : SB \quad ,$$

$$B'C' : BC = SB' : SB \quad ,$$

also auch

$$A'B' : AB = B'C' : BC \quad .$$

Ebenso ergibt sich $B'C' : BC = C'D' : CD = SC' : SC$ u. s. w. und hieraus, daß je zwei entsprechende Seiten der beiden Vielecke dasselbe Verhältnis haben.

Hiernach kann jedes dieser Vielecke, ebenso wie bei ähnlichen Dreiecken (§ 27 Nr. 1), als ein Bild des andern in verkleinertem oder vergrößertem Maßstab angesehen werden. Sie haben also gleiche Gestalt und man nennt sie ähnlich.

Während zwei Dreiecke ähnlich sind, wenn sie in den Winkeln übereintimmen, und die Proportionalität der Seiten aus der Gleichheit der Winkel folgt, ist bei Vielecken von mehr als drei Seiten die Gleichheit der Winkel nicht ausreichend, um sie als ähnlich zu bezeichnen. Wenn man z. B. in einem Viereck $ABCD$ (Fig. 126) zu einer Seite AD die Parallele $A'D'$ zieht, so hat das Viereck $A'BCD'$ offenbar nicht dieselbe Gestalt, wie $ABCD$. Es gehört zur Ähnlichkeit zweier Vielecke, daß sie in den Winkeln übereinstimmen und die entsprechenden Seiten proportional sind.

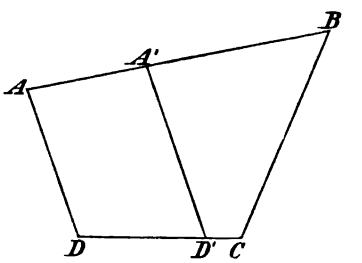


Fig. 126.

Aus der obigen Untersuchung geht nun hervor, daß beide Bedingungen erfüllt sind, wenn entsprechende Eckpunkte zweier Vielecke auf Strahlen liegen, die durch denselben Punkt gehen und zugleich die entsprechenden Seiten in gleichem oder entgegengesetztem Sinne parallel sind.

2. Umgekehrt lassen sich zwei ähnliche Vielecke in eine solche Lage zu einander bringen, daß je zwei entsprechende Seiten parallel sind; in diesem Falle schneiden die Verbindungslinien je zweier entsprechender Eckpunkte einander in demselben Punkt und werden durch ihn im Verhältnis zweier entsprechender Seiten der Vielecke geteilt. Denn wenn

$$AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D'$$

u. s. w., und

$$\angle ABC = \angle A'B'C' , \quad \angle BCD = \angle B'C'D'$$

u. s. w., vorausgesetzt wird, so kann man das Vieleck $A'B'C'D' \ldots$ so legen, daß $A'B'$ parallel zu AB wird, und wenn man durch A und A', B und B', C und C' u. s. w. die Geraden zieht, der Winkel $B'BC = ABC - ABB'$ und der Winkel $BB'C' = A'B'C' - A'B'B$, also, da nach Voraussetzung $ABC = A'B'C'$, und da ferner ABB' und $A'B'B$ als korrespondierende oder Wechselwinkel an Parallelen einander gleich sind, auch $BB'C' = B'BC$ sein muß. Hieraus folgt aber, daß auch $B'C'$ parallel zu BC ist. Daher ist ferner der Winkel BCC' gleich $B'C'C$ und also auch $BCD - BCC' = B'C'D' - B'C'C$ oder $C'CD = CC'D'$, woraus wieder folgt, daß CD parallel zu $C'D'$ ist. Indem man in dieser Weise bis zum letzten

Seitenpaare fortschreitet, findet man, daß je zwei entsprechende Seiten der beiden Vielecke parallel sind. Es schneide nun BB' selbst oder in ihrer Verlängerung die durch A und A' gehende Gerade in einem Punkte S, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABS, $A'B'S$, die durch die Gleichheit der Winkel bewiesen wird, daß

$$AS : SA' = AB : A'B'$$

ist. Schneidet ferner die durch C und C' gehende Gerade AA' in S', so ergibt sich in entsprechender Weise

$$AS' : S'A' = BC : B'C' \quad ,$$

und da nach der Voraussetzung

$$BC : B'C' = AB : A'B'$$

ist, so muß auch

$$AS' : SA' = AS : SA$$

sein. Es liegen aber S und S' entweder beide auf AA' selbst oder beide auf deren Verlängerung, und da sie AA' in demselben Verhältnis teilen, so muß nach § 23 Nr. 3, S' mit S zusammenfallen. In gleicher Weise ergibt sich, daß auch DD' die AA', und ebenso, daß jede derartige Verbindungslinie diese Gerade in demselben Punkte S schneiden muß. Hiermit ist bewiesen, daß alle diese Verbindungslinien zweier entsprechender Eckpunkte einander in demselben Punkte schneiden, und außerdem zeigt der vorstehende Beweis, daß

$$AS : SA' = BS : SB' = CS : SC' = \ldots = AB : A'B'$$

u. s. w. ist.

Zwei ähnliche Vielecke, deren entsprechenden Seiten parallel sind, haben zugleich die Eigenschaft, daß ihre entsprechenden Eckpunkte auf Strahlen liegen, die durch denselben Punkt gehen. Man sagt, daß zwei solche ähnliche Vielecke perspektiv liegen. Der Punkt S heißt ihr Ähnlichkeitspunkt. Liegt er auf der Verlängerung der Verbindungslinie zweier entsprechender Eckpunkte, so ist er ein äußerer, liegt er auf dieser Verbindungslinie selbst, so ist er ein innerer Ähnlichkeitspunkt. Ein äußerer Ähnlichkeitspunkt teilt die Verbindungslinie zweier entsprechender Eckpunkte außen, ein innerer Ähnlichkeitspunkt innen im Verhältnis zweier entsprechender Seiten. Im ersten Falle sind die entsprechenden Seiten in gleichem, im zweiten in entgegengesetztem Sinne parallel.

Hat das Teilverhältnis, in dem der Ähnlichkeitspunkt die Verbindungslinie zweier entsprechender Eckpunkte teilt den absoluten Wert 1, so sind die entsprechenden Seiten der ähnlichen Vielecke einander gleich, diese also kongruent. Sind nun die gleichen Seiten in gleichem Sinne parallel, so liegt der Ähnlichkeitspunkt unendlich fern, die entsprechenden Eckpunkte daher auf Parallelen. Zwei kongruente Vielecke können daher in die Lage gebracht werden, daß ihre entsprechenden Eckpunkte auf Parallelen liegen. Dieser besondere Fall der perspektiven heißt affine Lage. Die affin liegenden kongruenten Vielecke $ABCDE$ und $A'B'C'D'E'$ (Fig. 127) können durch parallele Verschiebung des einen zur Deckung gebracht werden. Sind dagegen die gleichen Seiten zweier kongruenter Vielecke in entgegengesetztem Sinne parallel, so haben diese einen innern Ähnlichkeitspunkt, der die Verbindungslinien zweier entsprechender Eckpunkte halbiert (Fig. 128). Sie lassen

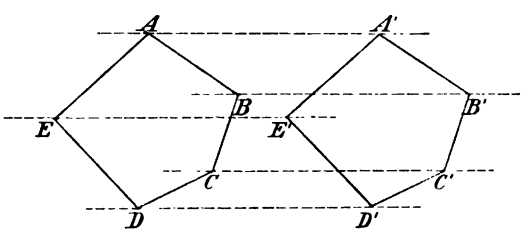


Fig. 127.

sich durch Drehung eines Vielecks um den Ähnlichkeitspunkt S zur Deckung bringen.

3. Aus den Untersuchungen in Nr. 1 und 2 ergibt sich die Lösung der Aufgabe, zu einem Vieleck ein ähnliches zu konstruieren, dessen Seiten zu dem des gegebenen in einem gegebenen Verhältnis stehen. Man konstruiert ein perspektiv liegendes Vieleck, indem man den äußern oder innern Ähnlichkeitspunkt willkürlich wählt. Am einfachsten läßt man ihn mit einem Eckpunkt zusammenfallen. Ebenso kann man zu einem Vieleck ein kongruentes in affiner Lage oder in perspektiver Lage konstruieren.

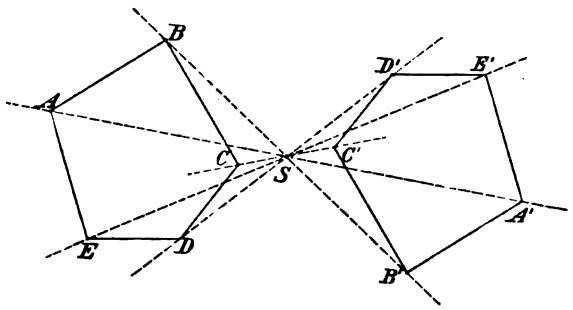


Fig. 128.

4. Jede Gerade, die durch den Ähnlichkeitspunkt zweier perspektiv liegender ähnlicher Vielecke geht, heißt ein Ähnlichkeitsstrahl.

Teilt man zwei entsprechende Seiten dieser Vielecke in demselben Verhältnis, so geht die Verbindungslinie der Teilpunkte durch den Ähnlichkeitspunkt und wird durch ihn im Verhältnis der entsprechenden Seiten geteilt. Der Beweis hierfür kann in derselben Weise geführt werden, wie in Nr. 2. Durch indirekte Beweisführung läßt sich hieraus folgern, daß jeder Ähnlichkeitsstrahl, der das eine Vieleck schneidet, auch das andre schneiden muß, und zwar auf entsprechenden Seiten und daß diese durch die Schnittpunkte in gleichem Verhältnis geteilt werden. Sind $M'N'$ und MN die innerhalb der Figuren fallenden Abschnitte des Ähnlichkeitsstrahls, so folgt aus

$$M'S : SM = N'S : SN = A'B' : AB \quad ,$$

daß auch

$$(M'S \mp N'S) : (SM \mp SN) = A'B' : AB$$

ist, d. h. die innerhalb der Vielecke fallenden Abschnitte eines Ähnlichkeitsstrahls verhalten sich zueinander wie zwei entsprechende Seiten.

Werden auf einem Ähnlichkeitsstrahl zwei Punkte P, P' so angenommen, daß ihre Abstände von dem Ähnlichkeitspunkt S sich zueinander verhalten wie zwei entsprechende Seiten, und liegen P und P', falls S ein äußerer Ähnlichkeitspunkt ist, auf derselben Seite, falls er ein innerer ist, auf verschiedenen Seiten von S, so sind die Punkte P, P' entsprechende Punkte der beiden ähnlichen Vielecke. Für sie ergeben sich folgende Sätze:

Der Abstand des Punktes P von einem Eckpunkt A des zugehörigen Vielecks verhält sich zum Abstand des Punktes P' von dem entsprechenden Eckpunkt A' des andern, wie zwei entsprechende Seiten, und die Verbindungslinie PA ist der Verbindungslinie $P'A'$ parallel. Allgemein ist die Verbindungslinie zweier zu dem einen Vieleck gehörigen Punkte der Verbindungslinie entsprechender Punkte des andern parallel und verhält sich zu ihr, wie eine Seite der ersten zur entsprechenden Seite der andern. Beide Verbindungslinien bilden mit jedem Ähnlichkeitsstrahl, und ebenso bilden je zwei solche entsprechende Strecken miteinander gleiche Winkel. Zieht man umgekehrt von jedem von zwei entsprechenden Punkten zweier ähnlichen und perspektiv liegenden Vielecke Strecken, die sich zueinander wie zwei entsprechende Seiten verhalten und einander parallel sind, und sind diese Strecken beide gleich gerichtet oder entgegengesetzt gerichtet, so liegen die Endpunkte der Strecken auf einem Ähnlichkeitsstrahl.

Insbesondere sind daher entsprechende Diagonalen zweier solcher Vielecke parallel, verhalten sich zueinander wie zwei entsprechende Seiten und bilden

mit jedem Ähnlichkeitsstrahl, sowie mit zwei entsprechenden Seiten und mit zwei andern entsprechenden Diagonalen desselben Vielecks gleiche Winkel.

5. Da zwei entsprechende Strecken zweier ähnlicher Vielecke sich immer wie zwei entsprechende Seiten verhalten, so kann man dieses Verhältnis das herrschende Verhältnis der beiden ähnlichen Vielecke nennen. Dieses bleibt erhalten, wenn man die beiden ähnlichen Vielecke aus ihrer perspektiven Lage bringt; wenn sie also beliebig in der Ebene liegen. Daraus lassen sich noch folgende bemerkenswerte Sätze ableiten:

Teilt man jedes von zwei ähnlichen Vielecken durch die von zwei entsprechenden Eckpunkten ausgehenden Diagonalen in Dreiecke, so sind je zwei entsprechende Dreiecke ähnlich.

Lassen sich umgekehrt zwei Vielecke durch Diagonalen in gleichviel Dreiecke zerlegen, die paarweise ähnlich sind und entsprechend liegen, so sind die Vielecke ähnlich.

Regelmäßige Vielecke von gleicher Seitenzahl sind ähnlich, weil ihre Bestimmungsdreiecke ähnlich sind.

Die Mittelpunkte zweier regelmäßiger n-Ecke sind entsprechende Punkte. Die Radien der Um- und Inkreise zweier regelmäßiger n-Ecke sind entsprechende Strecken.

Die Umfänge zweier ähnlicher Vielecke stehen in dem herrschenden Verhältnis.

6. Sind $ABCD\ldots$ und $A'B'C'D'\ldots$ zwei ähnliche n-Ecke, und teilt man sie durch Diagonalen, die von entsprechenden Eckpunkten A, A' ausgehen, in Dreiecke, so ist, da diese paarweise ähnlich sein müssen, nach § 27 Nr. 3

$$\triangle ABC : \triangle A'B'C' = AB^2 : A'B'^2 \ ,$$

$$\triangle ACD : \triangle A'C'D' = DC^2 : D'C'^2 = AB^2 : A'B'^2$$

und in derselben Weise fortschreitend

$$\triangle ADE : \triangle A'D'E' = DE^2 : D'E'^2 = AB^2 : A'B'^2$$

u. s. w. Also ist

$$\triangle ABC : A'B'C' = ACD : A'C'D' = ADE : A'D'E' = \ldots = AB^2 : A'B'^2 \ ,$$

und mithin auch

$$(ABC + ACD + ADE + \ldots) : (A'B'C' + A'C'D' + A'D'E' + \ldots) = AB^2 : A'B'^2 \ .$$

Sind also die Inhalte der ähnlichen Vielecke F, F' und das herrschende Verhältnis $a : a'$, so ergibt sich

$$\frac{F}{F'} = \frac{a^2}{a'^2} = \left(\frac{a}{a'}\right)^2 ;$$

d. h. die Flächeninhalte ähnlicher Vielecke verhalten sich zueinander wie die Quadrate entsprechender Seiten, oder das Verhältnis der Flächeninhalte ähnlicher Vielecke ist gleich dem Quadrate des herrschenden Verhältnisses.

Umgekehrt ist

$$\frac{a}{a'} = \frac{\sqrt{F}}{\sqrt{F'}} = \sqrt{\frac{F}{F'}} \ ;$$

wonach zu einem Vieleck ein ähnliches konstruiert werden kann, dessen Flächeninhalt zu dem des gegebenen in einem gegebenen Verhältnis steht.

Eine Anwendnng des Satzes ist noch die folgende Verallgemeinerung des phythagoreischen Lehrsatzes: Konstruiert man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks als entsprechende Seiten ähnliche Vielecke, so ist das Vieleck über

der Hypotenuse gleich der Summe der Vielecke über den Katheten. Denn sind a, b die Katheten, c die Hypotenuse und haben die ähnlichen Vielecke die Inhalte F_a, F_b, F_c, so ist

$$\frac{F_a}{F_c} = \frac{a^2}{c^2}, \quad \frac{F_b}{F_c} = \frac{b^2}{c^2},$$

folglich auch

$$\frac{F_a + F_b}{F_c} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1$$

und daher

$$F_a + F_b = F_c .$$

Fünfter Abschnitt.

Messung und Teilung des Kreises. Regelmäßige Vielecke.

§ 32. Messung und Teilung von Winkeln und Kreisbogen.

1. Das Messen von Winkeln geschieht wie bereits in § 3 Nr. 3 angegeben, mittels des rechten Winkels und seiner Unterabteilungen. Während die Bestimmung der Längeneinheit und infolgedessen auch derjenigen der Flächeneinheit der Willkür anheimgegeben ist und daher für den praktischen Gebrauch durch gesetzliche Anordnungen (Meter, Centimeter u. dgl.), jedoch in verschiedenen Ländern in verschiedener Weise festgesetzt wurde, existiert für die Winkel eine in ihrer Natur begründete Einheit, die überall in gleicher Weise gebraucht wird. Nur über die Bestimmung der kleinern Teile dieser natürlichen Einheit, des rechten Winkels, können Verschiedenheiten bestehen, doch ist die Einteilung in 90 Grade zu 60 Minuten zu 60 Sekunden bis jetzt fast allgemein gebräuchlich.

Die wirkliche Ausführung des Messens von Winkeln mittels dieser Einheiten wurde jedoch bisher nicht gelehrt, vielmehr die Resultate vorgenommener Messungen, wo solche behufs Erläuterung vorgetragener Lehren benutzt wurden, als gegeben vorausgesetzt. Selbst die Herstellung dieser Einheiten wurde bisher noch nicht vollständig ermöglicht, denn es ist zwar die Konstruktion eines rechten Winkels und der durch wiederholtes Halbieren entstehenden Teile, sowie auch für den rechten Winkel insbesondere die Teilung in drei gleiche Teile gelehrt worden, allein man erhält auf diesem Wege nur Winkel von 90^0, 60^0, 45^0, 30^0, 15^0 und Vielfache dieser Winkel oder Bruchteile von Geraden enthaltende Hälften, Viertel u. s. w. Die Konstruktion eines Winkels von einem Grad ist noch nicht möglich gewesen.

Setzen wir zunächst voraus, daß ein als Einheit dienender Winkel gegeben sei, so ist die Ausführung des Messens von Winkeln durch wiederholtes Abtragen der Einheit, ähnlich wie beim Messen von Flächen, nicht bequem. Man pflegt deshalb die Winkelmessung auf andre Weise auszuführen.

Beschreibt man um den Scheitel C eines Winkels mit beliebigem Radius einen Kreis, so daß dieser Winkel Centriwinkel des Kreises wird, so gehört zu ihm ein zwischen seinen Schenkeln liegender Kreisbogen, dessen Größe von ihm abhängig sein muß. Nach § 15 Nr. 1 gehören zu gleichen Centriwinkeln desselben Kreises oder gleicher Kreise gleiche Bogen. Zwei ungleiche Centriwinkel desselben Kreises sind entweder vollkommen genau oder bis zu jeder notwendigen Genauigkeit Vielfache eines dritten Winkels. Denkt man sich diesen Winkel auf beide aufgetragen, so wird jeder in eine Anzahl gleicher Teile geteilt, die zu ihnen gehörigen Bogen sind aber einander gleich, also werden auch die zu ihnen

gehörigen Bogen in gleiche Teile geteilt oder beide Bogen sind dieselben Vielfachen eines Bogens, wie die Winkel von einem Winkel. Somit gilt der Satz:

Centriwinkel desselben Kreises oder gleicher Kreise verhalten sich zueinander wie die zugehörigen Bogen.

Hieraus folgt, daß das Verhältnis zweier Kreisbogen sich nicht ändert, wenn der Radius der Kreises größer oder kleiner wird, falls die zugehörigen Centriwinkel dieselbe Größe behalten. Das Verhältnis zweier Centriwinkel kann also durch das der zugehörigen Bogen ersetzt werden und umgekehrt und ist unabhängig von dem Radius.

Es können also die Messungen von Winkeln durch die von Kreisbogen ausgeführt werden und umgekehrt. Als Einheit des Kreisbogens dienen der zum rechten Centriwinkel gehörige Bogen desselben Kreises, der Quadrant und die durch dessen Teilung in 90 gleiche Teile u. s. w. entstehenden Bogen. Die ganze Kreislinie wird hiernach in 360 gleiche Teile geteilt. Jeder Teil erhält auch den Namen Grad, insbesondere Bogengrad zum Unterschied von Winkelgrad und kann entsprechend wie dieser in 60 Bogenminuten und 60 · 60 Bogensekunden geteilt werden.

Die so gewonnenen Einheiten für Kreisbogen sind für verschiedene Kreise verschieden. Jeder Kreisbogen wird hiernach durch einen andern Bogen desselben oder eines gleichen Kreises gemessen; für jeden Radius ist daher die Einheit der Bogen zu bestimmen und es können nicht Kreisbogen verschiedener Radien miteinander verglichen werden. Die so erhaltenen Zahlen der Einheiten von Kreisbogen geben nicht ihre absoluten Längen, sondern nur die Verhältnisse zur Länge eines bestimmten Bogens desselben Kreises an.

Die Gleichmäßigkeit in der angegebenen Teilung des Kreises und der Winkel führt, da jeder Centriwinkel sich zum Winkelgrad, wie der zugehörige Bogen zum Bogengrad verhalten muß, zu dem Satze:

Jeder Bogen eines Kreises hat so viel Bogeneinheiten, wie sein Centriwinkel Winkeleinheiten und es kann somit die Zahl der Winkel-Grade, -Minuten und -Sekunden eines Winkels durch die der Bogen-Grade u. s. w. irgend eines zugehörigen Kreisbogens ersetzt werden und umgekehrt.

Daher bedient man sich zum Messen und Auftragen von Winkeln eines geteilten Kreises von beliebigem Radius, dessen Mittelpunkt auf den Scheitel des Winkels gelegt wird. Die nähere Erörterung der betreffenden Instrumente, wie des Transporteurs, des Theodolits u. dgl., findet man in den betreffenden Schriften über praktische Geometrie. Die Einrichtung und der Gebrauch des zum Zeichnen benutzten, den gewöhnlichen Reißzeugen beigegebenen Transporteurs, eines geteilten Halbkreises, dürfte nun unmittelbar verständlich sein.

2. Die Aufgabe der Teilung und Messung von Winkeln ist hiernach zurückgeführt auf die Teilung von Kreisbogen; ebenso kann man umgekehrt diese auf die Teilung der Winkel zurückführen.

Die Teilung von Kreisbogen durch elementare Konstruktion unterliegt daher denselben Schwierigkeiten, wie die von Winkeln. Eine allgemeine Auflösung der Aufgabe kann auch hier nur für die Teilung in zwei und die durch wiederholtes Halbieren aus diesen erhaltenen, also in 2^n gleiche Teile gegeben werden und schon die allgemeine Teilung eines Kreisbogens in drei gleiche Teile ist wie die Trisektion des Winkels, mittels alleiniger Anwendung von Lineal und Zirkel nicht ausführbar. Zur Halbierung eines Kreisbogens hat man nur nötig, um jeden seiner Endpunkte mit demselben beliebigen Radius und auf derselben Seite des Bogens je einen weitern Kreisbogen zu beschreiben und ihren Schnittpunkt mit dem Mittelpunkt des gegebenen Kreises oder auch, z. B. wenn der Mittelpunkt nicht gegeben ist, mit dem ebenso bestimmten zweiten Schnittpunkt der beiden Hilfsbogen zu verbinden, denn diese Linie halbiert

nach § 20 Nr. 2, 5) den zugehörigen Centriwinkel. Im geometrischen Zeichnen wird ein Bogen gewöhnlich durch Probieren halbiert (vgl. § 20 Nr. 2).

Anders als mit der Teilung beliebiger Kreisbogen verhält es sich mit dem besonders wichtigen Fall, daß die ganze Kreislinie in eine vorgeschriebene Anzahl gleicher Teile geteilt werden soll. Dann sind auch noch andere Teilungen möglich, ebenso wie die Trisektion des Winkels in dem besondern Falle, daß dieser ein rechter ist. Um den ganzen Kreis in n gleiche Teile zu teilen, ist es notwendig und hinreichend, zu zeigen, wie sich ein Winkel konstruieren läßt, dessen Größe $\frac{360^0}{n}$ beträgt, denn n solche Centriwinkel würden aneinander gelegt zusammen 360^0, und der zu einem solchen gehörige Bogen würde also den n-ten Teil des Kreises betragen. Ein solcher Winkel läßt sich mit Lineal und Zirkel nur für einige Werte von n konstruieren.

Für $n = 2$, d. h. für die Teilung des Kreises in zwei gleiche Teile, hat man nur einen Durchmesser, für $n = 4$ zwei zueinander senkrechte Durchmesser zu ziehen.

Für $n = 6$ trage man den Radius sechsmal nacheinander als Sehne in den Kreis ein. Verbindet man nämlich die Endpunkte einer solchen Sehne mit dem Mittelpunkt, so entsteht ein gleichseitiges Dreieck, mithin beträgt der zu ihr gehörige Centriwinkel 60^0, d. i. den sechsten Teil von 360^0.

Für $n = 10$ teile man einen Radius nach dem goldenen Schnitt (§ 30 Aufg. 4) und trage den größern Abschnitt zehnmal nacheinander als Sehne in den Kreis ein. Ist der Bogen AB (Fig. 129) der zehnte Teil des Kreises, also der zugehörige Centriwinkel $ACB = 36^0$, so erhält man durch die Sehne AB ein gleichschenkliges Dreieck, in dem jeder Winkel an der Grundlinie AB gleich $\frac{1}{2}(180^0 - 36^0) = 72^0$, also doppelt so groß als der Winkel an der Spitze ist. Halbiert man also den Winkel CAB, so ist, wenn D den Schnittpunkt der Halbierungslinie mit CB bezeichnet,

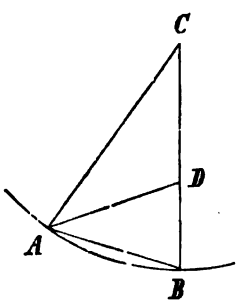


Fig. 129.

$$\angle CAD = \angle ACD \text{ , also } AD = CD \text{ .}$$

Ebenso ist $\angle DAB = \angle CAD = 36^0$, und da $\angle CBA = 72^0$ ist, auch $\angle ADB = 72^0$, mithin $AD = AB$. Daher ist auch $AB = CD$. Die Halbierungslinie AD teilt aber die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden (vgl. § 23 Nr. 5), es ist also

$$AC : AB = CD : DB \text{ ,}$$

und mithin auch

$$CB : CD = CD : DB \text{ ,}$$

d. h. CB ist in D nach dem goldenen Schnitt geteilt, und AB ist gleich dem größern Abschnitt CD. Umgekehrt ergibt sich, wenn $CB : CD = CD : DB$ und $AB = CD$ vorausgesetzt und AD gezogen wird, daß auch

$$AC : AB = AB : DB$$

sein muß. Da hiernach die Dreiecke ACB und BAD in einem Seitenverhältnis übereinstimmen und den eingeschlossenen Winkel B gemeinsam haben, so sind sie ähnlich. Deshalb muß auch BAD gleichschenklig, also $AB = AD = CD$, und daher $\angle DCA = \angle CAD$ sein. Ist $\angle DCA = \alpha$, so ist auch jeder der Winkel DAB, DAC gleich α, mithin $CAB = 2\alpha$, also CBA ebenfalls gleich 2α, und die Summe der Winkel des Dreiecks $ACB = 5\alpha$. Aus $5\alpha = 180^0$ folgt $\alpha = 36^0$; was zu beweisen war.

Für $n = 15$ hat man den Centriwinkel von $\frac{360^0}{15} = 24^0$ zu konstruieren. Da $24 = 60 - 36$ ist, so hat man zu diesem Zweck nur die Differenz eines Sechstels und eines Zehntels der Peripherie zu konstruieren.

Aus den angegebenen Teilungen des Kreises ergeben sich andre durch Zusammenfassen mehrerer gleicher Teile zu einem und durch wiederholtes Halbieren der Teile. Durch Verdopplung eines Teiles erhält man aus der Teilung in sechs die in drei, und aus der Teilung in zehn die in fünf gleiche Teile. Durch Halbieren eines Teiles ergibt sich aus der Teilung in vier gleiche Teile die in acht, dann aus dieser die in sechzehn gleiche Teile u. s. w. In gleicher Weise gelangt man von $n = 6$ auf $n = 12$, 24 u. s. w., von $n = 10$ auf $n = 20$, 40 u. s. w. und von $n = 15$ auf $n = 30$, 60 u. s. w. Allgemein ist man also mit Hilfe der obigen Teilungen imstande, einen Kreis in $2 \cdot 2^n$, $3 \cdot 2^n$, $5 \cdot 2^n$ und $15 \cdot 2^n$ gleiche Teile zu teilen.

Auf diese Teilungen des Kreises beschränkte sich die Geometrie der Alten. C. F. Gauss zeigte in seinen *disquisitiones arithmeticae* 1796, daß außerdem die Teilung in eine Zahl von Teilen durch elementare Konstruktion möglich sei, wenn diese eine Primzahl von der Form $2^n + 1$ ist, also für 17, 257 u. s. w. Er erweiterte also die obigen vier Reihen von Teilungen um eine unendlich große Anzahl solcher Reihen. Alle sonst noch übrigen Teilungen des Kreises, also beispielsweise schon die in sieben gleiche Teile, sind durch elementare Konstruktion nicht möglich.

Es ist hiernach möglich, außer Winkeln von 90^0, 60^0, 45^0, 30^0 solche von 36^0, 18^0, 15^0, $18^0 - 15^0 = 3^0$ und alle noch übrigen Vielfachen von 3^0 durch Konstruktion zu erhalten, dagegen ist eine solche Konstruktion nicht für jeden beliebigen Winkel möglich. Auch die Teilung der Winkelmeßinstrumente in einzelne Grade und deren Unterabteilungen kann nicht mittels geometrischer Konstruktion durchgeführt werden; sie erfolgt in der Praxis auf mechanischem Wege durch eine Teilmaschine. Auch mit dem Zirkel kann man durch Probieren einen Kreis in eine beliebige Anzahl gleicher Teile mit annähernder Genauigkeit teilen, und insofern diese Genauigkeit nicht geringer ist, als die, welche auch bei genauer Konstruktion in der praktischen Ausführung wegen der unvermeidlichen Fehler der Instrumente, der Dicke der die Linien darstellenden Striche u. dgl. m. nur zu erreichen ist, kann dieses mechanische Verfahren die mathematische Konstruktion in der Praxis ersetzen. Es gibt auch eine große Zahl von Näherungskonstruktionen.

§ 33. Regelmäßige Vielecke.

1. Die Teilung der Peripherie in n gleiche Teile führt zunächst auf die Konstruktion regelmäßiger Sehnen- und Tangentenvielecke eines Kreises. Ist nämlich die Peripherie in n gleiche Teile geteilt und verbindet man je zwei benachbarte Teilpunkte miteinander, so entsteht ein Sehnenvieleck, dessen Seiten als Sehnen gleicher Bogen einander gleich sind. Da außerdem die Winkel dieses Polygons Peripheriewinkel auf gleichen Bogen, nämlich auf je einem aus $n - 2$ jener gleichen Teile bestehenden, sind, so ist das Vieleck auch gleichwinklig, also regelmäßig. Es sei ferner durch jeden von n solchen Teilpunkten die Tangente an den Kreis gelegt und so ein Tangenten-n-Eck konstruiert. Aus der Gleichheit der Bogen AB, BC u. s. w. (Fig. 130) folgt dann die Gleichheit der Centriwinkel AMB, BMC u. s. w. Da nun jedes der Vierecke $APBM$, $BQCM$ ... durch die Diagonalen MP, MQ ... in zwei kongruente Dreiecke zerlegt wird, so sind auch die

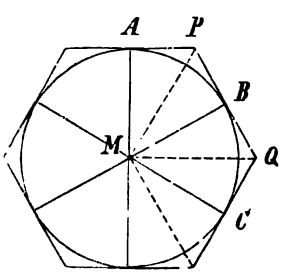


Fig. 130.

sämtlichen Winkel AMP, PMB, BMQ u. s. w. als Hälften gleicher Winkel von gleicher Größe. Nun ergibt sich auch die Kongruenz je zweier mit einer Kathete aneinanderliegender Dreiecke, wie PMB und BMQ, und damit schließlich, daß alle Seiten des Polygons $PQ\ldots$ und ebenso alle Winkel aus je zwei gleichen Stücken bestehen.

Hiernach ist man in den Stand gesetzt, sowohl in als um jeden gegebenen Kreis ein regelmäßiges Vieleck zu beschreiben, dessen Seitenzahl in einer der Formen $2 \cdot 2^n$, $3 \cdot 2^n$, $5 \cdot 2^n$, $15 \cdot 2^n$ enthalten ist, oder die Seite eines solchen regelmäßigen Vielecks zu konstruieren, wenn der Radius des Um- oder Inkreises gegeben ist.

Soll dagegen ein regelmäßiges Vieleck über einer gegebenen Seite konstruiert, oder soll zu der gegebenen Seite der Radius des Um- oder Inkreises gefunden werden, so kann man zunächst in oder um einen Kreis mit beliebigem Radius ein entsprechendes Vieleck und dann zu diesem über der gegebenen Seite ein ähnliches konstruieren. Dieses Verfahren gestattet die wesentliche Vereinfachung, daß man für einen beliebigen Kreis das Bestimmungsdreieck des regelmäßigen Vielecks von der gegebenen Seitenzahl und dazu über der gegebenen Seite als Basis ein ähnliches Dreieck konstruiert. Dieses ist das Bestimmungsdreieck des gesuchten Vielecks. In einzelnen Fällen gibt es besondere Konstruktionen der Aufgabe. So sind ohne weiteres die Aufgaben zu lösen, über einer gegebenen Seite ein regelmäßiges Drei- oder Viereck (Quadrat) zu konstruieren. Das regelmäßige Sechseck über gegebener Seite erhält man, indem man das gleichseitige Bestimmungsdreieck ABM über der Seite AB (Fig. 131) konstruiert. Verlängert man AM und BM über M, zieht durch M die Parallele nach beiden Seiten und trägt auf jeder der vier Geraden AB auf, so geben die Endpunkte dieser Strecken mit A und B die sechs Eckpunkte.

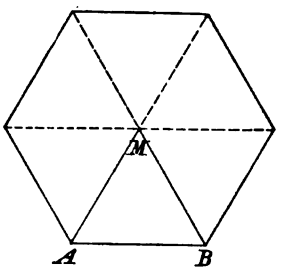


Fig. 131.

Ferner lassen sich folgende Aufgaben ohne weiteres lösen:

Zu einem regelmäßigen Sehnen-n-Eck das regelmäßige Sehnen-$2n$-Eck zu konstruieren. Man halbiert jeden Bogen des Kreises, der zwischen aufeinander folgenden Eckpunkten des n-Ecks liegen und verbindet jeden Halbierungspunkt mit den beiden benachbarten Eckpunkten des n-Ecks.

Umgekehrt kann man durch Verbindung der abwechselnden Eckpunkte eines regelmäßigen Sehnen-$2n$-Ecks ein regelmäßiges Sehnen-n-Eck konstruieren.

Zu einem regelmäßigen Sehnen-n-Eck erhält man ferner ein regelmäßiges Tangenten-n-Eck, wenn man durch die Eckpunkte des ersten die Tangenten an den Kreis zieht. Oder: Man legt durch den Halbierungspunkt jedes zu einer Seite des Sehnen-n-Ecks gehörigen Bogen die Tangente (Fig. 132). Da die Hälften der Winkel an der Spitze der Bestimmungsdreiecke, z. B. AMB und $A'MB'$ gleich sein müssen, so fallen $A'M$ und AM in eine Gerade. Das Tangentenvieleck liegt also perspektiv zu dem Sehnenvieleck.

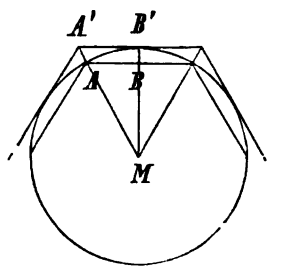


Fig. 132.

2. Da durch den Radius des Kreises die Seite des regelmäßigen Sehnen-n-Ecks bestimmt ist, so muß sich in den Fällen, wo die Seite aus dem Radius durch elementare Konstruktion erhalten werden kann, diese Seite s_n auch aus dem Radius r des Kreises berechnen lassen.

Die Seite des eingeschriebenen Quadrats ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten beide gleich dem Radius sind. Durch den

pythagoreischen Lehrsatz ergibt sich demnach

$$s_4 = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2} \quad .$$

Die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Sechsecks ist dem Radius gleich, also:

$$s_6 = r \quad .$$

Die Seite des regelmäßigen Sehnenzehnecks bestimmt sich entsprechend der Teilung des Radius nach dem goldenen Schnitt, durch die Gleichung:

$$r : x = x : (r - x)$$

oder

$$x^2 + rx = r^2 \quad .$$

Die positive Wurzel dieser Gleichung ist

$$s_{10} = -\tfrac{1}{2}r + \sqrt{\tfrac{1}{4}r^2 + r^2} = \tfrac{1}{2}r(\sqrt{5} - 1) \quad .$$

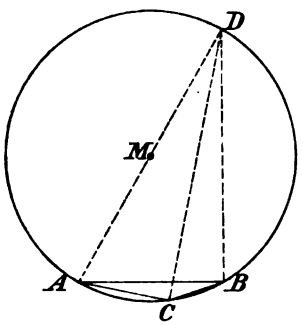


Fig. 133.

Ist in dem Kreise um M (Fig. 133) mit dem Radius r, $AB = s_6$ die Seite des regelmäßigen Sehnensechsecks, $AC = s_{10}$ die des regelmäßigen Sehnenzehnecks, so ist $CB = s_{15}$ nach § 32 Nr. 2 die des regelmäßigen Sehnenfünfzehnecks. Zieht man den Durchmesser AD und verbindet D mit B und C, so ist $ACBD$ ein Sehnenviereck. Der ptolemaeische Lehrsatz gibt für dieses

$$AD \cdot BC + AC \cdot BD = AB \cdot CD \quad .$$

Nun ist

$$AD = 2r\,, \quad BD = \sqrt{4r^2 - s_6^2} = r\sqrt{3}\,, \quad CD = \sqrt{4r^2 - s_{10}^2} = \sqrt{4r^2 - \tfrac{1}{4}r^2(6 - 2\sqrt{5})}$$
$$= \tfrac{1}{2}r\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \quad .$$

Folglich ist

$$2r s_{15} + \tfrac{1}{2}r(\sqrt{5} - 1) \cdot r\sqrt{3} = r \cdot \tfrac{1}{2}r\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \quad ,$$

woraus sich ergibt:

$$s_{15} = \tfrac{1}{4}r\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}\right) \quad .$$

3. Halbiert man den zur Sehne s_n gehörigen Bogen, so gehört zur Hälfte des Bogens die Sehne s_{2n}, d. i. die Seite des regelmäßigen Sehnenvielecks von doppelter Seitenzahl. Ist AB (Fig. 134) der Durchmesser des Kreises um M, der $CD = s_n$ in E normal halbiert, so ist die Sehne $AC = s_{2n}$. Nun ist in dem rechtwinkligen Dreieck ACB:

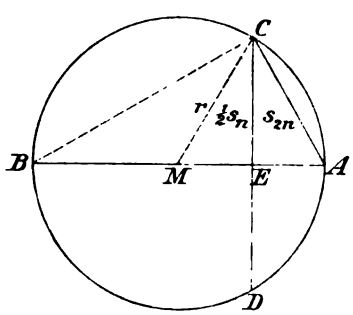


Fig. 134.

$$s_{2n}^2 = 2r \cdot AE \quad ,$$

wobei

$$AE = r - ME = r - \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s_n^2}$$

ist. Also ergibt sich:

$$s_{2n} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s_n^2}} \quad .$$

So erhält man aus der Seite des eingeschriebenen Quadrats die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Achtecks

$$s_8 = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{2}r^2}} = \sqrt{2r^2 - r^2\sqrt{4 - 2}} = r\sqrt{2 - \sqrt{2}} \quad ,$$

aus dieser wieder die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Sechzehnecks

$$s_{16} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}r^2(2 - \sqrt{2})}} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \quad ,$$

u. s. w.

Aus der Seite des Sechsecks ergibt sich die des Zwölfecks

$$s_{12} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}r^2}} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \tfrac{1}{2}r(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \quad ,$$

aus dieser die Seite des Vierundzwanzigecks

$$s_{24} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \quad .$$

Diese Formel könnte auch dazu dienen, umgekehrt s_n aus s_{2n} zu berechnen. Bequemer ist es, den doppelten Inhalt des rechtwinkligen Dreiecks ACB (Fig. 134) zweimal auszudrücken, wodurch man die Gleichung

$$2r \cdot \tfrac{1}{2}s_n = s_{2n} \cdot \sqrt{4r^2 - s_{2n}^2}$$

und daraus

$$s_n = \frac{s_{2n}}{r}\sqrt{4r^2 - s_{2n}^2}$$

erhält.

Dadurch ergibt sich aus s_6:

$$s_3 = r\sqrt{3} \quad ;$$

aus s_{10} erhält man:

$$s_5 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)\sqrt{4r^2 - \tfrac{1}{4}r^2(6 - 2\sqrt{5})} = \tfrac{1}{2}r\sqrt{(3 - \sqrt{5})(10 + 2\sqrt{5})}$$
$$= \tfrac{1}{2}r\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \quad .$$

Aus den Werten für s_5 und s_{10} ergibt sich die Beziehung:

$$s_5^2 = s_{10}^2 + r^2 \quad ,$$

s_5 ist also die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten s_{10} und r sind.

4. In Nr. 2 und 3 sind die Seiten einiger regelmäßiger Sehnen-n-Ecke durch den Radius des Umkreises ausgedrückt. Ist also s_n bekannt, so kann man andre Größen daraus berechnen. Zunächst ist die Höhe eines Bestimmungsdreiecks der Radius ϱ des Inkreises und es ergibt sich daher

$$\varrho = \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s_n^2} \quad .$$

In Fig. 132 ist $AB = \frac{1}{2}s_n$, $B'M = AM = r$, $BM = \varrho$ und $A'B' = t_n$ die Seite des regelmäßigen Tangenten-n-Ecks. Aus den ähnlichen Dreiecken AMB und $A'MB$, erhält man

$$\frac{t_n}{s_n} = \frac{r}{\varrho} \quad , \quad t_n = \frac{r}{\varrho}s_n \quad .$$

also durch Einsetzen des Wertes für ϱ:

$$t_n = \frac{r\,s_n}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s_n^2}} \quad .$$

Daraus ergibt sich für:

$n = 4$, $\varrho = \frac{1}{2}r\sqrt{2} = r\sqrt{\frac{1}{2}}$, $t_4 = 2r$;

$n = 6$, $\varrho = \frac{1}{2}r\sqrt{3}$, $t_6 = \frac{2}{3}r\sqrt{3} = 2r\sqrt{\frac{1}{3}}$;

$n = 10$, $\varrho = \frac{1}{4}r\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$, $t_{10} = 2r\sqrt{1 - \frac{2}{5}\sqrt{5}}$;

$n = 3$, $\varrho = \frac{1}{2} r$, $t_3 = 2r\sqrt{3}$,

$n = 5$, $\varrho = \frac{1}{4} r(\sqrt{5}+1)$, $t_5 = 2r\sqrt{5-2\sqrt{5}}$:

$n = 8$, $\varrho = \frac{1}{2} r\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $t_8 = 2r(\sqrt{2}-1)$:

$n = 16$, $\varrho = \frac{1}{2} r\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $t_{16} = 2r\left(\sqrt{4+2\sqrt{2}}-\sqrt{2}-1\right)$;

$n = 12$, $\varrho = \frac{1}{2} r\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{4} r(\sqrt{6}+\sqrt{2})$, $t_{12} = 2r(2-\sqrt{3})$.

Ebenso kann man, wenn die Seite a eines regelmäßigen Vielecks gegeben ist, den Radius r des Umkreises und den Radius ϱ des Inkreises finden, wenn man $s_n = a$ durch r ausdrücken kann. Man erhält dann die Unbekannte r und daraus ϱ. Der Umfang des Vielecks ist

$$u_n = n\,a$$

und der Inhalt nach § 24 Nr. 5:

$$F_n = \tfrac{1}{2} u_n \varrho = \tfrac{1}{2} n\,a\,\varrho \quad .$$

So ergibt sich für das
Quadrat:

$r = \frac{1}{2} a\sqrt{2}$, $\varrho = \frac{1}{2} a$, $F = a^2$;

Sechseck:

$r = a$, $\varrho = \frac{1}{2} a\sqrt{3}$, $F = \frac{3}{2} a^2\sqrt{3}$;

Dreieck:

$r = \frac{1}{3} a\sqrt{3}$, $\varrho = \frac{1}{6} a\sqrt{3}$, $F = \frac{1}{4} a^2\sqrt{3}$;

Zehneck:

$r = \frac{1}{2} a(\sqrt{5}+1)$, $\varrho = \frac{1}{2} a\sqrt{5+2\sqrt{5}}$, $F = \frac{5}{2} a^2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$;

Fünfeck:

$r = a\sqrt{\frac{1}{10}(5+\sqrt{5})}$, $\varrho = \frac{1}{2} a\sqrt{1+\frac{2}{5}\sqrt{5}}$, $F = \frac{5}{4} a^2\sqrt{1+\frac{2}{5}\sqrt{5}} = \frac{1}{4} a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$:

Achteck:

$r = \frac{1}{2} a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$, $\varrho = \frac{1}{2} a(\sqrt{2}+1)$, $F = 2a^2(\sqrt{2}+1)$.

§ 34. Berechnung des Kreises.

1. Die Berechnung der regelmäßigen Vielecke gibt einen Weg zur Berechnung des Umfangs (Rektifikation) und des Flächeninhalts (Quadratur) des Kreises.

Da jeder Bogen eines Kreises größer ist als die zugehörige Sehne, so muß auch die Summe aller zu den Seiten eines eingeschriebenen Vielecks gehörigen Bogen größer als der Umfang dieser Figur sein, d. h.

der Umfang eines in einen Kreis beschriebenen Vielecks ist kleiner als die Peripherie dieses Kreises.

Verbindet man ferner die Berührungspunkte zweier aneinander stoßenden Seiten eines umschriebenen Vielecks miteinander, so entsteht ein Dreieck, und es muß der innerhalb dieses Dreiecks liegende Bogen zwischen den Berührungspunkten kleiner sein als die Summe der ihn einschließenden zwei Dreiecksseiten. Addiert man einerseits alle Bogen, andrerseits alle Dreiecksseiten, so ergibt sich:

Der Umfang eines um einen Kreis beschriebenen Vielecks ist größer als die Peripherie dieses Kreises.

Man hat also in den Umfängen eines umschriebenen und eines eingeschriebenen Vielecks zwei Grenzen, zwischen denen die Peripherie enthalten sein muß.

Konstruiert man ferner zu einem regelmäßigen Sehnen-n-Eck ein regelmäßiges Sehnen-$2n$-Eck durch Halbierung der Bogen, so bilden je zwei Seiten des $2n$-Ecks mit einer Seite des n-Ecks ein Dreieck, und da die Summe zweier Seiten eines Dreiecks größer ist als die dritte Seite, so folgt, daß der Umfang eines regelmäßigen Sehnen-$2n$-Ecks größer ist als der Umfang des regelmäßigen Sehnen-n-Ecks. Ebenso kann man zu einem regelmäßigen Tangenten-n-Eck ein regelmäßiges Tangenten-$2n$-Eck konstruieren, indem man jeden zwischen zwei benachbarten Berührungspunkten des ersten liegenden Bogen halbiert und durch jeden Halbierungspunkt eine Tangente an den Kreis legt. Da jede dieser Tangenten von dem n-Eck ein Dreieck abschneidet, der Umfang des $2n$-Ecks also aus dem des n-Ecks erhalten wird, indem man n mal die Summe zweier Seiten eines Dreiecks durch die dritte Seite ersetzt, so folgt, daß der Umfang eines regelmäßigen Tangenten-$2n$-Ecks kleiner ist, als der Umfang des regelmäßigen Tangenten-n-Ecks.

2. Berechnet man nun aus dem Radius eines Kreises nacheinander die Seiten einer Reihe eingeschriebener regelmäßiger Vielecke, so daß die Anzahl der Seiten eines jeden folgenden doppelt so groß ist als die des vorhergehenden, und multipliziert jede so erhaltene Seite mit der Anzahl der Seiten, so erhält man eine Reihe von Längen, von denen jede kleiner ist als die Peripherie des Kreises, jede folgende aber ihr näher kommt als die vorhergehende. Wie weit diese Annäherung geht, läßt sich jedoch aus diesen Zahlen noch nicht erkennen. Berechnet man dann zu jeder der eben gefundenen Seiten eingeschriebener Vielecke die Seite des umschriebenen regelmäßigen Vielecks von gleicher Seitenzahl und aus dieser durch Multiplikation mit der Seitenzahl den Umfang, so erhält man eine zweite Reihe von Längen, die sämtlich größer sind als die Peripherie des Kreises und von denen wieder jede folgende ihr näher kommt als die vorhergehende. Durch die beiden nun berechneten Größen wird also die Peripherie des Kreises zwischen zwei Grenzen eingeschlossen, die mit jedem folgenden Vieleck enger aneinander rücken und also auch der Peripherie immer näher kommen. Ergibt sich bei dieser Rechnung, daß die Umfänge zweier zusammengehöriger Vielecke voneinander um die Differenz δ verschieden sind, so beträgt der Unterschied der Peripherie von jedem dieser Umfänge weniger als δ, und ist δ kleiner als der für praktische Anwendung gestattete, oder unvermeidliche Fehler, so dürfen die Umfänge der Vielecke statt der Peripherie gesetzt werden.

So erhält man, indem man von der Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Sechsecks ausgeht, für den Radius $r = 0{,}5$ die in der nachstehenden Tabelle durch u und U bezeichneten Werte der Umfänge der Vielecke für die angegebenen Seitenzahlen n:

n	u	U
6	3,000000	3,464102
12	3,105828	3,215390
24	3,132628	3,159660
48	3,139350	3,146086
96	3,141031	3,142715
192	3,141452	3,141873
384	3,141556	3,141662
768	3,141583	3,141610
1536	3,141590	3,141597

Man sieht aus der Tabelle, daß die Umfänge der beiden 96-Ecke auf zwei, die der 192-Ecke auf drei und die der 1536-Ecke auf fünf Dezimalstellen übereinstimmen und kann hieraus folgern, daß die Peripherie des Kreises gleich 3,14159 gesetzt werden darf, wobei die auf die fünfte Dezimale folgenden Stellen unbestimmt bleiben. Da nun für die meisten praktischen Rechnungen eine Genauigkeit von fünf Dezimalen genügt, so kann man die Peripherie jenes Kreises für solche Rechnungen als gefunden ansehen. Bei noch weiter fortgesetzter Berechnung der Vielecksumfänge wird ihre Annäherung aneinander und an die Peripherie noch größer und sie kann bis zu jedem beliebigen verlangten Grad der Genauigkeit hinaus erreicht werden, wie folgende Untersuchung beweist.

Das Verhältnis des Umfangs eines eingeschriebenen regelmäßigen n-Ecks zum Umfang des umschriebenen regelmäßigen Vielecks von gleichviel Seiten ist gleich dem Verhältnis der Seiten $s_n : t_n$; dieses ist wie in § 33 Nr. 4 entwickelt,

$$\frac{s_n}{t_n} = \frac{\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s_n^2}}{r} .$$

Nimmt nun die Seitenzahl n unbegrenzt zu, so wird die Länge einer Seite unendlich klein, d. h. der Wert von s_n nähert sich der Grenze Null und daher das obige Verhältnis ebenso dem Verhältnisse 1 : 1. Hiernach kann man sagen, daß die Umfänge der beiden zusammengehörigen Vielecke bei unbegrenztem Wachstum der Seitenzahl n sich einander immer nähern, und daß sie, wenn n unendlich groß gedacht wird, einander und somit auch der Peripherie des Kreises gleich werden.

Hiernach erscheint der Kreis als die Grenze, der sich der Umfang eines ihm ein- oder umschriebenen regelmäßigen Vielecks bei wachsender Seitenzahl ohne Ende nähert. Man drückt dies häufig so aus: Der Kreis kann als regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachtet werden.

Hieraus folgt zugleich, daß alle Sätze, die für regelmäßige Vielecke ohne Rücksicht auf ihre Seitenzahl gelten, auch für den Kreis gelten müssen.

Demnach kann man Kreise als ähnlich betrachten, und die Umfänge zweier Kreise verhalten sich zueinander wie die Radien oder wie die Durchmesser. Bezeichnen p_1, p_2 die Umfänge, d_1, d_2 die Durchmesser, so ist also

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{d_1}{d_2}, \quad \frac{p_1}{d_1} = \frac{p_2}{d_2} ,$$

d. h. das Verhältnis der Peripherie eines Kreises zum Durchmesser hat für alle Kreise denselben Wert.

Den Wert dieses konstanten Verhältnisses bezeichnet man mit π und diese Zahl beträgt bis auf fünf Dezimalen genau 3,14159. Man erhält also die Peripherie p des Kreises, wenn man den Durchmesser mit π oder den Radius r mit 2π multipliziert. Daher ergibt sich die Grundformel der Kreisberechnung:

$$p = 2\pi r .$$

Ferner kann der Flächeninhalt F des Kreises nach § 24 Nr. 5 berechnet werden durch die Formel

$$F = \tfrac{1}{2} p r ,$$

die bedeutet, daß der Inhalt eines Kreises gleich ist dem eines Dreiecks, dessen Grundlinie die Peripherie und dessen Höhe der Radius ist. Mit dem Werte von p erhält man nun:

$$F = \pi r^2 .$$

Hieraus folgt noch: Die Peripherien verschiedener Kreise verhalten sich wie ihre Radien, die Flächeninhalte wie die Quadrate der Radien.

Ferner ergeben sich aus den Grundformeln die weitern:

$$r = \frac{p}{2\pi} = \sqrt{\frac{F}{\pi}} \quad .$$

$$F = \frac{p^2}{4\pi} \quad ,$$

$$p = 2\sqrt{\pi F} \quad .$$

3. Die Berechnung des Umfangs und des Flächeninhalts eines Kreises ist nach dem vorstehenden in der praktischen Ausführung, solange der genaue Wert der Zahl π nicht bekannt ist, nur näherungsweise möglich, und die größere oder geringere Genauigkeit der Resultate ist bedingt durch den Grad der Annäherung der für π benutzten Zahl an ihren genauen Wert. Die erste Berechnung eines angenäherten Wertes von π rührt von ARCHIMEDES aus Syrakus (287—212 v. Chr.) her. Er berechnete die Umfänge der 96-Ecke und fand — in der Schreibweise der heutigen Mathematik ausgedrückt — daß der Umfang des Kreises weniger als $3\frac{1}{7}$ und mehr als $3\frac{10}{71}$ des Durchmessers beträgt. Da der Wert $3\frac{1}{7} = 3{,}1428\ldots$ von dem genauen Werte von π erst in der dritten Dezimale und in dieser nur um eine Einheit dieser Dezimale verschieden ist, so genügt er für viele Rechnungen des bürgerlichen Lebens. Unter den zahlreichen spätern Berechnern ist namentlich LUDOLPH VAN CEULEN (geb. in Hildesheim 1539, gest. in Leyden 1610) bekannt geworden, nach dem π auch die LUDOLPHsche Zahl genannt wird. Er berechnete diese Zahl zuerst bis auf 20, später bis auf 35 Stellen. Die erste Rechnung gründete sich auf die Bestimmung der Umfänge des eingeschriebenen und des umschriebenen regelmäßigen Vielecks von 32212 254720 Seiten und ergab

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846 \quad .$$

Die so erzielte Genauigkeit ist bereits so groß, daß für einen Kreis von 20 Millionen Meilen Radius (der ungefähren Entfernung der Erde von der Sonne) der Fehler des mit Hilfe dieses Wertes berechneten Umfangs kleiner als ein Milliontel eines Millimeters sein würde, falls es in der Praxis überhaupt möglich wäre, schon den Radius eines Kreises mit solcher Genauigkeit zu messen. Die überaus mühsame Methode, deren sich LUDOLPH bediente, wurde später von HUYGENS und GREGORY durch Aufstellung weiterer Lehrsätze über die Umfänge ein- und umgeschriebener regelmäßiger Vielecke erheblich vereinfacht. Es ist überflüssig, diese Lehrsätze und verbesserten Methoden hier anzuführen, da an dieser Stelle überhaupt nur die Möglichkeit einer elementaren Bestimmung von π bis zu jedem verlangten Grade der Annäherung gezeigt werden soll. Die höhere Mathematik hat sehr bedeutend bequemere Mittel zur Berechnung von π gefunden, so daß niemand zu diesem Zwecke sich der elementaren Methode bedienen würde. Mit Hilfe dieser Mittel ist die Berechnung von π von verschiedenen Mathematikern weiter fortgesetzt worden. Die neueste und weitgehendste, von RICHTER in Elbing, gibt den Wert von π auf 500 Dezimalstellen.

Derartige Berechnungen haben weniger praktisches als theoretisches Interesse. Für die Praxis genügt fast in allen Fällen der Gebrauch von sieben, meist sogar der von fünf oder weniger Dezimalstellen, so daß man

$$\pi = 3{,}1415927$$

als den Wert des Verhältnisses der Peripherie zum Durchmesser annehmen darf. Dagegen bieten praktisches Interesse solche Näherungswerte in Form von gemeinen Brüchen, die innerhalb der Grenzen der im einzelnen Fall verlangten Genauigkeit für π gesetzt werden dürfen, und die man mittels der Verwandlung des Dezimalbruchs in einen Kettenbruch finden kann. Der einfachste ist der bereits angegebene archimedische $\frac{22}{7}$, der von dem wahren Werte um weniger als 0,0013

abweicht. Außer ihm ist besonders bemerkenswert, der zuerst von METIUS, einem Zeitgenossen LUDOLPH VAN CEULENS, angegebene $\frac{3}{1}\frac{5}{1}\frac{5}{3}$, der sich mittels des Schemas 113 355, leicht merken läßt. Durch Verwandlung des gemeinen in einen Dezimalbruch kann man sich überzeugen, daß er von dem genauen Werte erst in der siebenten Dezimale abweicht.

Eine absolut genaue Bestimmung des Wertes von π ist auch mit Hilfe der höhern Mathematik nicht möglich; man erhält immer nur einen an irgend einer Stelle abgebrochenen Dezimalbruch und es liegt also die Vermutung nahe, daß π eine Irrationalzahl sei. Daß dies wirklich der Fall ist, kann aber aus elementaren Erörterungen nicht gefolgert werden. Hätten die bis jetzt ausgeführten Berechnungen in den Dezimalstellen eine Periode erkennen lassen, so ließe sich der unendliche Dezimalbruch in einen gemeinen Bruch verwandeln, also in rationaler Form darstellen; dies ist aber trotz der berechneten 500 Dezimalen nicht der Fall. Aber auch in einer in der Elementarmathematik vorkommenden irrationalen Form, etwa mittels Wurzeln aus rationalen Zahlen, hat sich der Wert von π nicht darstellen lassen. Die eigentliche Natur der Zahl π ist erst in neuester Zeit nachgewiesen worden. LINDEMANN (1882) hat streng bewiesen, was bis dahin nur in höchstem Grade wahrscheinlich war, daß nicht nur die Aufgabe, einen Kreis durch Lineal und Zirkel in ein Quadrat zu verwandeln, die seit dem Altertum unter dem Namen der Quadratur des Zirkels eine ganz besondere Berühmtheit erlangt hat, unlösbar ist, sondern daß auch die Darstellung von π durch höhere Wurzeln aus rationalen Zahlen unmöglich ist. Die höhere Mathematik bezeichnet π als eine transcendente Zahl.

Ebenso unlösbar wie die Aufgabe der Quadratur des Kreises ist die, den Kreis zu rektifizieren, d. h. eine Strecke zu konstruieren, die gleich dem Umfang des Kreises ist.

4. Für die Praxis ist die Quadratur des Zirkels ohne Interesse. Die unvermeidlichen Ungenauigkeiten, die der Ausführung jeder Konstruktion anhaften, würden in jedem Falle das Quadrat fehlerhaft machen. Mit Hilfe der angenäherten Werte von π lassen sich aber Konstruktionen von Quadraten angeben, die dem gegebenen Kreise an Inhalt so nahe kommen, daß die Abweichung geringer ist, als der in der Praxis unvermeidliche Fehler. Solche Näherungskonstruktionen ersetzen also, wo die Verwandlung eines Kreises in eine gleich große geradlinige Figur oder die Darstellung der Länge seines Umfangs durch eine Gerade verlangt werden sollte, für den Praktiker vollständig die unmögliche genaue Konstruktion.

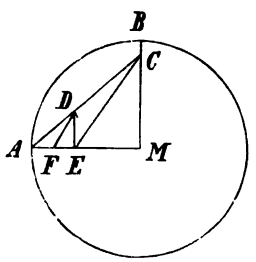


Fig. 135.

Als Beispiele solcher Näherungskonstruktionen wählen wir aus der großen Anzahl der bekannten folgende aus und beschränken uns dabei auf die Darstellung der Peripherie durch eine Gerade, da aus dieser auch die Quadratur hergeleitet werden kann.

Man ziehe im gegebenen Kreise M (Fig. 135) mit dem Radius r zwei zueinander senkrechte Radien MA, MB, teile MB in acht gleiche Teile, verbinde den Teilpunkt C, der zunächst an B liegt, mit A, trage auf AC die Strecke AD gleich der Hälfte von MB ab, fälle von D die Senkrechte DE auf MA, ziehe CE und darauf DF parallel zu CE bis zum Schnittpunkt F mit MA, endlich zeichne man eine Strecke gleich dem Dreifachen des Durchmessers des Kreises plus dem Doppelten von AF, so ist diese Strecke näherungsweise der Peripherie gleich. Es ist nämlich

$$AF : AE = AD : AC, \quad AE : AM = AD : AC ,$$

also

$$AF = \frac{AE \cdot AD}{AC}, \quad AE = r \cdot \frac{AD}{AC} ,$$

mithin

$$AF = r \cdot \frac{AD^2}{AC^2} = \frac{r \cdot \frac{1}{4} r^2}{r^2 + \frac{1}{64} r^2} = \frac{16}{113} r \quad ,$$

und also

$$6r + 2AF = 2r \cdot 3\frac{16}{113} = \frac{355}{113} \cdot 2r \quad .$$

Hiernach beträgt der theoretische Fehler dieser Konstruktion weniger als 0,000001 des Durchmessers, oder würde bei einem Durchmesser von 100 Metern noch nicht $\frac{1}{10}$ Millimeter betragen, wenn die Konstruktion selbst mit diesem Grade der Genauigkeit ausgeführt werden könnte.

Kürzer, aber weniger genau ist folgende Konstruktion: Man ziehe zwei zueinander senkrechte Radien, verbinde ihre Endpunkte, teile die Verbindungslinie im Verhältnis 1 : 4 und verlängere den erhaltenen fünften Teil um das Sechsfache des Radius. Die so gewonnene Linie ist gleich

$$\tfrac{1}{5} r \sqrt{2} + 6r = 2r \cdot (3 + \tfrac{1}{10}\sqrt{2}) = 2r \cdot 3{,}14142 \ldots \quad ,$$

der Fehler beträgt also noch nicht zwei Zehntausendstel des Durchmessers. Oder man konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete gleich $\frac{3}{5}$ des Durchmessers und dessen andre Kathete doppelt so groß als die erste ist: der Umfang dieses Dreiecks ist nahezu gleich der Peripherie des Kreises, denn er ergibt sich gleich

$$2r \cdot \left(\tfrac{3}{5} + \tfrac{6}{5} + \tfrac{1}{5}\sqrt{45}\right) = 2r \cdot 3{,}14164 \ldots$$

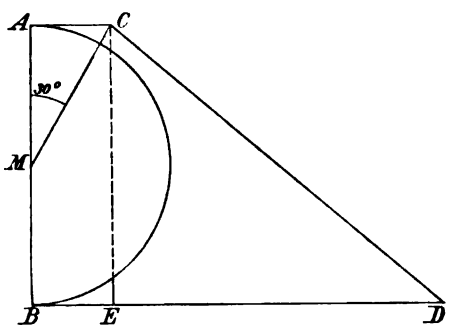


Fig. 136.

Legt man an die Endpunkte A und B des Durchmessers eines Kreises (Fig. 136) mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r Tangenten; trägt in M an MA einen Winkel von 30° an, dessen freier Schenkel die Tangente an A in C schneidet und macht die in B angelegte Tangente $BD = 3r$, so ist CD nahezu gleich dem Halbkreis. Es ist nämlich MAC die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks, also $MC = 2AC$; mithin ergibt der pythagoreische Lehrsatz:

$$4AC^2 - AC^2 = r^2, \quad AC = r\sqrt{\tfrac{1}{3}} \quad .$$

Zieht man noch CE senkrecht zu BD, so erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck CED

$$CD = \sqrt{4r^2 + (3r - r\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2} = r\sqrt{13\tfrac{1}{3} - 2\sqrt{3}} \quad .$$

Der fünfstellige Logarithmus der Quadratwurzel ergibt sich zu 0,49 714, während $\log \pi = \log 3{,}14\,759 = 0{,}49\,715$ ist. Der siebenstellige Logarithmus ist 0,497 1417, die zugehörige Zahl 3,14 1533. Die Genauigkeit dieser Konstruktion ist also eine sehr beträchtliche.

Die noch immer von Zeit zu Zeit auftauchenden angeblichen Lösungen der Quadratur des Zirkels sind, wenn nicht überhaupt grob fehlerhaft, im günstigsten Falle derartige Näherungskonstruktionen, bei denen der Fehler der theoretischen Konstruktion durch die praktische Ungenauigkeit der Zeichnung verdeckt erscheint.

5. Beispiele:

1. Ein Wagenrad habe einen Durchmesser von 1,25 *m*. Wie schwer ist der eiserne Radreifen, wenn ein 1 *m* langes Stück 10 *kg* wiegt? Auflösung:

$$\pi \cdot 1{,}25 \cdot 10 = 12{,}5 \cdot \tfrac{22}{7} = 39{,}3 \ kg \quad .$$

2. Aus der Peripherie eines Kreises $p = 35{,}5$ den Radius r und den Flächeninhalt F zu berechnen: Es ist:

$$r = \frac{35{,}5}{2\pi} = 5{,}65\,; \quad F = 100{,}4 \quad .$$

3. Jeder Grad des Erdäquators hat eine Länge von 15 geogr. Meilen. Man berechne daraus den Durchmesser d des Äquators. Man hat:

$$\pi d = 15 \cdot 360\,, \quad d = \frac{15 \cdot 360}{\pi} = 1718{,}8 \text{ Meilen} \quad .$$

4. Wie groß ist der Durchmesser d der als Kugel betrachteten Erde, wenn der Bogen eines Meridians vom Pol bis zum Äquator zu 10 Millionen Meter gerechnet wird? Man erhält:

$$\pi d = 40\,000\,000\,, \quad d = 12\,732 \text{ } km.$$

5. Den Flächeninhalt F eines von zwei konzentrischen Kreisen begrenzten Ringes aus den beiden Radien $r_1 > r_2$ zu berechnen. $r_1 = 0{,}8$; $r_2 = 0{,}1$. Es ergibt sich:

$$F = \pi(r_1^2 - r_2^2) = \pi(r_1 + r_2)(r_1 - r_2) = 0{,}9 \cdot 0{,}7\pi = 1{,}979 \quad .$$

6. Den Flächeninhalt F eines von zwei konzentrischen Kreisen begrenzten Ringes aus den durch einen Punkt des kleinern Kreises gebildeten Abschnitten a, b eines Durchmessers des größern zu berechnen. Das Resultat ist:

$$F = \pi a b \quad .$$

7. Den Flächeninhalt F des einem Rechteck umschriebenen Kreises aus den Seiten a, b des Rechtecks zu berechnen. Es findet sich:

$$F = \tfrac{1}{4}\pi\sqrt{a^2 + b^2} \quad .$$

8. Wie verhalten sich die Umfänge und die Flächeninhalte zweier Kreise zueinander, von denen der eine einem Quadrat umschrieben, der andere demselben Quadrat eingeschrieben ist? Haben die Kreise die Radien r und ϱ, so ist $r = \varrho\sqrt{2}$, also:

$$2\pi r : 2\pi\varrho = r : \varrho = \sqrt{2} : 1 \quad ,$$
$$\pi r^2 : \pi\varrho^2 = r^2 : \varrho^2 = 2 : 1 \quad .$$

9. Ebenso für ein regelmäßiges Sechseck. Hier ist:

$$r : \varrho = 2 : \sqrt{3}\,, \quad r^2 : \varrho^2 = 4 : 3 \quad .$$

10. Der Inhalt eines Ringsektors, des aus einem Kreisring durch zwei Radien herausgeschnittenen Flächenstücks, ist gleich einem Trapez, dessen parallele Seiten die begrenzenden Kreisbogen und dessen Höhe die Breite des Ringes, d. i. die Differenz der Radien der konzentrischen Kreise ist. Der Satz gilt auch für den ganzen Kreisring (vgl. Beispiel 5).

§ 35. Berechnung von Bogen, Sektoren und Segmenten des Kreises.

1. Die Berechnung von Teilen von Kreislinien und Kreisflächen läßt sich ebenfalls mit Hilfe der Zahl π ausführen. Als Einheit eines Kreisbogens soll jetzt nicht, wie früher geschehen, ein andrer Bogen desselben Kreises, sondern die zum Messen von Strecken benutzte Längeneinheit dienen; es soll also nicht das Verhältnis der Länge des Bogens zu einem andern Bogen, sondern die Zahl der Längeneinheiten des Bogens bestimmt werden. Das Messen der Länge einer

krummen Linie unterliegt einer größern Schwierigkeit, als das von Strecken, da das unmittelbare Abtragen der Einheit auf der zu messenden Linie nicht möglich ist. Es muß also auch hier, wie schon bei dem ganzen Kreise geschehen, die Berechnung an die Stelle der Messung treten. Dazu dient bei Kreisbogen der Satz, daß zwei Bogen desselben Kreises sich zueinander verhalten, wie die zugehörigen Centriwinkel, daß also auch jeder Bogen sich zur ganzen Peripherie verhalten muß, wie der zu ihm gehörige Centriwinkel zu 360 Grad. Ist der in Gradmaß ausgedrückte Centriwinkel α^0, so ist der zugehörige Bogen:

$$1) \qquad b = 2\pi r \cdot \frac{\alpha^0}{360^0} = \pi r \cdot \frac{\alpha^0}{180^0} \quad .$$

Der Kreisbogen ist also der ebensovielte Teil der ganzen Peripherie wie sein Centriwinkel von 360^0. So ist z. B. der Bogen über der Seite des eingeschriebenen Quadrats gleich dem vierten Teile der Peripherie oder gleich $\frac{1}{2}\pi r$, der Bogen über der Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Sechsecks gleich $\frac{1}{6} \cdot 2\pi r$.

Ist umgekehrt die Länge b eines Kreisbogens nebst dem Radius r des Kreises gegeben, so findet man den Centriwinkel

$$2) \qquad \alpha^0 = 180^0 \cdot \frac{b}{\pi r} \quad .$$

Aus Formel 1) ergibt sich, daß zu demselben Centriwinkel α^0 in Kreisen von verschiedenem Radius Bogen gehören, die sich verhalten wie die Radien. Schreibt man 1) in der Form

$$\frac{b}{r} = \pi \cdot \frac{\alpha^0}{180^0} = \frac{\alpha^0}{\frac{180^0}{\pi}} \quad ,$$

so ist $\frac{b}{r}$ der Bogen, der zu dem Centriwinkel α^0 im Kreise vom Radius 1 gehört. Diesen Bogen bezeichnet man als den Arcus von α^0 ($\text{arc}\,\alpha^0$) und er dient umgekehrt dazu, den Winkel zu messen. Man nennt ihn daher auch den Winkel in Bogenmaß. Dann ist die Winkeleinheit der Winkel, dessen Bogen gleich dem Radius ist. Bezeichnet man den in dieser Einheit gemessenen Winkel mit α, so ist

$$\alpha = \text{arc}\,\alpha^0 = \frac{\alpha^0}{\frac{180^0}{\pi}} \quad ,$$

wobei der Winkel

$$1 = \text{arc}\,\frac{180^0}{\pi} = \text{arc}\,57^0\,17'\,45'' = \text{arc}\,206\,265''$$

ist. Der Winkel in Bogenmaß ist also eine Zahl, die man findet, wenn man die Zahl der Sekunden des Winkels durch 206265 dividiert. Den gebräuchlichen Logarithmentafeln sind Hilfstafeln beigefügt, durch die diese Umrechnung von Winkeln, die in Gradmaß gegeben sind, in Bogenmaß und umgekehrt, erleichtert wird. Man hat für einige Winkel zum Vergleiche:

Gradmaß	Bogenmaß
360^0	2π
180^0	π
90^0	$\frac{1}{2}\pi$
45^0	$\frac{1}{4}\pi$
1^0	$\frac{1}{180}\pi = 0{,}01745$
$51^0\,17'\,45''$	1

Drückt man einen gegebenen Winkel α^0 in Bogenmaß als Winkel α aus, so gestaltet sich Formel 1) einfacher

$$3) \qquad b = r\alpha \quad ,$$

d. h. man findet die Bogenlänge, indem man den Radius mit dem Centriwinkel multipliziert. Daß der Winkel hierbei in Bogenmaß und nicht in Gradmaß gegeben sein muß, ist klar, da der Bogen und der Radius Längen sind, also ihr Verhältnis eine Zahl sein muß.

2. Um den Flächeninhalt eines Sektors zu berechnen, bestimmt man, wie bei der Berechnung der Länge eines Bogens aus der ganzen Peripherie, sein Verhältnis zur ganzen Kreisfläche. Bei dem Beweise des Satzes, daß zu gleichen Centriwinkeln desselben Kreises oder gleicher Kreise gleiche Bogen gehören, gelangten mit den Centriwinkeln und den Bogen auch die zugehörigen Sektoren zur Deckung, und es gilt also auch der Satz:

Zu gleichen Centriwinkeln und zu gleichen Bogen desselben Kreises oder gleicher Kreise gehören gleiche Sektoren.

Durch Teilung zweier Centriwinkel oder Bogen mittels eines hinreichend kleinen Centriwinkels oder Bogens erhält man dann wie bei den Bogen den Satz:

Sektoren desselben Kreises oder gleicher Kreise verhalten sich zueinander wie die zugehörigen Centriwinkel und wie die zugehörigen Bogen.

Daher verhält sich auch ein Sektor zum ganzen Kreise, wie sein Centriwinkel zu 360 Grad und wie sein Bogen zur ganzen Peripherie. Bezeichnet also S den Flächeninhalt eines Sektors des Kreises mit dem Radius r, und ist der zugehörige Centriwinkel α^0, der Bogen b, so ist

$$4) \qquad S = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha^0}{360^0}$$

und ebenso

$$5) \qquad S = \pi r^2 \cdot \frac{b}{2\pi r} = \tfrac{1}{2} b r \quad .$$

Die letzte Formel zeigt, daß ein Sektor gleich einem Dreieck ist, das den Bogen des Sektors als Grundlinie und den Radius als Höhe hat; entsprechend dem Satze über den Inhalt des Kreises in § 34 Nr. 2.

Drückt man b nach Formel 3) durch den Winkel in Bogenmaß aus, so erhält man noch

$$6) \qquad S = \tfrac{1}{2} r^2 \alpha \quad .$$

Diese Formel gibt wieder den Inhalt der ganzen Kreisfläche als besondern Fall, wenn man $\alpha = 2\pi$ setzt.

3. Den Flächeninhalt eines Segments erhält man, falls es kleiner als ein Halbkreis ist, als Differenz eines Sektors und eines gleichschenkligen Dreiecks, die beide durch die nach den Endpunkten des zugehörigen Bogens gezogenen Radien, diesen Bogen und die zugehörige Sehne bestimmt werden. Ist das Segment größer als ein Halbkreis, so ist es die Summe eines Sektors und eines gleichschenkligen Dreiecks.

Die Ausführung der Berechnung aus dem Radius r des Kreises und dem Centriwinkel α des Bogens, der das Segment begrenzt, ist im allgemeinen mit den Hilfsmitteln der Planimetrie nicht möglich. Die Auflösung dieser Aufgabe gehört vielmehr in die Trigonometrie. Nur in den besondern Fällen gehört sie in die Planimetrie, daß der Centriwinkel zu denen gehört, die durch elementare Konstruktion hergestellt werden können oder was dasselbe ist, wenn die Sehne des Segments eine Seite derjenigen regelmäßigen Sehnenvielecke ist, deren Be-

rechnung in § 33 als möglich gezeigt wurde. Ist ein solcher Centriwinkel $\alpha = \frac{360^0}{n}$, dessen Sehne s_n ist, gegeben, so ist der Inhalt des Sektors

$$S = \frac{1}{n}\pi r^2$$

und der des gleichschenkligen Dreiecks als Bestimmungsdreieck eines regelmäßigen Sehnen-n-Ecks

$$D = \tfrac{1}{2} s_n \varrho = \tfrac{1}{2} s_n \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4} s_n^2} \quad ;$$

mithin ist der Flächeninhalt des Segments

$$F = S - D$$

bestimmt, wenn s_n durch r ausgedrückt werden kann. So hat man z. B. für das durch die Quadrantensehne abgeschnittene Segment:

$$F = \tfrac{1}{4}\pi r^2 - \tfrac{1}{2} r^2 = \tfrac{1}{4}(\pi - 2) r^2 \quad ;$$

für das zur Sextantensehne (Sehne zum Centriwinkel von 60^0) gehörige:

$$F = \tfrac{1}{6}\pi r^2 - \tfrac{1}{4} r^2 \sqrt{3} = \tfrac{1}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}) r^2 \quad ;$$

für das Segment, das zur Seite des regelmäßigen Zehnecks gehört:

$$F = \tfrac{1}{10}\pi r^2 - \tfrac{1}{8} r^2 \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \quad .$$

Mit Hilfe der Formeln für Sektor und Segment kann man auch andre Flächenstücke berechnen, zu deren Begrenzung Kreisbogen gehören.

Errichtet man z. B. über der Quadrantensehne eines Kreises vom Radius r einen Halbkreis, so begrenzt dieser mit dem Quadrantenbogen eine mondförmige Fläche (die *lunula* des HIPPOKRATES, Fig. 137). Der Inhalt F dieser Fläche ist die Differenz des Halbkreises mit dem Radius $\frac{1}{2} r\sqrt{2}$ und des Segments: also hat man

$$F = \tfrac{1}{4}\pi r^2 - (\tfrac{1}{4}\pi r^2 - \tfrac{1}{2} r^2) = \tfrac{1}{2} r^2 \quad .$$

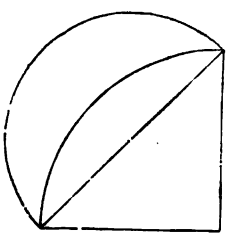


Fig. 137.

Die Lunula ist also dem Dreieck gleich. Es liegt mithin hier ein Fall vor, in dem sich eine von krummen Linien begrenzte Figur durch elementare Konstruktion in eine geradlinige verwandeln läßt, also die Aufgabe der Quadratur im eigentlichen Sinne lösbar ist.

4. Beispiele:

1. Die Längen der Bogen eines Kreises mit dem Radius 1 zu berechnen, die zu folgenden Centriwinkeln gehören: a) 90^0, b) 180^0, c) 60^0, d) 36^0, e) 120^0. Resultate: a) $\frac{1}{2}\pi = 1{,}57080$; b) $\pi = 3{,}14159$; c) $\frac{1}{3}\pi = 1{,}04720$; d) $\frac{1}{5}\pi = 0{,}62832$: e) $\frac{2}{3}\pi = 2{,}09440$.

2. Ebenso für folgende Centriwinkel: a) $20^0 12'$; b) $117^0 13{,}5'$: c) $32^0 18' 30''$; d) $0^0 11' 10''$; e) $0^0 0' 33{,}2''$; f) $0^0 0{,}12'$. Resultate: a) 0,35256: b) 2,04595: c) 0,56390; d) 0,00 32482: e) 0,000 16096; f) 0,0000 34907.

3. Folgende Winkel in Bogenmaß, umzurechnen in Gradmaß: a) 0,324: b) 3,417; c) 0,75049: d) 5,12212; e) 0,01556. Resultat: a) $18^0 33' 50''$; b) $195^0 46' 48''$; c) 43^0: d) $293^0 28' 35''$; e) $0^0 53' 29''$.

4. Aus der Länge b eines Bogens und dem zugehörigen Centriwinkel α den Radius des Kreises zu berechnen. Beispiel: $b = 0{,}4488$, $\alpha = 25^0 42{,}9'$. Auflösung:

$$r = \frac{b}{\alpha} = 1 \quad .$$

5. Den Flächeninhalt eines Sektors in einem Kreise mit dem Radius 1 zu berechnen, dessen Centriwinkel gleich a) 60^0, b) 45^0, c) 36^0 ist. Auflösung:

$$\text{a) } \tfrac{1}{6}\pi: \qquad \text{b) } \tfrac{1}{8}\pi; \qquad \text{c) } \tfrac{1}{10}\pi \quad .$$

6. Den Flächeninhalt F eines Sektors in einem Kreise mit dem Radius $r = 1{,}13$ zu berechnen, wenn der zugehörige Centriwinkel $\alpha = 5^0\,4{,}2'$ gegeben ist. Es ist

$$F = \tfrac{1}{2} r^2 \alpha = 0{,}0565 \quad .$$

7. Der Flächeninhalt F eines Sektors im Kreise mit dem Radius $r = 0{,}123$, dessen Bogen die Länge $b = 1{,}234$ hat, ist

$$F = \tfrac{1}{2} b r = 0{,}617 \cdot 0{,}123 = 0{,}0758 \quad .$$

8. Aus dem Flächeninhalt F eines Sektors und dem Radius r des Kreises den zugehörigen Bogen b und den Centriwinkel α zu berechnen. Es ist:

$$b = \frac{2F}{r}, \quad \alpha = \frac{2F}{r^2}, \quad \alpha^0 = \frac{2F}{\pi r^2} \cdot 180^0 \quad .$$

9. Aus dem Flächeninhalt F eines Sektors und dem zugehörigen Centriwinkel α den Radius r des Kreises und den Bogen b zu berechnen.

$$r = \sqrt{\frac{2F}{\alpha}}, \quad b = \sqrt{2F\alpha} \quad .$$

10. Ein Kreis berührt die beiden Radien und den Bogen eines Quadranten. Man berechne aus dem Radius r des Quadranten die Inhalte der zwischen dem eingeschriebenen Kreis und dem Umfang des Quadranten liegenden Flächen. Auflösung: Der den Quadranten halbierende Radius besteht aus dem Radius ϱ des eingeschriebenen Kreises und der Diagonale eines Quadrats, dessen Seite gleich dem Radius ϱ ist. Daher ist

$$\varrho + \varrho\sqrt{2} = r, \quad \varrho = \frac{r}{\sqrt{2}+1} = r(\sqrt{2}-1) \quad .$$

Der eine der gesuchten Teile ist die Differenz des genannten Quadrats und eines Quadranten des eingeschriebenen Kreises, also gleich

$$\varrho^2 - \tfrac{1}{4}\pi\varrho^2 = (3 - 2\sqrt{2})(1 - \tfrac{1}{4}\pi) r^2 \quad .$$

Subtrahiert man den Inhalt dieses Teiles und den des eingeschriebenen Kreises von dem Inhalt des Quadranten, so erhält man die Summe der Inhalte der beiden übrigen Teile, die einander gleich sind.

11. Den Inhalt der von zwei Seiten eines gleichseitigen Dreiecks und dem dazwischen liegenden kleinern Bogen des Inkreises eingeschlossenen Fläche aus der Seite a des Dreiecks zu berechnen. Auflösung: Da drei Flächen von gleicher Größe übrig bleiben, wenn man den Kreis von dem Dreieck wegnimmt, so ist der gesuchte Inhalt $\frac{1}{3}$ der Differenz der Inhalte des Dreiecks und des Kreises. Der Radius des Inkreises ist

$$\varrho = \tfrac{1}{6} a\sqrt{3} \quad .$$

Mithin erhält man

$$F = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{4} a^2\sqrt{3} - \tfrac{1}{12}\pi a^2\right) = \tfrac{1}{36}\left(3\sqrt{3} - \pi\right) a^2 \quad .$$

§ 36. Die Ähnlichkeit der Kreise.

1. Daß Kreise ähnliche Figuren sind, ist in § 34 Nr. 2 gezeigt worden. Zwei Kreise derselben Ebene sind aber auch stets in perspektiver Lage zueinander. Zieht man nämlich in zwei Kreisen zwei beliebige, einander parallele und gleich gerichtete Radien AB, $A'B'$ (Fig. 138) und verbindet deren Endpunkte B, B', so schneidet die Verlängerung der Verbindungslinie die Verlängerung der Centrale AA' in einem Punkte S, so daß

$$AS : SA' = AB : A'B' \quad ,$$

d. h. der Punkt S teilt AA' außen im Verhältnis der Radien. Da dies für jedes Paar paralleler und gleich gerichteter Radien gelten muß, so ist der Punkt S für alle solche Paare derselbe, also äußerer Ähnlichkeitspunkt der Kreise A und A'. Er liegt bei ungleichen Kreisen auf der Verlängerung der Centrale über den Mittelpunkt des kleinern Kreises, bei gleichen Kreisen unendlich fern.

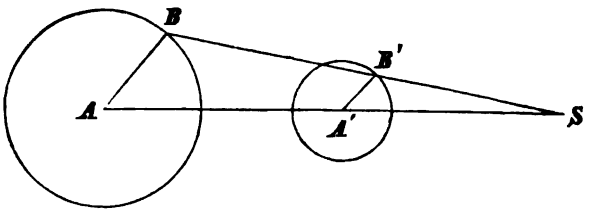


Fig. 138.

Zieht man ferner in zwei Kreisen zwei parallele und entgegengesetzt gerichtete Radien AC, $A'C'$ (Fig. 139) und verbindet deren auf der Peripherie liegende Endpunkte C, C' miteinander, so schneidet die Verbindungslinie die Centrale AA' selbst in einem Punkte I, und die Dreiecke ACI, $A'C'I$ sind ähnlich. Daher ist

$$AI : IA' = AC : A'C' \quad ,$$

d. h. der Punkt I teilt die Centrale innen im Verhältnis der Radien. Für alle Paare paralleler und entgegengesetzt gerichteter Radien zweier Kreise muß dieser Punkt I derselbe sein. Er ist also innerer Ähnlichkeitspunkt dieser Kreise. Er liegt auf der Centrale selbst, bei ungleichen Kreisen dem Mittelpunkt des kleinern näher als dem des größern, bei gleichen Kreisen im Halbierungspunkt der Centrale.

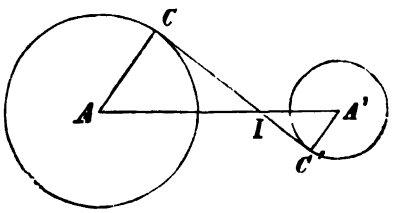


Fig. 139.

Zwei Kreise haben daher in jeder Lage sowohl einen innern als einen äußern Ähnlichkeitspunkt, und diese beiden Ähnlichkeitspunkte teilen die Centrale im Verhältnis der Radien harmonisch.

Sind $r_1 > r_2$ die Radien der beiden Kreise und c die Centrale, so sind die Entfernungen des äußern Ähnlichkeitspunktes von den Mittelpunkten der beiden Kreise, absolut genommen:

$$AS = c \frac{r_1}{r_1 - r_2} \quad , \quad SA' = c \frac{r_2}{r_1 - r_2} \quad .$$

und die Entfernungen des innern Ähnlichkeitspunktes:

$$AI = c \frac{r_1}{r_1 + r_2} \quad , \quad IA' = c \frac{r_2}{r_1 + r_2} \quad .$$

Die Entfernung der beiden Ähnlichkeitspunkte voneinander ist

$$SI = 2c \frac{r_1 r_2}{r_1^2 - r_2^2} \quad .$$

2. Die in § 31 entwickelten Sätze über Ähnlichkeitsstrahlen und entsprechende Punkte ähnlicher Vielecke lassen sich nunmehr auf zwei Kreise übertragen. Das herrschende Verhältnis der beiden Kreise ist das Verhältnis ihrer Radien. Daher

müssen sich die Peripherien zueinander wie die Radien, die Flächeninhalte wie die Quadrate der Radien verhalten, wie schon in § 34 Nr. 2 aus den cyklometrischen Formeln gefolgert wurde. Entsprechende Punkte der Kreise sind die Endpunkte paralleler Radien, die entweder in gleichem (beim äußern) oder in entgegengesetztem Sinne (beim innern Ähnlichkeitspunkt) gezogen sind. Sehnen, die durch die Endpunkte dieser Radien bestimmt sind, entsprechen einander und sind daher parallel.

Entsprechende Punkte müssen auch die Berührungspunkte gemeinschaftlicher Tangenten beider Kreise, falls solche vorhanden sind, sein. Die gemeinschaftlichen Tangenten sind also Ähnlichkeitsstrahlen, weil sie die Endpunkte paralleler Radien, die nämlich beide auf den Tangenten senkrecht stehen, verbinden. Diese gemeinschaftlichen Tangenten müssen symmetrisch zur Centrale liegen. Die Aufgabe, eine gemeinschaftliche Tangente an zwei gegebene Kreise zu legen, kann also dadurch gelöst werden, daß man einen Ähnlichkeitspunkt dieser Kreise konstruiert und von ihm aus an einen Kreis eine Tangente legt. Diese muß auch den andern Kreis berühren.

Die Untersuchung der bei dieser Aufgabe möglichen Fälle ergibt folgendes: Schließen die Kreise einander aus, so liegen beide Ähnlichkeitspunkte außerhalb beider Kreise. Da man von jedem zwei Tangenten ziehen kann, so erhält man in diesem Falle zwei äußere und zwei innere gemeinschaftliche Tangenten. — Berühren die Kreise einander von außen, so fällt der innere Ähnlichkeitspunkt mit dem Berührungspunkt, und die beiden durch diesen Ähnlichkeitspunkt gelegten Tangenten fallen in eine zusammen. In diesem Falle gibt es zwei äußere und eine innere gemeinschaftliche Tangente. — Schneiden die Kreise einander, so fällt der innere Ähnlichkeitspunkt innerhalb beider. Man kann also von ihm keine Tangente an die Kreise ziehen, und diese haben nur noch zwei äußere gemeinschaftliche Tangenten. — Berührt der kleinere Kreis den größern von innen, so fällt der innere Ähnlichkeitspunkt innerhalb beider; der äußere Ähnlichkeitspunkt fällt mit dem Berührungspunkte zusammen, und die Kreise haben nur eine äußere gemeinschaftliche Tangente. — Liegt endlich der kleinere Kreis ganz innerhalb des größern, so fallen beide Ähnlichkeitspunkte innerhalb beider Kreise und diese haben beide keine gemeinschaftliche Tangente.

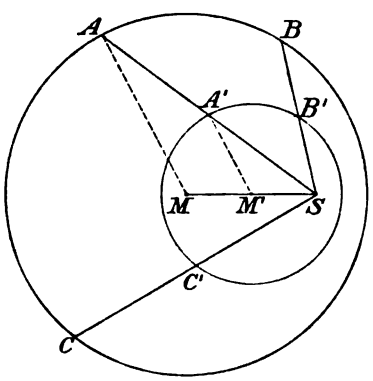


Fig. 140.

Sind zwei Kreise konzentrisch, so fallen beide Ähnlichkeitspunkte mit dem Mittelpunkte zusammen.

3. Verbindet man die Punkte $A, B, C, \ldots$ eines gegebenen Kreises (Fig. 140) mit einem beliebigen Punkt S und teilt die Verbindungslinie durch die Punkte $A', B', C', \ldots$ in demselben Verhältnis innen oder außen, so daß

$$\frac{AA'}{A'S} = \frac{BB'}{B'S} = \frac{CC'}{C'S} = \cdots$$

ist, so liegen $A', B', C', \ldots$ auf einem zweiten Kreise und S ist der äußere oder innere Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise. Das Verhältnis ihrer Radien ist der absolute Wert des Verhältnisses:

$$\frac{AS}{SA'} = \frac{BS}{SB'} = \frac{CS}{SC'} = \cdots$$

Sind z. B. $A', B', C', \ldots$ die Halbierungspunkte von $AS, BS, CS, \ldots$, so teilt

S die Verbindungslinien AA', BB', CC', ... außen im Verhältnis 2 : 1; der Radius des zweiten Kreises ist also halb so groß als der des gegebenen. Es ist also möglich, zu einem gegebenen Kreise beliebig viele Punkte eines zweiten Kreises mit gegebenem Radius zu konstruieren. Dieser zweite Kreis ist der geometrische Ort aller Punkte, welche die Verbindungslinien der Punkte des ersten Kreises mit einem festen Punkte in demselben Verhältnis teilen.

Kennt man den Mittelpunkt M des gegebenen Kreises und zieht einen beliebigen Radius MA, so schneidet die Parallele durch A' zu MA die Verbindungslinie MS in M', dem Mittelpunkt des zweiten Kreises. Da M' die Strecke MS in demselben Verhältnis teilt, so ist durch dieses M' direkt bestimmt.

Sechster Abschnitt.

Die planimetrischen Konstruktionsaufgaben.

§ 37. Vorbegriffe.

Die Aufgaben der Geometrie fordern die Konstruktion von Figuren mit verlangten Eigenschaften, und zwar auf Grund geometrischer Lehrsätze, so daß die Richtigkeit des Verfahrens streng bewiesen werden kann. Hierbei ist von der vorgestellten Konstruktion der Figur die wirkliche praktische Ausführung der Zeichnung zu unterscheiden. Die Aufgabe im engern Sinn verlangt nur die erste, d. h. die Angabe des zur Herstellung der verlangten Figur führenden theoretischen Verfahrens; sie sieht mithin von der praktischen Unmöglichkeit, wirkliche Linien ohne Dicke zu zeichnen und von andern Fehlerquellen bei der Ausführung der Zeichnung ab und kann daher auch eine theoretisch vollkommne Genauigkeit verlangen. Die Konstruktionen der Elementar-Geometrie bedienen sich keiner andern Hilfsmittel als der Geraden und des Kreises, da diese Linien die einzigen sind, die in den Elementen behandelt werden. Es wird also die Möglichkeit vorausgesetzt, eine Gerade und einen Kreis zeichnen zu können. Das geometrische Zeichnen, d. i. die praktische Ausführung jener theoretischen Konstruktionen, bedient sich aber bei den elementaren Aufgaben nur des Lineals und des Zirkels als Instrumente und hat mittels dieser die beiden fundamentalen Forderungen mit möglichster Annäherung an die in der Theorie angenommene Genauigkeit auszuführen. Weil aber diese Genauigkeit nie vollkommen erreicht werden kann, so darf der praktische Zeichner für seine Zwecke außer Lineal und Zirkel noch andre Instrumente verwenden, wie das rechtwinklige Lineal, die Reißschiene, die Maßstäbe und zum Anlegen von Winkeln den Transporteur. Derartige Hilfsmittel dienen dazu, gewisse häufig vorkommende Konstruktionen mit größerer Bequemlichkeit mechanisch auszuführen, und sind insoweit gestattet, als die dadurch bedingte Genauigkeit der Zeichnung größer ist, als bei der Ausführung der betreffenden Konstruktion mit Lineal und Zirkel der Fall sein würde.

Man kann hiernach die Lehre von den geometrischen Konstruktionen als die wissenschaftliche Grundlage des geometrischen Zeichnens erklären. Die hierher gehörigen Aufgaben, die als die einfachsten am häufigsten Anwendung finden, wie z. B. das Errichten und Fällen von Senkrechten, das Ziehen von Parallelen, die Halbierung von Strecken oder Winkeln u. dgl. m., wurden schon früher behandelt. Sie sind als die Fundamentalaufgaben (§ 20) bezeichnet worden, und ihre Kenntnis wird im folgenden vorausgesetzt. Außerdem sind schon im Anschluß von Lehrsätzen wichtige Aufgaben gelöst worden, so in §§ 22, 23, 26, 30.

Die vollständige Auflösung einer Aufgabe zerfällt in vier Teile: Die Analysis entwickelt den Gedankengang, durch den das zu der verlangten Figur führende

Verfahren gefunden wird, indem sie die Beziehungen zwischen dem Gesuchten oder Unbekannten und dem Gegebenen oder Bekannten ermittelt; die Konstruktion lehrt dann, wie die Zeichnung ausgeführt wird; der Beweis zeigt die Richtigkeit dieses Verfahrens auf Grund bewiesener Lehrsätze; die Determination endlich hat die Bedingungen der Möglichkeit der Auflösung der Aufgabe, sowie die Anzahl der Figuren zu ermitteln, die den Forderungen der Aufgabe entsprechen.

In welcher Weise durch die Analysis eine Aufgabe auf schon gelöste Aufgaben und schließlich auf die Postulate der Planimetrie zurückgeführt werden muß, darüber kann eine für alle Fälle gültige Vorschrift nicht gegeben werden. Den bequemsten Weg zur Lösung einer nicht ganz einfachen Aufgabe zu finden, lehrt meistens eine durch vielfache Beschäftigung mit Geometrie gewonnene Übung. Doch sollen im folgenden einige Methoden besprochen werden, die bei gewissen Gruppen von Aufgaben in geeigneter Weise angewendet, zum Ziele führen können. Dabei ist nicht ausgeschlossen, daß manche Aufgabe nach verschiedenen Methoden oder teilweise nach einer, teilweise nach der andern Methode gelöst werden könnte.

§ 38. Methode der Hilfsfiguren.

1. In § 20 sind die Fundamentalaufgaben behandelt worden, die in Anwendung der Kongruenzsätze die Konstruktion eines Dreiecks verlangen, wenn

a) die drei Seiten, oder
b) zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel, oder
c) zwei Seiten und der einer Seite gegenüberliegenden Winkel, oder
d) eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel, oder
e) eine Seite, der gegenüberliegende und ein anliegender Winkel gegeben sind.

In diesen Aufgaben ist jedes der zur Bestimmung des Dreiecks gegebenen Stücke entweder eine Seite oder ein Winkel. An Stelle eines oder mehrerer dieser Stücke, die als unmittelbare Bestimmungsstücke bezeichnet werden, können auch andere Stücke, wie z. B. die Summe oder die Differenz zweier Seiten, die Höhen, die von den Höhen auf den Seiten gebildete Abschnitte, der Radius des Umkreises, die Radien der Berührungskreise des Dreiecks u. dgl. gesetzt werden. Man erhält auf diese Weise eine unerschöpfbare Menge von Aufgaben, in denen die Konstruktion eines Dreiecks aus drei Stücken verlangt wird, die zum Teil oder sämtlich nicht unmittelbare sind und im Gegensatz zu diesen mittelbare Bestimmungsstücke genannt werden können.

Jedoch sind nicht alle Zusammenstellungen dreier Stücke behufs Bildung von Aufgaben gestattet; es fragt sich vielmehr im einzelnen Falle, ob die Aufgabe lösbar ist, d. h. ob das Dreieck aus diesen Stücken konstruiert werden kann, und ob es durch sie bestimmt ist. Sind z. B. ein Winkel, eine ihm anliegende Seite und die Höhe auf der andern anliegenden Seite gegeben, so sieht man leicht ein, daß diese drei Stücke demselben rechtwinkligen Dreieck angehören, das ein Teil des gesuchten ist. Da dieses rechtwinklige Dreieck bereits durch die gegebene Seite und den gegebenen Winkel und mit ihm durch diese Stücke auch die Höhe bestimmt ist, so ist jene Aufgabe unstatthaft. Hat nämlich die Höhe nicht die Länge, die durch die beiden andern Stücke vorgeschrieben ist, so enthält die Aufgabe einen Widerspruch und verlangt also Unmögliches. Hat aber die Höhe, vielleicht infolge ihrer Messung an einem in der Natur existierenden Dreieck oder infolge einer Berechnung, die richtige Länge, so ist ihre Angabe überflüssig, und zur Konstruktion des Dreiecks sind in Wirklichkeit nur zwei Stücke gegeben, so daß das erforderliche dritte fehlt und die Aufgabe unbestimmt ist.

In ähnlicher Weise ist z. B. durch den Radius des Umkreises eines Dreiecks und einen Winkel bereits die diesem gegenüberliegende Seite, oder durch den

Flächeninhalt und die Höhe zugleich die Grundlinie bestimmt und darf demnach nicht mit den beiden ersten Stücken zugleich als Bestimmungsstück gegeben werden. Es ist also, allgemein ausgedrückt, die Bedingung zu erfüllen, daß die Bestimmungsstücke von einander unabhängig sein müssen. Aber auch wenn diese Bedingung erfüllt ist, muß die Determination der Aufgabe noch entscheiden, ob bei jeder Größe dieser Stücke die Aufgabe lösbar ist.

2. Es soll nun zunächst ein zur Auflösung derartiger Aufgaben geeignetes Verfahren an einigen ausgeführten Beispielen gezeigt werden.

1) Es sei die Aufgabe gestellt, ein rechtwinkliges Dreieck aus der Summe seiner Katheten und einem spitzen Winkel zu konstruieren.

Es sei eine Strecke s und ein spitzer Winkel α gegeben: man soll ein rechtwinkliges Dreieck zeichnen, in dem ein Winkel gleich α und die Summe der Katheten gleich s ist. Denkt man sich vorläufig ein rechtwinkliges Dreieck ABC (Fig. 141) gezeichnet, und nimmt man an, dieses sei das verlangte, so müßte, wenn ACB der rechte Winkel ist, $AC + CB = s$ und etwa $\angle BAC = \alpha$ sein. Da nun die Auflösung der Aufgabe nicht gelingen kann, ohne daß die gegebenen Stücke benutzt werden, so trage man zunächst Sorge, eine der Strecke s gleiche Strecke in geeigneter Weise mit dem Dreieck ABC in Verbindung zu bringen. Verlängert man zu diesem Zwecke AC um die der Seite CB gleiche Strecke CD, so ergibt die Verbindung von D mit B ein Hilfsdreieck ADB, in dem die Seite $AD = s$ und $\angle DAB = \alpha$ bekannt sind. Da außerdem das Dreieck BCD gleichschenklig rechtwinklig ist, so ist auch $\angle ADB = 45^0$ bekannt. Man kennt also in dem Hilfsdreieck ADB eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel, und kann es somit aus diesen Stücken nach einer Fundamentalaufgabe konstruiert werden. Ist dies geschehen, so erhält man die zur Konstruktion des gesuchten Dreiecks noch nötige Kathete BC mittels der von B auf AD zu fällenden Senkrechten.

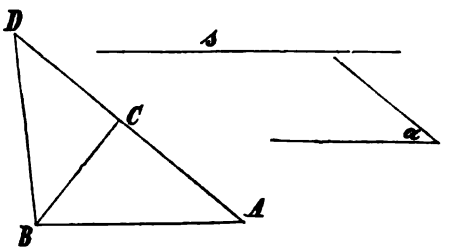


Fig. 141.

Nach dieser Analyse wird die Aufgabe durch folgende Konstruktion gelöst: Auf einer Geraden trage man eine Strecke $AD = s$ ab; darauf lege man an AD in A den Winkel α und an DA in D einen Winkel von 45^0 an. Die freien Schenkel werden sich in einem Punkte B schneiden. Endlich fälle man von B die Senkrechte BC auf AD und ABC ist das verlangte Dreieck.

Die Richtigkeit dieser Konstruktion ergibt sich durch folgenden Beweis: Der Winkel ACB ist ein rechter, da BC nach Konstruktion senkrecht auf AC steht, und der Winkel BAC ist gleich dem gegebenen α, ebenfalls nach Konstruktion. Ferner ist die Summe der Winkel CBD und CDB dem Außenwinkel ACB des Dreiecks BCD, also einem Rechten gleich, und da CDB nach Konstruktion gleich 45^0 ist, so muß CBD die gleiche Größe haben. Hieraus folgt wieder die Gleichheit der diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten CB und CD des Dreiecks BCD. Daher ist $AC + CB = AC + CD = AD$, AD aber ist nach Konstruktion gleich s, mithin ist auch die Summe $AC + CB$ der Katheten des rechtwinkligen Dreiecks ABC der gegebenen Strecke s gleich. Dieses Dreieck erfüllt die gestellten Forderungen, es ist also das verlangte.

Man erhält endlich die Determination der Aufgabe, wenn man die einzelnen nacheinander ausgeführten Konstruktionen mit Rücksicht darauf betrachtet, ob sie sich stets oder nur unter gewissen Bedingungen ausführen lassen, sowie ob sie eine Auflösung oder mehrere liefern. Im vorliegenden Falle ergibt sich leicht, daß, sofern α ein spitzer Winkel ist, was als selbstverständlich vorausgesetzt werden darf, die Auflösung stets, und zwar nur auf eine Art ausführbar ist. Die

Determination ist also bei dieser Aufgabe dahin zu fassen, daß es stets ein und nur ein rechtwinkliges Dreieck gibt, das die gegebenen Stücke enthält.

2) Es sei die Aufgabe gestellt, ein Dreieck aus dem Umfang u und zwei Winkeln α und β zu konstruieren.

Analysis: Angenommen, das Dreieck ABC (Fig. 142) sei das verlangte, also $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$, und die Summe der drei Seiten AB, BC und CA gleich der gegebenen Strecke u, so verlängere man BA um AD gleich AC, sowie AB um BE gleich BC und ziehe BD und CE. Hierdurch entsteht das Hilfsdreieck CDE, in dem $DE = u$ bekannt ist. Ferner ist $\angle CEB = \angle BCE$, da das Dreieck CBE gleichschenklig ist. Nun ist der Außenwinkel CBA dieses Dreiecks gleich der Summe der genannten Winkel, und folglich muß jeder gleich der Hälfte von CBA, und mithin gleich $\frac{1}{2}\beta$ sein. In derselben Weise ergibt sich mittels des gleichschenkligen Dreiecks CAD, daß jeder der Winkel ADC und DCA gleich $\frac{1}{2}\alpha$ ist. Somit sind von dem Hilfsdreieck CDE eine Seite und die beiden anliegenden Winkel bekannt, und dieses Dreieck kann konstruiert werden. Durch Anlegen der bekannten Winkel $DCA = \frac{1}{2}\alpha$ und $BCE = \frac{1}{2}\beta$ ergeben sich die noch fehlenden Eckpunkte A, B des gesuchten Dreiecks.

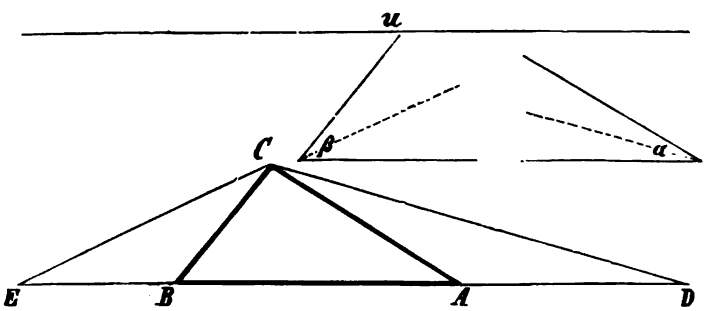


Fig. 142.

Konstruktion: Man halbiere die gegebenen Winkel α und β, zeichne eine beliebige Gerade, trage auf ihr eine Strecke $ED = u$ ab, lege an ED in E den Winkel $\frac{1}{2}\beta$ und an DE in D auf derselben Seite der Geraden den Winkel $\frac{1}{2}\alpha$ an; die angelegten Schenkel mögen einander in C schneiden. Man lege darauf an CD in C innerhalb des Dreiecks ECD den Winkel $\frac{1}{2}\alpha$ und ebenso an CE in C den Winkel $\frac{1}{2}\beta$ an; die angelegten Schenkel mögen ED in A und B schneiden. Dann ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis: Da nach Konstruktion jeder der Winkel CEB und BCE gleich $\frac{1}{2}\beta$, und da CBA als Außenwinkel des Dreiecks BCE gleich der Summe beider Winkel ist, so ist $\angle CBA = \beta$. Auf gleiche Weise ergibt sich, daß $\angle CAB = \alpha$ ist. Da ferner die Winkel BCE und CEB beide gleich $\frac{1}{2}\beta$ sind, so müssen auch die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten BC und EB des Dreiecks BCE einander gleich sein. Ebenso ergibt sich für das Dreieck CAD, daß CA gleich AD ist. Daher muß $BC + BA + CA = EB + BA + AD = ED$ sein, und da $ED = u$ nach Konstruktion ist, so hat das Dreieck ABC auch den gegebenen Umfang. Da dieses Dreieck also die drei gegebenen Stücke hat, so ist es das verlangte.

Determination: Aus der Konstruktion ergibt sich, daß die Bedingung $\alpha + \beta < 180^0$ als selbstverständlich vorausgesetzt, stets ein und nur ein der Aufgabe genügendes Dreieck möglich ist, oder daß alle Dreiecke, die sich aus den gegebenen Stücken konstruieren lassen, nur der Lage, nicht aber der Gestalt und Größe nach voneinander verschieden sein können, daß also alle diese Dreiecke kongruent sind.

3) Aufgabe: Ein Dreieck aus zwei Seiten a und b und der Mittellinie m zur dritten Seite zu konstruieren.

Analysis: Angenommen, ABC (Fig. 143) sei das gesuchte Dreieck, und zwar sei $BC = a$, $AC = b$, so halbiere man AB und verbinde den Halbierungspunkt D mit C. Dann muß CD gleich der dritten gegebenen Strecke m sein. Verlängert man CD um $DE = CD$ und verbindet E mit A, so sind die Dreiecke BCD und EDA kongruent, da sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, und es ist daher $AE = BC = a$. Es sind also von dem Hilfsdreieck CEA die drei Seiten $CA = b$, $AE = a$ und $CE = 2m$ bekannt, und dieses kann daher konstruiert werden. Dann ist D als Halbierungspunkt von CE bekannt, und durch AD und deren Verlängerung $DB = AD$ ergibt sich der Eckpunkt B.

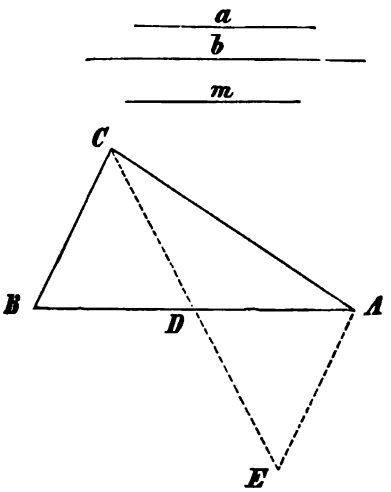


Fig. 146.

Konstruktion: Auf einer Geraden trage man nacheinander die Strecken CD und DE, beide gleich m ab, beschreibe um C mit b und um E mit a Kreisbogen, verbinde einen Schnittpunkt A dieser Kreisbogen mit C und mit D, verlängere AD um $DB = AD$ und ziehe BC, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis: Man ziehe AE. Dann ist, weil nach Konstruktion $CD = DE$, $AD = BD$ ist, und weil die Winkel BDC und ADE als Scheitelwinkel einander gleich sind, das Dreieck ADE dem Dreieck BCD kongruent, also ist auch $AE = BC$. Da nun AE nach Konstruktion gleich a ist, so muß auch $BC = a$ sein. Ferner ist nach Konstruktion $AC = b$ und $CD = m$, und es halbiert CD die Seite AB, weil $DB = AD$ gemacht ist. Mithin ist das Dreieck ABC das verlangte.

Determination: Das Hilfsdreieck ACE ist nur dann möglich, wenn die Summe der Seiten AC und AE größer und ihre Differenz kleiner ist als die dritte Seite CE. Man erhält also die Bedingungen $a + b > 2m$ und $a - b < 2m$ für die Lösbarkeit der Aufgabe. Sind diese erfüllt, so kann das Dreieck ACE konstruiert werden. Da dann alle folgenden Konstruktionen stets und zwar eindeutig ausgeführt werden können, so ist die gestellte Aufgabe unter den genannten Bedingungen stets, und nur auf eine Art lösbar.

3. Man nimmt, wie diese Beispiele zeigen, zum Zwecke der Analyse zunächst eine Figur von der in der Aufgabe verlangten Art als schon gefunden an und stellt die Bedingungen auf, denen sie genügen müßte, wenn sie die verlangte sein sollte. Es ist dazu notwendig, daß alle gegebenen Bestimmungsstücke in der Figur vorkommen, da sonst die Lösung der Aufgabe auch ohne das nicht gebrauchte Stück möglich wäre. Sofern also die betreffenden Strecken oder Winkel nicht von selbst in jener vorläufigen Figur vorhanden sind, müssen sie in geeigneter Weise hergestellt und mit der übrigen Figur in Zusammenhang gebracht werden. So geschah dies in der ersten der Aufgaben mit der Summe der Katheten, in der zweiten mit der Summe der drei Seiten, und in der dritten mit der Mittellinie des Dreiecks, während jedesmal die beiden andern gegebenen Stücke des angenommenen Dreiecks an diesem unmittelbar vorhanden waren. In jeder der drei Aufgaben wurde das konstruierte mittelbare Stück durch eine oder mehrere geeignete Hilfslinien mit den übrigen in Verbindung gebracht. Es ist dann dahin zu streben, daß man eine Hilfsfigur erhalte, welche die sämtlichen Bestimmungsstücke oder doch einen Teil derart enthält, daß sie aus ihnen nach bereits früher gelösten, insbesondere womöglich nach einer Fundamentalaufgabe

konstruiert werden kann. In den Aufgaben von Nr. 2 entstand durch Vermittlung der Hilfslinien ein Dreieck, das die sämtlichen gegebenen Stücke oder aus ihnen leicht ableitbare (wie in der zweiten Aufgabe die Hälften der gegebenen Winkel) enthielt, und dessen Konstruktion aus diesen Stücken durch eine der Fundamentalaufgaben gelöst wurde. Ist bei irgend einer gestellten Aufgabe eine derartige Hilfsfigur ermittelt worden, so ist schließlich noch ein Übergang von dieser zu der verlangten Figur zu suchen, der ihre Konstruktion mit Hilfe der ersten ermöglicht.

Das hiermit zur Konstruktion von Dreiecken angegebene Verfahren läßt sich in entsprechender Weise auf Vierecke und Vielecke ausdehnen.

Es sei noch eines besondern Hilfsmittels erwähnt, das in vielen Fällen die Auflösung erleichtert. Die in Nr. 1 erwähnte Tatsache, daß bereits durch zwei gegebene Bestimmungsstücke einer Figur ein andres Stück bestimmt sein kann, so daß dieses nicht neben jenen als ein weiteres Bestimmungsstück verwendet werden darf, führt darauf, in Fällen, wo die Konstruktion dieses abhängigen Stücks aus den beiden andern auf einfache Weise ausgeführt werden kann, dieses wie eine gegebene Größe zu behandeln. Indem dann dieses abhängige Stück an Stelle eines von den Stücken, aus denen es gefunden wurde, gesetzt und benutzt werden kann, läßt sich die gestellte Aufgabe häufig auf eine leichter zu lösende zurückführen.

Man bezeichnet solche Stücke einer Figur, die aus andern gegebenen Stücken auf bekannte Weise gefunden und daher mit jenen als bekannt betrachtet werden dürfen, als Data. Im weitern Sinne erhält man also durch jede Auflösung einer Aufgabe ein neues Datum, nämlich die gesuchte Figur und deren Teile. So kann, nachdem die Aufgabe 1) in Nr. 2 gelöst worden, jede Seite eines Dreiecks als ein aus dem Umfang und den Winkeln hervorgehendes Datum angesehen werden. Wir setzen jedoch im engern Sinne voraus, daß die zur Herstellung der Data dienenden Konstruktionen nicht über die Fundamentalaufgaben hinausgehen. Solche Data sind beispielsweise folgende:

Durch die Summe $x + y = s$ zweier Strecken oder zweier Winkel oder Flächen und eine einzelne x dieser Größen ist die andere y gegeben, denn es ist $y = s - x$.

Ebenso ist durch $x - y$ und x auch y, durch $x - y$ und y auch x: durch einen spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks der andre: durch den Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks der Winkel an der Spitze und umgekehrt; durch zwei Winkel eines Dreiecks oder schon durch ihre Summe der dritte Winkel gegeben u. dgl. m.

Hierher gehören also auch die in Nr. 1 erwähnten Fälle, nach denen durch einen Winkel eines Dreiecks und eine ihm anliegende Seite die Höhe auf der andern anliegenden Seite, durch den Radius des Umkreises eines Dreiecks und einen Winkel die gegenüberliegende Seite, durch den Flächeninhalt und die Höhe eines Dreiecks die Grundlinie gegeben ist. Genauer ist es, zu sagen, daß durch je zwei der betreffenden drei Stücke das dritte, also beispielsweise nicht nur durch den Radius eines Kreises und einen Peripheriewinkel die zugehörige Sehne, sondern auch durch die Sehne und den Peripheriewinkel der Radius und durch die Sehne und den Radius der Peripheriewinkel, dieser allerdings zweideutig, gegeben sei.

Ist die Summe und Differenz zweier Größen gegeben, so erhält man diese selbst und zwar die größere als die Hälfte der durch Addition, die kleinere gleich der Hälfte der durch Subtraktion der gegebenen entstehenden Größen. Ist also

$$x + y = s, \quad x - y = d$$

gegeben, so ist

$$x = \tfrac{1}{2}(s + d), \quad y = \tfrac{1}{2}(s - d) .$$

Man erhält diese Resultate durch die Auflösung der beiden Gleichungen auf die Unbekannten x und y mittels Addition und Subtraktion.

Ist also z. B. die Summe s und die Differenz d zweier Strecken bekannt, so kann man, um diese selbst zu erhalten, eine Strecke $AB = s$ (Fig. 144) um $BC = d$ verlängern und die Strecke AC halbieren. Die Hälfte AD gibt dann die Länge der größern Strecke x an; die der kleinern y bedarf dann keiner besondern Konstruktion mehr, da $DB = s - x = y$ sein muß. Trägt man dagegen auf $AB = s$ eine Strecke $BE = d$ ab und halbiert den Rest AE in F, so ist $AF = y$ und folglich $FB = x$. In entsprechender Weise erhält man aus der Summe und der Differenz zweier Winkel diese selbst. Diese Konstruktion findet Anwendung, wenn sich unter den gegebenen oder ermittelten Stücken eines Dreiecks ein Winkel nebst der Differenz der beiden andern Winkel befindet. Durch jenen Winkel ist die Summe der beiden andern Winkel gegeben, denn diese ist gleich seinem Nebenwinkel.

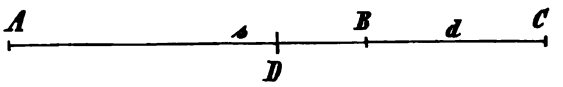


Fig. 144.

4. Weitere Aufgaben zur Methode der Hilfsfiguren ergeben sich durch folgende Betrachtungen.

a) Durch die Höhe eines Dreiecks entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke, die als Hilfsfiguren dienen können. Zur Determination ist zu bemerken, daß das gesuchte Dreieck als Summe oder als Differenz der Teildreiecke erscheinen, also die Aufgabe zweideutig sein kann. Das zweite ist der Fall, wenn einer der Winkel an der Grundlinie stumpf ist, das erste, wenn beide spitz sind. Hiernach ist auch die Grundlinie entweder gleich der Differenz oder gleich der Summe ihrer Abschnitte. Eine Auswahl hierher gehöriger Aufgaben ist folgende:

Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren aus:

1) einer Kathete und ihrer Projektion auf die Hypotenuse;
2) der Höhe und einem spitzen Winkel;
3) einer Kathete und der Höhe;

ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren aus:

4) dem Schenkel und der Höhe;
5) der Basis und der Höhe;
6) der Basis und der Schenkelhöhe;

ein Dreieck zu konstruieren aus:

7) der Höhe und den beiden anliegenden Seiten;
8) der Höhe, einer anliegenden Seite und dem dieser gegenüberliegenden Winkel;
9) zwei Seiten und der Projektion der einen auf die andre;
10) einem Winkel an der Grundlinie und den beiden durch die Höhe gebildeten Abschnitten der Grundlinie;
11) der Höhe, einer anliegenden Seite und dem Winkel an der Spitze;
12) der Höhe, einem Winkel an der Grundlinie und dem Winkel an der Spitze.

b) Ist unter den gegebenen Stücken eine Mittellinie, so ist von den durch diese entstehenden Teildreiecken jedes ein Hilfsdreieck, durch welches das andre und somit auch das gesuchte Dreieck bestimmt ist. Man konstruiere hiernach ein Dreieck aus:

1) zwei Seiten und der zu einer gehörigen Mittellinie;
2) einem Winkel, einer anliegenden Seite und der zur andern gehörigen Mittellinie;
3) einer Seite, der zu ihr gehörigen Mittellinie und dem Winkel zwischen diesen beiden Geraden.

c) Dasselbe wie unter b), gilt von den Teildreiecken, die durch eine winkelhalbierende Transversale entstehen. Der Winkel, den eine solche Transversale mit der ihr gegenüberliegenden Seite bildet, ist das Komplement zur halben

Differenz der beiden dieser Seite anliegenden Dreieckswinkel. Wenn nämlich in dem Dreieck ABC (Fig. 145), CD den Winkel $ACB = \gamma$ halbiert, so ist der Winkel ADC oder

$$\varphi = \beta + \tfrac{1}{2}\gamma = \beta + 90^0 - \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^0 - \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \ .$$

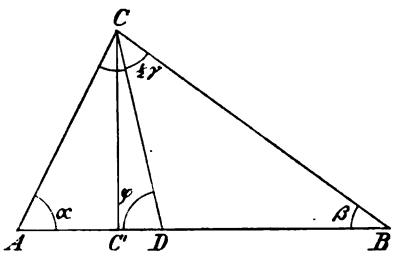


Fig. 145.

Man konstruiere hiernach ein Dreieck aus:

1) einem Winkel, der ihn halbierenden Transversale und einer anliegenden Seite;
2) einem Winkel, der einen zweiten Winkel halbierenden Transversale und der beiden Winkeln anliegenden Seite;
3) zwei Winkeln und der den dritten Winkel halbierenden Transversale.

d) Die Mittellinie m_c, welche die Grundlinie c halbiert, ist die Hypotenuse eines Hilfsdreiecks, dessen eine Kathete die Höhe h_c ist. Durch dieses Hilfsdreieck ergeben sich die durch die Höhe oder durch die Mittellinie entstehenden Teildreiecke. Man konstruiere ein Dreieck aus:

1) m_c, h_c und einer anliegenden Seite a;
2) m_c, h_c und einem Winkel β an der Grundlinie;
3) m_c, h_c und c.

e) Die den Winkel γ an der Spitze halbierende Transversale w_c ist die Hypotenuse eines Hilfsdreiecks, dessen eine Kathete die Höhe h_c ist. Der Winkel (Fig. 145) zwischen der Transversale und der Höhe ist nach c) $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Man konstruiere ein Dreieck aus:

1) w_c, h_c, und einer anliegenden Seite a;
2) w_c, a, $\alpha - \beta$;
3) w_c, h_c, α.

f) Die drei Höhen teilen ein Dreieck in sechs rechtwinklige Dreiecke. Durch irgend eins von diesen Dreiecken und ein von ihm unabhängiges Stück eines zweiten ist das ganze bestimmt. Man konstruiere ein Dreieck aus:

1) einer Höhe, ihrem obern (d. h. dem Eckpunkt anliegenden) Abschnitt und einem Winkel an der Grundlinie;
2) einer Höhe, ihrem obern Abschnitt und dem obern Abschnitt einer zweiten Höhe,
3) dem obern Abschnitt einer Höhe und den beiden Winkeln an der Grundlinie.

g) Die drei Mittellinien eines Dreiecks teilen einander im Verhältnis 1 : 2 und das Dreieck in sechs Dreiecke, von denen jedes das ganze bestimmt. Man konstruiere ein Dreieck aus:

1) zwei Mittellinien und der zu einer gehörigen Seite;
2) zwei Mittellinien und dem Winkel zwischen einer und der von der andern halbierten Seite;
3) zwei Mittellinien und dem Winkel, unter dem sie einander schneiden.

h) Die drei winkelhalbierenden Transversalen eines Dreiecks, die sich im Mittelpunkt des Inkreises schneiden, teilen dieses in sechs Dreiecke, von denen jedes das ganze bestimmt. Man konstruiere ein Dreieck aus:

1) einer Seite und den Abständen ihrer Endpunkte von dem Mittelpunkt des Inkreises;
2) einem Winkel, der Entfernung seines Scheitels vom Mittelpunkt des Inkreises und einer ihm anliegenden Seite;
3) einem Winkel, dem Abstand seines Scheitels und dem Abstand eines zweiten Eckpunktes vom Mittelpunkt des Inkreises.

i) Befindet sich unter den gegebenen Stücken die Summe $a + b = s$ zweier Seiten $BC = a$, $AC = b$ des gesuchten Dreiecks und verlängert man BC um $CD = CA$, so ergibt die Verbindung von D mit A das Hilfsdreieck BDA, in dem $BD = s$, $BA = c$ die dritte Seite des gegebenen Dreiecks, ferner $\angle DBA = \beta$, ein Winkel des Dreiecks, $\angle BDA = \frac{1}{2}\gamma$ gleich der Hälfte eines zweiten Winkels und $BAD = \alpha + \frac{1}{2}\gamma = 90^0 + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ ist. Ist insbesondere ABC ein bei C rechtwinkliges Dreieck, so ist BD gleich der Summe der Katheten und $\angle BDA = 45^0$. Ist dagegen in diesem Falle die Summe $c + a$ der Hypotenuse c und einer Kathete a gegeben, so verlängere man diese Kathete CB über B um die Hypotenuse. Das Hilfsdreieck ACD ist dann rechtwinklig, hat die Katheten $c + a$ und $AC = b$ und den Winkel $\frac{1}{2}\beta$. Verlängert man dagegen die Hypotenuse AB über B um die Kathete a, so ist das Hilfsdreieck schiefwinklig, hat eine Seite b, eine gleich $c + a$ und die Winkel $\frac{1}{2}\beta$ und α.

Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren aus:

1) $a + b$, c; 2) $a + b$, $\alpha - \beta$; 3) $c + a$, b; 4) $c + a$, α; 5) $c + a$, β; 6) $c + a$, $\alpha - \beta$.

Ein Dreieck zu konstruieren aus:

7) $a + b$, c, β; 8) $a + b$, c, γ; 9) $a + b$, c, $\alpha - \beta$; 10) $a + b$, α, β; 11) $a + b$, $\alpha - \beta$, γ .

k) Befindet sich unter den gegebenen Stücken die Differenz d zweier Seiten $BC = a$ und $AC = b$, und trägt man $CE = CA$ auf CB ab, so ergibt die Verbindung von E mit A ein Dreieck EAB, in dem $BE = d$, ferner $BA = c$ und $\angle EBA = \beta$ unmittelbare Stücke des gesuchten Dreiecks und endlich, wenn $\angle ACB = \gamma$, $\angle BAC = \alpha$ gesetzt wird, $\angle BEA = 90^0 + \frac{1}{2}\gamma$, $\angle EAB = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ ist. Ist insbesondere die Differenz der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks gegeben, so ist entsprechend $\angle BEA = 180^0 - 45^0 = 135^0$.

Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren aus:

1) $a - b$, α; 2) $a - b$, β; 3) $a - b$, $\alpha - \beta$; 4) $a - b$, c .

Ein Dreieck zu konstruieren aus:

5) $a - b$, c, β; 6) $a - b$, c, γ; 7) $a - b$, c, $\alpha - \beta$; 8) $a - b$, β, γ; 9) $a - b$, $\alpha - \beta$, γ; 10) $a - b$, α, β .

l) Verlängert man in dem unter k) angegebenen Falle CA um AF, so daß $CF = CB$ ist, und verbindet F mit B, so ist in dem Dreieck ABF, $AF = a - b$, $AB = c$, $\angle BAF = 180^0 - \alpha$, $\angle AFB = 90^0 - \frac{1}{2}\gamma$, $\angle ABF = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Ist im rechtwinkligen Dreieck, wenn c die Hypotenuse bezeichnet, $c - a$ gegeben, so erhält man in gleicher Weise, indem man die Kathete $BC = a$ um CF verlängert, so daß $BF = BA$ wird, das rechtwinklige Hilfsdreieck ACF, in dem $CF = c - a$, $CA = b$, $\angle CFA = 90^0 - \frac{1}{2}\beta$ ist. Mittels derartiger Hilfsdreiecke lassen sich für bereits vorher unter k) gegebene Aufgaben andre Lösungen finden. Außerdem können die folgenden in dieser Weise behandelt werden:

Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren aus:

1) $c - a$, b; 2) $c - a$, β; 3) $c - a$, α .

Ein Dreieck zu konstruieren aus:

4) $a - b$, c, α .

m) Ist der Umfang $a + b + c$ des Dreiecks ABC unter den gegebenen Stücken und macht man die in Aufgabe 2) in Nr. 2 angegebene Hilfskonstruktion, so erhält man das dort benutzte Hilfsdreieck. Ist $a + b - c$ gegeben und verlängert man einerseits BC um $CD = CA$, schneidet andrerseits $BG = BA$ von

BD ab und zieht DA und GA, so ist in dem Dreieck DGA, $DG = a + b - c$, $\angle GDA = \frac{1}{2}\gamma$, $\angle DGA = 90^0 + \frac{1}{2}\beta$, $\angle DAG = \frac{1}{2}\alpha$.

Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren aus:

1) $a + b + c$, α; 2) $a + b - c$, α; 3) $a + c - b$, β .

Ein Dreieck zu konstruieren aus:

4) $a + b - c$, α, β .

n) Zu den unter a) bis h) gestellten Aufgaben lassen sich mit Anwendung der unter i) bis m) angegebenen Verfahren zusammengesetzte Aufgaben bilden, indem man das dortige Hilfsdreieck selbst wieder mittels Summen oder Differenzen seiner Seiten bestimmt sein läßt. Man kann in solchen Fällen also zuerst dieses Hilfsdreieck auf dem unter i) bis m) angegebenen Wege und sodann aus ihm das gesuchte, wie unter a) bis h) gezeigt, konstruieren. Aus der großen Anzahl derartiger Aufgaben wählen wir folgende als Beispiele aus, wobei wir außer den schon angegebenen Bezeichnungen noch folgende benutzen: Es bezeichne h die auf c (im rechtwinkligen Dreieck also auf der Hypotenuse) senkrechte Höhe, p die Projektion der Seite a auf c, wobei $a > b$ vorausgesetzt werde, q die Projektion von b auf c, w die den Winkel γ halbierende, m die die Seite c halbierende Transversale. Im gleichschenkligen Dreieck sei b die Basis, a der Schenkel, h die Höhe auf der Basis.

Ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren aus:

1) $a + h$; 2) $a - h$.

Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren aus:

3) $a + h$, β; 4) $a + h$, α; 5) $a - h$, α .

Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren aus:

6) $a + h$, β; 7) $a + p$, α; 8) $p + h$, α; 9) $a - h$, β; 10) $a - h$, p .

Ein Dreieck zu konstruieren aus:

11) $a + h$, p, α; 12) $a + h$, b, β; 13) $a + p$, β, q; 14) $h + p$, α, γ; 15) $h + p$, a, γ; 16) $a - h$, p, b; 17) $p - h$, b, β; 18) $p - h$, α, γ; 19) $m - h$, b und dem Winkel zwischen m und c; 20) $w + h$, a, $\alpha - \beta$; 21) $w - h$, b, $\alpha - \beta$; 22) $a + h$, β und der zu a gehörigen Mittellinie m_a; 23) $h + p$, a, m_a; 24) $b + h$, α und der den Winkel α halbierenden Transversale.

o) Trägt man vom Fußpunkt D der Höhe CD aus, wenn $\alpha < 90^0$ ist auf DB, wenn $\alpha > 90^0$ ist auf der Verlängerung von BD die Strecke $DE = DA$ ab und zieht CE, so erhält man das Hilfsdreieck BCE, in dem $BC = a$ und zufolge der Kongruenz der Dreiecke CAD, CED die Seite $CE = b$, ferner $\angle CBE = \beta$, $\angle CEB = 180^0 - \alpha$ und $\angle BCE = \alpha - \beta$ ist. Ferner ist $BE = p - q$ oder $p + q$. Betrachtet man, im Falle daß α ein stumpfer Winkel ist, q als negativ, so kann man in beiden Fällen BE als die Differenz der durch die Höhe gebildeten Abschnitte der Grundlinie betrachten. Wo demnach im folgenden $p - q$ als gegebenes Stück genannt ist, unterscheide man die beiden Fälle, in denen q positiv oder negativ ist, setze also im ersten Fall $\alpha < 90^0$ voraus und im zweiten Fall $p + q$ statt $p - q$ und $\alpha > 90^0$.

Man konstruiere ein Dreieck aus:

1) a, b, $p - q$; 2) a, $p - q$, $\alpha - \beta$; 3) a, h, $\alpha - \beta$; 4) $p - q$, h, β.

p) Verlängert man in der bei o) angegebenen Figur noch BC um $BF = CA$ und zieht EF, so erhält man das Hilfsdreieck BEF, in dem $BF = a + b$, $BE = p - q$ oder $p + q$, $\angle FBE = \beta$, $BFE = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $BEF = 90^0 + \frac{1}{2}\gamma$ ist.

Man konstruiere hiernach ein Dreieck aus:

1) $a + b$, $p - q$, β; 2) $a + b$, $p - q$, γ; 3) $a + b$, $p - q$, $\alpha - \beta$.

q) Trägt man dagegen in der bei o) angegebenen Figur $CG = CA$ von CB ab und zieht GE, so erhält man das Hilfsdreieck BGE, in dem $BG = a - b$, $BE = p - q$, $\angle GBE = \beta$, $\angle BEG = \frac{1}{2}\gamma$, $\angle BGE = 90^0 + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ ist.

Man konstruiere hiernach ein Dreieck aus:

1) $a - b$, $p - q$, β; 2) $a - b$, $p - q$, γ; 3) $a - b$, $p - q$, $\alpha - \beta$.

r) Verlängert man die Höhe CD über D und außerdem die Seite CB um $BK = BA$, und zieht die Parallele KL zu BA, welche die Verlängerung von CD in L schneidet, so entsteht das Hilfsdreieck CKL, in dem $CK = a + c$, $\angle CKL = \beta$, $\angle CLK = 90^0$ ist. Zieht man noch BM senkrecht auf KL, so folgt aus der Kongruenz der Dreiecke BKM und ABN, wobei AN die zu BC senkrechte Höhe ist, daß $DL = AN$, also CL gleich der Summe zweier Höhen $h_a + h_c$ ist.

Durch das Hilfsdreieck CLK und ein von ihm unabhängiges Stück des Dreiecks ABC oder auch ein solches Stück von BKA ist ABC bestimmt. In dem zweiten Falle ist zu beachten, daß $\triangle ABK$ gleichschenklig ist, und da $\angle BAK = \angle AKL$, so folgt, daß KA den Winkel BKL halbiert.

Man konstruiere hiernach ein Dreieck aus:

1) $a + c$, $h_a + h_c$, a; 2) $a + c$, $h_a + h_c$, b; 3) $h_a + h_c$, β, a;
4) $a + c$, $h_a + h_c$, α; 5) $h_a + h_c$, α, γ .

s) Trägt man $BP = BA$ von BC ab und zieht PQ parallel zu BA bis zum Schnittpunkt Q mit der Höhe CD, so ergibt sich in entsprechender Weise, wie bei r), daß in dem Hilfsdreieck CPQ die Seite CQ gleich der Differenz zweier Höhen $h_c - h_a$, sowie $CP = a - c$, $\angle CPQ = \beta$, $\angle CQP = 90^0$ ist und daß AB den Winkel BPQ halbiert.

Man konstruiere hiernach ein Dreieck aus:

1) $a - c$, $h_c - h_a$, γ; 2) $h_c - h_a$, β, b; 3) $a - c$, $h_c - h_a$, α .

5. Die Konstruktion von Vierecken kann in vielen Fällen auf die der Dreiecke zurückgeführt werden, in die das Viereck durch seine Diagonalen zerlegt wird. So ist

a) ein Parallelogramm $ABCD$ durch jedes der Dreiecke bestimmt, die durch irgend eine der beiden Diagonalen entstehen; denn man hat nach Konstruktion des Dreiecks nur das Parallelogramm mittels zweier zu Seiten des ersten parallelen Geraden, oder durch Anlegen eines kongruenten, aus den Seiten zu konstruierenden Dreiecks, oder auch mittels noch andrer Abänderungen des Verfahrens, die leicht ersichtlich sind, zu ergänzen. Daher können die vorhergehenden Dreiecksaufgaben, auf das Dreieck ABC angewendet, zu Aufgaben über das Parallelogramm $ABCD$ benutzt werden. Dabei ist die Mittellinie m_b jenes Dreiecks die Hälfte der zweiten Diagonale des Parallelogramms. Zieht man beide Diagonalen, so erhält man vier Dreiecke, von denen jedes das Parallelogramm bestimmt. Hiernach können beispielsweise folgende Aufgaben gelöst werden, wo bei $AB = a$, $BC = b$, $AC = e$, $BD = f$, $\angle DAB = \alpha$ sei, der Winkel der Diagonalen sei ε, h_a die Höhe auf AB, h_b die auf BC.

Ein Rechteck zu konstruieren aus:

1) a, e; 2) e, ε .

Einen Rhombus zu konstruieren aus:

3) e, f; 4) e, h; 5) h, α .

Ein Parallelogramm zu konstruieren aus:

6) a, b, e; 7) a, b, h_a; 8) e, h_a, α; 9) a, h_a, h_b; 10) e, f, ε .

Ein Quadrat zu konstruieren aus:

11) $e + a$; 12) $e - a$.

Ein Rechteck zu konstruieren aus:

13) $a+b, e$; 14) $a, e-b$; 15) $a-b, e$; 16) $a, e+b$.

Einen Rhombus zu konstruieren aus:

17) $a, e+f$; 18) $e+h, a$; 19) $e-a, a$; 20) $a, e-f$.

Ein Parallelogramm zu konstruieren aus:

21) $a+b, a, e$; 22) $b+h_a, a, a$; 23) $b-h_a, a, e$; 24) $a-b, a, e$:

25) $a+e, b, a$.

b) Ein Trapez $ABCD$, in dem $AB=a$ die größere, $CD=c$ die kleinere parallele Seite, $BC=b$, $DA=d$, h die Höhe, die Diagonale $AC=e$, $BD=f$ und $\angle BAD=\alpha$, $\angle ABC=\beta$ sei, ist bestimmt durch das Dreieck ABC und ein davon unabhängiges Stück von CAD oder BCD; ein gleichschenkliges Trapez schon durch das Dreieck BAC allein. — Verlängert man ferner BA um $AE=CD$ und zieht DE, so ist in dem Hilfsdreieck BDE die Seite $BE=a+c$, ferner $BD=f$, $DE=e$, $\angle BDE$ gleich dem Winkel ε der Diagonalen (oder $180^0-\varepsilon$), $\angle DBE=(f, a)$, $\angle DEB=(e, a)$. — Zieht man endlich DF parallel zu CB bis zum Schnittpunkt F mit AB, so ist in dem Hilfsdreieck ADF die Seite $AF=a-c$, ferner $DF=b$, $DA=d$, $\angle DAF=\alpha$, $\angle DFA=\beta$.

Ein gleichschenkliges Trapez zu konstruieren aus:

1) a, b, e; 2) b, h, e .

Ein Trapez zu konstruieren aus:

3) a, b, β, c; 4) a, b, f, β; 5) b, e, f, h; 6) b, e, h, α .

Ein Trapez zu konstruieren aus:

7) $a+b, c, e, \alpha$; 8) $a-b, d, e, \alpha$; 9) $a+b, e, f, \beta$; 10) $a-b, c, d, e$.

Ein Trapez zu konstruieren aus:

11) $a+c, d, e, f$; 12) $a+c, e, f, \alpha$; 13) a, e, f, ε; 14) $a+c, b, e, f$:

15) b, e, f, ε; 16) $e, f, \alpha, \varepsilon$.

Ein Trapez zu konstruieren aus:

17) $a-c, b, d, f$; 18) $a-c, b, d, e$; 19) $a-c, b, f, \beta$; 20) a, c, α, β .

c) Ein Viereck im allgemeinen ist bestimmt, wenn zwei von den Dreiecken, in die es durch die Diagonalen zerlegt wird, und die eine Diagonale zur Seite haben, konstruiert werden können. Zieht man im Viereck $ABCD$ die Geraden BF und DG parallel zur Diagonale AC, ferner CF parallel zu AB und bis zum Schnittpunkt F mit BF, ebenso CG parallel zu AD bis zum Schnittpunkt G mit DG, sowie endlich die Verbindungslinie FG, so ist in dem Dreieck CFG, $CF=AB=a$, $CG=AD=d$, $FG=BD=f$, $\angle FCG=\angle BAD=\alpha$. Ferner ist $BF=DG=AC=e$, $\angle BCF=\angle ABC=\beta$, $\angle DCG=\angle ADC=\delta$. Ferner möge $BC=b$, $DC=c$, $\angle BCD=\gamma$ und ε der Winkel der Diagonalen sein.

Man konstruiere ein Viereck aus:

1) a, b, c, d, e; 2) a, b, e, α, γ; 3) a, b, c, e, γ .

Man konstruiere ein Viereck aus:

4) $a+b, c, d, e, \beta$; 5) $a-b, e, f, \beta, \gamma$; 6) $a+e, b, c, d, \beta$.

Man konstruiere ein Viereck aus:

7) f, e, ε, a, c; 8) f, e, ε, b, d; 9) $a, d, \alpha, c, \varepsilon$.

§ 39. Methode der geometrischen Örter.

1. Es sei die Aufgabe gegeben: Einen Punkt zu bestimmen, der von zwei gegebenen Punkten A, B gleiche, und von einem dritten gegebenen Punkte C eine gegebene Entfernung r hat.

Läßt man zunächst die Forderung, daß der gesuchte Punkt von C die gegebene Entfernung r haben soll, unbeachtet, so wird die Aufgabe unbestimmt, d. h. es gibt unendlich viele Punkte, die nur die andre Forderung, von A und B gleich weit entfernt zu sein, erfüllen. Alle diese Punkte liegen auf der Geraden, die auf der Verbindungslinie von A und B in deren Halbierungspunkt senkrecht steht. Auf dieser Geraden muß daher auch der in der vorliegenden Aufgabe gesuchte Punkt liegen. Verlangt man dagegen nur, daß der gesuchte Punkt von dem gegebenen C die Entfernung r habe, so ist die Aufgabe ebenfalls unbestimmt, und alle Punkte, die dieser Forderung genügen, liegen auf dem Kreise, der mit dem Radius r um C beschrieben wird. Da nun der gesuchte Punkt sowohl auf diesem Kreise als auf der vorher angegebenen Geraden liegen muß, so kann er nur ein beiden Linien gemeinschaftlicher Punkt sein.

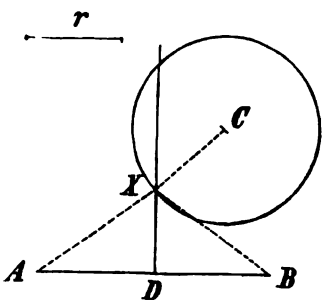


Fig. 146.

Zur Konstruktion verbinde man also A mit B (Fig. 146), halbiere die Strecke AB und errichte im Halbierungspunkt D auf ihr die Senkrechte. Man beschreibe ferner um C mit dem Radius r den Kreis, dann genügt der Punkt X, den der Kreis mit der Senkrechten gemeinsam hat, der Aufgabe.

Zum Beweis der Richtigkeit dieser Konstruktion verbinde man X mit B, und C; dann ist $XC = r$ als Radius des um C beschriebenen Kreises, ferner $\triangle XAD \sim \triangle XBD$, da $XD = XD$, $AD = DB$ nach Konstruktion und $\angle XDA = \angle XDB$ als Rechte; mithin $XA = XB$.

Die Determination ist dahin zu fassen, daß die Aufgabe zwei Auflösungen oder eine oder keine hat, je nachdem der Kreis C die Senkrechte schneidet oder berührt oder meidet. Fällt man auf AB oder deren Verlängerung die Senkrechte CE, so treten diese drei Fälle ein je nachdem $r > DE$, $r = DE$ oder $r < DE$ ist.

Aufgabe 2): Über einer gegebenen Strecke als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, wenn die Höhe gegeben ist.

Analysis: Der Scheitel aller rechtwinkligen Dreiecke, die über derselben Hypotenuse beschrieben werden können, liegen auf dem über dieser Hypotenuse als Durchmesser zu konstruierenden Halbkreis. Die Spitzen aller Dreiecke, welche die gegebene Hypotenuse zur Grundlinie haben, und deren Höhen der andern gegebenen Strecke gleich sind, liegen auf einer Geraden, die der Grundlinie parallel ist und von ihr einen Abstand gleich der gegebenen Höhe hat. Die Spitze des gesuchten Dreiecks muß daher sowohl auf dem Halbkreis als auf der Parallelen liegen und mithin ein Punkt sein, in dem beide Linien einander schneiden oder berühren. Durch Verbindung des Punktes mit den Endpunkten der Hypotenuse erhält man das verlangte Dreieck.

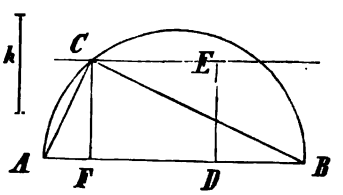


Fig. 147.

Konstruktion: Man beschreibe über der Hypotenuse AB (Fig. 147) als Durchmesser einen Halbkreis, errichte auf AB in einem beliebigen Punkte D die Senkrechte, trage auf dieser (nach der Seite des Halbkreises) $DE = h$ ab,

ziehe durch E die Parallele zu AB, die den Halbkreis in C schneidet und verbinde C mit A und B, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis: Der Winkel ABC ist ein rechter als Peripheriewinkel über einem Durchmesser; das Dreieck ABC ist also rechtwinklig, und AB seine Hypotenuse. Konstruiert man ferner die Höhe CF dieses Dreiecks, so ist CF parallel zu ED, da beide auf AB senkrecht stehen. Da außerdem nach Konstruktion CE parallel zu FD ist, so sind CF und ED als Parallele zwischen Parallelen einander gleich. Nun ist ED nach Konstruktion gleich h, also ist auch die Höhe CF des Dreiecks ABC gleich der gegebenen h. Dieses ist also das verlangte.

Determination: Die Auflösung der Aufgabe ist unmöglich, wenn die Parallele den Halbkreis weder schneidet noch berührt. Dieser Fall tritt ein, wenn der Abstand der Parallelen vom Mittelpunkt des Halbkreises größer ist, als ein Radius desselben, also wenn die gegebene Höhe h größer ist als die Hälfte der Hypotenuse AC. — Ist $h = \frac{1}{2} AB$, so berührt die Parallele den Halbkreis, und die Aufgabe hat nur eine Auflösung: das Dreieck ist gleichschenklig. Ist endlich $h < \frac{1}{2} AB$, so schneidet die Parallele den Kreis, und man erhält zwei der Aufgabe genügende Dreiecke. Diese sind jedoch nur der Lage, nicht aber der Gestalt und Größe nach verschieden: sie liegen symmetrisch zueinander.

Aufgabe 3): Einen Kreis zu konstruieren, der durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt (Fig. 148).

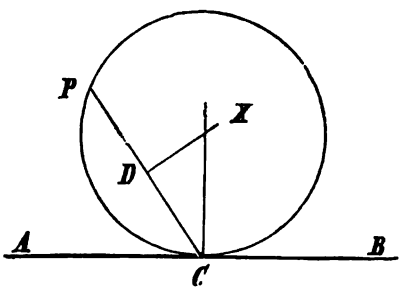


Fig. 148.

Analysis: Die Mittelpunkte aller Kreise, welche die gegebene Gerade AB in dem auf ihr gegebenen Punkte C berühren, liegen auf der Geraden, die in C auf AB senkrecht steht. Die Mittelpunkte aller Kreise, die durch die beiden gegebenen Punkte P und C gehen, liegen auf der Mittelsenkrechten von PC. Der Mittelpunkt X des gesuchten Kreises muß daher der Schnittpunkt dieser beiden Geraden sein. Da nach Bestimmung von X auch der Radius XP oder XC bekannt ist, so ist die Lösung gefunden.

Konstruktion: Errichte auf der gegebenen Geraden AB in dem auf ihr gegebenen Punkte C die Senkrechte, verbinde C mit dem andern gegebenen Punkte P, halbiere PC, errichte auf PC in ihrem Halbierungspunkt D die Senkrechte und beschreibe um den Schnittpunkt X der beiden Senkrechten mit XC als Radius den Kreis. Dieser Kreis ist der verlangte.

Beweis: Da XC nach Konstruktion ein Radius des Kreises X und zugleich auf AB in C senkrecht ist, so ist AB eine Tangente des Kreises X, oder dieser Kreis berührt AB, und zwar im Punkte C. Verbindet man ferner den Mittelpunkt X mit P, so stimmen die rechtwinkligen Dreiecke XPD und XCD in der gemeinschaftlichen Seite XD, in den Seiten PD und DC überein und sind mithin kongruent. Daher ist auch XP gleich XC, also XP ebenfalls ein Radius des Kreises X, und dieser geht somit durch den Punkt P. Der Kreis X ist also der verlangte.

Determination. Da zwei Gerade einander nur in einem Punkte X schneiden können, so ist die Aufgabe im allgemeinen eindeutig. Die beiden Geraden können aber parallel sein, und dann wird die Auflösung unmöglich. Dieser Fall kann nur eintreten, wenn P ebenfalls auf AB liegt, da dann die beiden Geraden auf derselben Geraden AB senkrecht stehen. Zu erwähnen ist außerdem noch der besondere Fall, in dem P auf der in C errichteten Senkrechten liegt. Die Konstruktion vereinfacht sich dann dahin, daß X mit dem Mittelpunkt D von PC zusammenfällt.

2. In den drei Beispielen von Nr. 1 kommt die Auflösung der Aufgabe darauf hinaus, die Lage eines Punktes zu suchen. Diese kann als gelöst betrachtet werden, wenn man zwei gerade oder krumme Linien gefunden hat, auf denen dieser Punkt zugleich liegen muß; denn er kann dann nur ein Punkt sein, in dem die beiden Linien einander schneiden oder berühren.

Eine solche Linie erhält man dadurch, daß man eine der Forderungen der Aufgabe unbeachtet läßt. Hierdurch muß die Aufgabe, da nicht mehr die nötige Anzahl Bedingungen vorhanden ist, unbestimmt werden. Unter den unendlich vielen Auflösungen, die sie zuläßt, muß sich dann auch die befinden, die verlangt wird.

So waren z. B. in der Aufgabe 2) in Nr. 1 drei Bedingungen für das gesuchte Dreieck gestellt: es sollte 1) rechtwinklig sein, 2) eine der Lage und Länge nach gegebene Hypotenuse und 3) eine der Länge nach gegebene Höhe haben. Der zu bestimmende Punkt war hier die Spitze des Dreiecks. Durch Weglassung der dritten Bedingung erhielt man unendlich viele Dreiecke, deren Spitzen auf einem Halbkreis lagen und durch Weglassung der ersten Bedingung wurde man entsprechend auf eine Gerade als Ort des gesuchten Punktes geführt. — In ähnlicher Weise ist bei den andern Aufgaben in Nr. 1 verfahren worden.

Jede gerade oder krumme Linie oder jedes System von Linien von der Eigenschaft, daß jeder ihrer Punkte einer unbestimmten Aufgabe genügt, und daß umgekehrt jeder dieser Aufgabe genügende Punkt auf der betreffenden Linie liegt, ist der geometrische Ort des gesuchten Punktes (§ 12 Nr. 2).

Da man im allgemeinen jedes der bestimmenden Stücke einer Aufgabe weglassen kann, so ist es möglich, daß sich mehr als zwei geometrische Örter finden lassen. Man hat dann die Wahl, welches Paar dieser Örter man benutzen will, und erhält hiernach verschiedene Arten der Auflösung, sowie einen Lehrsatz über gemeinschaftliche Punkte der Örter. In vielen Fällen, wie z. B. den meisten Konstruktionen von Dreiecken oder Kreisen enthält die bestimmte Aufgabe drei Forderungen; es gibt dann im allgemeinen drei geometrische Örter, die einander in denselben Punkten treffen müssen und daher auch drei verschiedene Wege der Auflösung, da man den ersten Ort mit dem zweiten oder den ersten mit dem dritten oder den zweiten mit dem dritten verbinden kann. Soll z. B. ein Kreis beschrieben werden, der durch drei gegebene Punkte geht, so liegt sein Mittelpunkt auf jeder der Mittelsenkrechten des Dreiecks jener drei Punkte. Man kann also zu seiner Bestimmung zwei dieser Mittelsenkrechten, die einander in demselben Punkte schneiden müssen, auswählen. Dadurch ergibt sich zugleich der Satz, daß sich die Mittelsenkrechten eines Dreiecks in einem Punkte schneiden. Ähnliches ist von den Winkelhalbierenden des Dreiecks bekannt.

In der Aufgabe 2) in Nr. 1 ergibt sich jedoch, daß in dieser Weise kein dritter Ort angegeben werden kann. Die entstehende unbestimmte Aufgabe, ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen, dessen Höhe eine gegebene Länge hat, läßt nämlich die Lage des Dreiecks und somit auch die seiner Spitze völlig unbestimmt. Derartige Fälle machen also eine Ausnahme von dem vorher Gesagten. — In der dritten Aufgabe in Nr. 1 dagegen existiert ein dritter geometrischer Ort: es ist derjenige der Mittelpunkte aller Kreise, welche die gegebene Gerade AB in einem beliebigen Punkte berühren und durch den außerhalb liegenden Punkt P gehen. Dieser geometrische Ort ist jedoch aus keinem Lehrsatz der Elementar-Geometrie bekannt. Um sich eine Vorstellung von seiner Gestalt zu machen, kann man auf AB eine möglichst große Anzahl von Punkten als Berührungspunkte annehmen (Fig. 149) und jedesmal mit Hilfe der beiden andern zugehörigen Örter die Lage des Mittelpunkts bestimmen. Die so gewonnenen aufeinander folgenden Punkte sind Punkte des dritten Orts und geben eine um so genauere Vorstellung von seiner Gestalt, je dichter sie aneinander

gereiht sind. Im vorliegenden Beispiel ist dieser Ort eine krumme Linie, deren Punkte die Eigenschaft haben, daß sie von dem festen Punkte P und von der festen Geraden AB den gleichen Abstand haben. Sie besteht aus zwei symmetrischen Ästen, die ins Unendliche auseinander laufen und heißt Parabel. Da in der Elementar-Geometrie nur Gerade und Kreise behandelt werden, so können andre Kurven in Aufgaben, die durch elementare Konstruktion gelöst werden sollen, keine Anwendung als geometrische Örter finden.

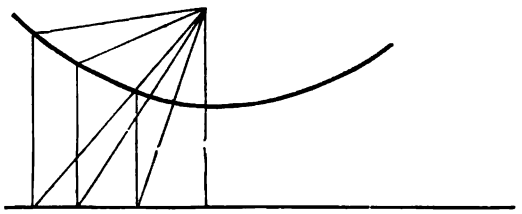


Fig. 149.

Die Methode der geometrischen Örter kann also nur zur Auflösung elementarer Aufgaben gebraucht werden, wenn sich mindestens zwei Örter finden lassen, von denen jeder entweder eine Gerade oder ein Kreis ist.

3. Weitere Aufgaben zur Methode der geometrischen Örter ergeben sich durch folgende Betrachtungen:

a) Der geometrische Ort der Punkte, die von einem gegebenen Punkt P einen gegebenen Abstand r haben, oder der g. O. der Mittelpunkte der Kreise, die durch P gehen, und deren Radien gleich r sind, ist der um P mit dem Radius r beschriebene Kreis. — Der g. O. der Punkte, die von zwei gegebenen Punkten A, B gleich weit entfernt sind, oder der g. O. der Mittelpunkte der Kreise, die durch A und B gehen, ist die Mittelsenkrechte von AB. — Der g. O. der Punkte, die von einer gegebenen Geraden MN eine gegebene Entfernung r haben, oder der g. O. der Mittelpunkte der Kreise, welche die Gerade MN berühren und den Radius r haben, besteht aus den beiden in einem Abstand gleich r zu MN parallelen Geraden. — Der g. O. der Punkte, die von zwei einander schneidenden Geraden gleich weit entfernt sind, oder der g. O. der Mittelpunkte der Kreise, die zwei einander schneidende Gerade berühren, besteht aus den zwei Halbierungslinien der von diesen Geraden gebildeten vier Winkel. — Der g. O. der Punkte, die von zwei Parallelen gleich weit entfernt sind, oder der g. O. der Mittelpunkte der Kreise, die zwei parallele Gerade berühren, ist die Gerade, die zu den beiden gegebenen parallel und von ihnen gleich weit entfernt ist. — Der g. O. der Mittelpunkte der Kreise, die eine gegebene Gerade MN in einem auf ihr gegebenen Punkte A berühren, ist die auf MN in A senkrechte Gerade.

Man konstruiere hiernach einen Punkt, der auf einer gegebenen Geraden oder einem gegebenen Kreise liegt und

1) von einem gegebenen Punkt eine gegebene Entfernung hat;
2) von zwei gegebenen Punkten gleich weit entfernt ist;
3) von einer andern gegebenen Geraden eine gegebene Entfernung hat.

Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, der

4) eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt;
5) eine gegebene Gerade berührt und durch einen außerhalb gegebenen Punkt geht;
6) durch zwei gegebene Punkte geht.

Einen Kreis zu beschreiben, der

7) zwei gegebene Gerade, und zwar die eine in einem gegebenen Punkte berührt;
8) zwei gegebene Parallele und außerdem eine diese schneidende gegebene Gerade berührt;
9) zwei gegebene Parallelen berührt und durch einen zwischen ihnen gegebenen Punkt geht.

b) Der geometrische Ort der Mittelpunkte der Kreise, die einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berühren, ist die Gerade durch diesen Punkt

und den Mittelpunkt des Kreises. Es sind jedoch dieser Mittelpunkt M selbst und der Berührungspunkt B ausgenommen. Die zwischen M und B liegende Strecke des Ortes enthält die Mittelpunkte der Kreise, die den gegebenen von innen berühren, ihre Verlängerung über B enthält die Mittelpunkte der von außen berührenden, und ihre Verlängerung über M die Mittelpunkte der umschließend berührenden Kreise. — Der g. O. der Mittelpunkte der Kreise, die einen gegebenen Kreis berühren und einen gegebenen Radius haben, besteht aus zwei dem gegebenen konzentrischen Kreisen, von denen der eine mit der Summe, der andre mit der Differenz der beiden Radien beschrieben wird. Der erste enthält die Mittelpunkte der Kreise, die den gegebenen von außen berühren, der zweite, je nachdem der Radius des gesuchten Kreises kleiner oder größer ist als der des gegebenen, die Mittelpunkte von Kreisen, die den gegebenen von innen oder umschließend berühren. Sind beide Radien gleich groß, so fällt der mit der Differenz der Radien beschriebene Kreis weg. — Der g. O. der Mittelpunkte der Kreise, die zwei konzentrische Kreise berühren, besteht aus zwei den gegebenen konzentrischen Kreisen. Zieht man durch einen beliebigen Punkt C des kleinern gegebenen Kreises den Durchmesser AB des größern, so geht jeder der beiden Örter durch einen der Halbierungspunkte der Strecken AC und CB und die zugehörige dieser Strecken ist jedesmal gleich dem Durchmesser des gesuchten Kreises.

Man beschreibe hiernach einen Kreis, der einen gegebenen Radius hat und

1) einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt;
2) einen gegebenen Kreis berührt und durch einen nicht auf diesem liegenden gegebenen Punkt geht;
3) einen gegebenen Kreis und eine gegebene Gerade berührt;
4) zwei gegebene Kreise berührt.

Einen Kreis zu konstruieren, der

5) einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt und durch einen andern gegebenen Punkt geht;
6) einen Kreis in einem gegebenen Punkte und außerdem eine gegebene Gerade berührt;
7) zwei gegebene konzentrische Kreise und zwar den einen in einem gegebenen Punkte berührt.

c) Der geometrische Ort der Spitzen aller rechtwinkligen Dreiecke, die über einer gegebenen Hypotenuse stehen, ist der über dieser Hypotenuse als Durchmesser beschriebene Halbkreis. — Der g. O. der Spitzen aller Dreiecke, die über einer gegebenen Grundlinie stehen und an der Spitze einen gegebenen Winkel haben, ist der über der Grundlinie als Sehne stehende Kreisbogen, der den gegebenen Winkel als Peripheriewinkel faßt. — Der g. O. der Spitzen aller Dreiecke, die über einer gegebenen Grundlinie stehen und eine Höhe von gegebener Länge haben, ist die Parallele zur Grundlinie im Abstande gleich der Höhe.

Man konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck über einer gegebenen Hypotenuse:

1) dessen Höhe die Hypotenuse in einem gegebenen Punkte trifft:
2) dessen Spitze auf einer gegebenen Geraden liegt.

Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem ihr gegenüberliegenden Winkel und

3) der Höhe auf dieser Seite;
4) der zu jener Seite gehörigen Mittellinie;
5) dem auf jener Seite gegebenen Punkte, in dem sie von der Halbierungslinie des gegenüberliegenden Winkels geschnitten wird.

Ein Dreieck zu konstruieren aus:

6) zwei Mittellinien und den durch eine von ihnen geteilten Winkel.

d) Der geometrische Ort der Halbierungspunkte aller Sehnen eines Kreises, die einander in demselben Punkte schneiden, ist der Kreis, für den die Ver-

bindungslinie dieses Punktes mit dem Mittelpunkt des ersten Kreises ein Durchmesser ist. — Der geometrische Ort der Halbierungspunkte aller Sehnen eines Kreises, die dieselbe gegebene Länge haben, ist ein dem ersten konzentrischer Kreis. — Der geometrische Ort der Endpunkte aller Tangenten eines Kreises, die, vom Berührungspunkt aus gerechnet, dieselbe Länge haben, ist ein konzentrischer Kreis.

In einem gegebenen Kreise eine Sehne zu ziehen, so daß diese von einer gegebenen Geraden halbiert werde und

1) durch einen gegebenen Punkt geht;
2) eine gegebene Länge hat.
3) Von einem zu bestimmenden Punkte einer gegebenen Geraden aus an einen gegebenen Kreis eine Tangente von gegebener Länge zu legen.
4) Einen Punkt zu bestimmen, von dem man an jeden von zwei gegebenen Kreisen eine Tangente von derselben gegebenen Länge ziehen kann.
5) Von einem Punkte, der auf einem Kreise gegeben ist, in diesem eine Sehne zu ziehen, so daß die vom Halbierungspunkt der Sehne an einen zweiten gegebenen Kreis gelegte Tangente eine gegebene Länge hat.

§ 40. Methode der ähnlichen Figuren.

1. Es sei gegeben die Aufgabe 1): Ein Dreieck aus zwei Winkeln und der Summe der Radien des Um- und des Inkreises zu konstruieren (Fig. 150).

Analysis: Konstruiert man zunächst ein Dreieck aus den beiden gegebenen Winkeln und einer Seite von beliebig angenommener Länge, so muß dieses wegen der Übereinstimmung in den Winkeln dem gesuchten ähnlich sein. Konstruiert man daher zu jenem Hilfsdreieck die Summe der Radien des Um- und des Inkreises, so muß diese Summe sich zu der gegebenen verhalten, wie eine Seite des Hilfsdreiecks zur entsprechenden Seite des gesuchten. Man kann daher irgend eine Seite des gesuchten als vierte Proportionale zu drei Strecken, und dann aus ihr und den Winkeln das gesuchte Dreieck konstruieren.

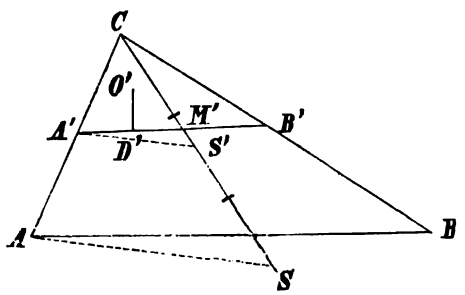


Fig. 150.

Konstruktion: Man zeichne eine beliebige Strecke $A'B'$, lege an $A'B'$ in A' den gegebenen Winkel α und an $B'A'$ in B' auf derselben Seite den Winkel β an: die freien Schenkel mögen einander in C schneiden. Man konstruiere dann den Mittelpunkt M' des Umkreises und den Mittelpunkt O' des Inkreises von $A'B'C'$, fälle die Senkrechte $O'D'$ auf $A'B'$, verbinde C mit M' und verlängere CM' um $M'S' = O'D'$. Dann trage man auf der nötigenfalls verlängerten CS' die Strecke CS gleich der gegebenen Summe s ab, ziehe $S'A'$ und dann SA parallel zu $S'A'$ und bis zum Schnittpunkt A mit CA' oder deren Verlängerung. Endlich ziehe man durch A die Parallele zu $A'B'$, die CB' oder deren Verlängerung in B schneidet, dann ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis: Es ist $\angle CAB = \angle CA'B'$ als korrespondierender Winkel an Parallelen, $\angle CA'B' = \alpha$ nach Konstruktion, also auch $\angle CAB = \alpha$. In entsprechender Weise ist $\angle CBA = \angle CB'A' = \beta$. Bezeichnet nun ϱ' den Radius des Inkreises, r' den Radius des Umkreises von $A'B'C'$ und sind ϱ und r die entsprechenden

Strecken für das Dreieck ABC, so muß, da die beiden Dreiecke in Folge ihrer Übereinstimmung in den Winkeln ähnlich sind,

$$\varrho' : r' : CA' = \varrho : r : CA \quad ,$$

also auch

$$(\varrho' + r') : (\varrho + r) = CA' : CA$$

sein. Nun ist, wie aus der Konstruktion hervorgeht, $CS' = \varrho' + r'$ und da $CS = s$ und $A'S'$ parallel zu AS ist,

$$(\varrho' + r') : s = CA' : CA \quad .$$

Die Vergleichung dieser Proportion mit der vorhergehenden zeigt, daß $\varrho + r = s$ ist, was noch zu beweisen war.

Determination: Die Aufgabe ist stets lösbar und eindeutig.

Aufgabe 2): Ein Viereck aus einer Diagonale und den vier Winkeln, welche die andre Diagonale mit den Seiten bildet, zu konstruieren.

Analysis: Wäre die nicht gegebene Diagonale bekannt, so ließe sich jedes der beiden Dreiecke, in die sie das Viereck teilt, aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln konstruieren. Nimmt man nun statt der nicht gegebenen Diagonale eine Strecke von beliebiger Länge an und konstruiert in entsprechender Weise aus dieser und den vier gegebenen Winkeln ein Viereck, so muß dieses dem gesuchten ähnlich sein, und seine zweite Diagonale muß sich zu der gegebenen Diagonale des gesuchten Vierecks verhalten, wie seine erste Diagonale oder auch irgend eine seiner Seiten zu der entsprechenden des gesuchten. Daher kann jede der betreffenden Strecken für das gesuchte Vieleck als vierte Proportionale zu drei bekannten Strecken konstruiert und damit die Aufgabe gelöst werden.

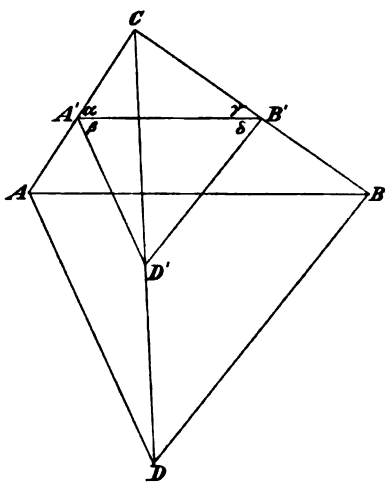


Fig. 151.

Konstruktion: Man zeichne eine beliebige Strecke $A'B'$ (Fig. 151), lege an $A'B'$ in A' nach der einen Seite den Winkel α und nach der andern Seite den Winkel β an. In entsprechender Weise lege man an $B'A'$ in B' die Winkel γ und δ an, so daß die vier Winkel die von der Aufgabe verlangte Lage haben. Die freien Schenkel auf der einen Seite von $A'B'$ mögen einander in C, die auf der andern in D' schneiden. Man ziehe darauf CD', trage auf dieser nötigenfalls verlängerten Linie eine Strecke CD gleich der gegebenen Diagonale f ab, ziehe durch D die Parallelen zu $D'A'$ und zu $D'B'$ bis zum Schnittpunkt mit CA' und CB' oder deren Verlängerungen in A und B. $ABCD$ ist das verlangte Viereck.

Beweis: Die Diagonale CD des Vierecks $ABCD$ hat die gegebene Länge f nach Konstruktion. Da $AD \parallel A'D'$, $BD \parallel B'D'$, so ist $CA : CA' = CD : CD'$ und $CB : CB' = CD : CD'$, mithin auch $CA : CA' = CB : CB'$. Hieraus folgt, daß, wenn man A mit B verbindet, AB parallel zu $A'B'$ sein muß. Daher ist auch $\angle CAB = \angle CA'B'$ als korrespondierender Winkel an Parallelen und da $\angle CA'B'$ nach Konstruktion gleich α ist, so muß auch $\angle CAB = \alpha$ sein. In derselben Weise ergibt sich, daß $\angle DAB = \angle D'A'B' = \beta$, $\angle CBA = \angle CB'A' = \gamma$, $\angle DBA = \angle D'B'A' = \delta$ ist, und daß somit das Viereck $ACBD$ alle gestellten Bedingungen erfüllt.

Determination: Damit die Aufgabe so lösbar sei, daß ein Viereck im engern Sinne entsteht, muß $\alpha + \gamma < 2R$ und $\beta + \delta < 2R$ sein. Die Aufgabe ist eindeutig.

Aufgabe 3): Ein Dreieck aus dem Verhältnis der Höhe zu einer anliegenden Seite, $h : a = m : n$, dem dieser Seite gegenüberliegenden Winkel und der Summe der Grundlinie und Höhe $c + h = s$ zu konstruieren.

Analysis: Durch das gegebene Verhältnis ist die Gestalt des die Seite $CB = a$ und die Höhe $CD = h$ enthaltenden rechtwinkligen Dreiecks BCD (Fig. 152) bestimmt und man erhält somit durch Konstruktion eines diesem Dreieck ähnlichen den Winkel $CBA = \beta$ des gesuchten Dreiecks. Dann sind von diesem zwei Winkel bekannt; man kann daher wieder ein diesem ähnliches Dreieck konstruieren und es muß dann die Summe der Grundlinie und Höhe des ähnlichen Dreiecks zu der gegebenen des gesuchten in dem herrschenden Verhältnis stehen. Hiernach ist die Aufgabe zu lösen.

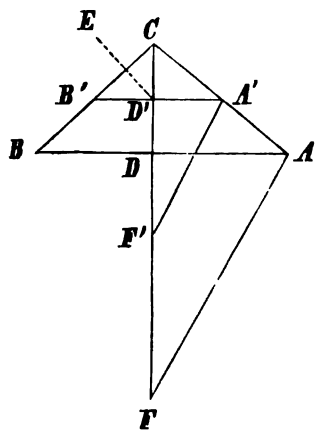


Fig. 152.

Konstruktion: Man zeichne zwei beliebige Strecken h', a', die zueinander in dem gegebenen Verhältnis $m : n$ stehen, errichte auf einer Strecke $CD' = h'$ in D' die Senkrechte, beschreibe um C mit a' als Radius einen Kreisbogen, der die Senkrechte in B' schneidet, ziehe CB', lege an $D'B'$, etwa in D', einen Winkel $B'D'E = \alpha$ an, ziehe durch C die Parallele zu $D'E$ bis zum Schnittpunkt A' mit der Verlängerung von $B'D'$, verlängere CD' um $D'F' = A'B'$, trage auf der nötigenfalls verlängerten Geraden CF' die Strecke $CF = s$ ab, ziehe $A'F'$ und durch F die Parallele zu $F'A'$ bis zum Schnittpunkt A mit CA' oder deren Verlängerung; ziehe endlich AB parallel zu $A'B'$ bis zum Schnittpunkt B mit CB' oder deren Verlängerung, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis: Es ist $\angle CAB = \angle CA'B'$, $\angle CA'B' = \angle ED'B'$, $\angle ED'B' = \alpha$; also ist auch $\angle CAB = \alpha$. Die Gerade CD schneide AB in D. Dann ist CD senkrecht zu AB, da CD' senkrecht auf der zu AB parallelen Geraden $A'B'$ ist; CD ist also die Höhe des Dreiecks ABC. Nun ist $CD : CB = CD' : CB'$, und da $CD' : CB' = h' : a' = m : n$, so ist auch $CD : CB = m : n$. Endlich ist $(AB + CD) : (A'B' + CD') = AC : A'C = FC : F'C = s : (A'B' + CD')$, woraus $AB + CD = s$ folgt.

Determination: Damit die Aufgabe lösbar sei, muß zunächst $a' > h'$, also $n > m$ sein. Sodann muß die Summe der Winkel $CB'D'$ und α weniger als zwei Rechte betragen. Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist die Auflösung stets möglich, und zwar auf eine einzige Art. Ist insbesondere $\alpha = 90^0$, so vereinfacht sich die Auflösung in leicht ersichtlicher Weise.

2. Ist durch einen Teil der zur Konstruktion einer Figur gegebenen Bestimmungsstücke die Gestalt der Figur bestimmt, so daß also alle Figuren, die in diesen Stücken übereinstimmen, ähnlich sind, so kann man zunächst eine solche der gesuchten ähnliche Figur zeichnen. Da hierbei die Größe der Figur gleichgültig ist, so kann man irgend eine Strecke an ihr willkürlich annehmen, und man wird zu diesem Zwecke eine solche Strecke, z. B. eine Seite, nehmen, daß die veränderte Aufgabe, aus ihr und jenen Bestimmungsstücken die Figur zu konstruieren, eine bekannte, möglichst einfache Auflösung hat. Es handelt sich dann nur noch darum, zu der so gewonnenen Hilfsfigur eine ihr ähnliche zu zeichnen, die auch die richtige Größe hat. Dazu muß eine bei der Konstruktion

der Hilfsfigur nicht benutzte Strecke unter den gegebenen Bestimmungsstücken sein, und zeichnet man die ihr entsprechende Strecke zu der Hilfsfigur, so gibt das Verhältnis beider das herrschende Verhältnis der zwei Figuren an. Man kann also jede Seite oder Diagonale u. dgl. der gesuchten Figur als vierte Proportionale zu jenen beiden Strecken und der entsprechenden Seite oder Diagonale u. dgl. der Hilfsfigur konstruieren und damit die Aufgabe lösen.

Bei der Konstruktion der vierten Proportionale wird man die bereits in der Figur vorhandenen Strecken möglichst in ihrer Lage zu benutzen suchen, um eine einfache Konstruktion der Aufgabe zu erhalten.

Es ist ferner zur Anwendung dieser Methode nicht nötig, daß sich zu der gesuchten Figur eine ähnliche konstruieren lasse, sondern es genügt häufig, daß dies für einen Teil der Figur, wie z. B. in der Aufgabe 3) in Nr. 1 bei dem einen der durch die Höhe entstehenden Teildreiecke der Fall war, möglich sei, sofern durch diesen Teil ein oder mehrere weitere Bestimmungsstücke der ganzen Figur gefunden werden, deren Benutzung die Aufgabe auf eine bereits bekannte zurückführt.

Bei der Konstruktion der gesuchten Figur zu der ihr ähnlichen kann man sich auch der Ähnlichkeitspunkte (§ 31 Nr. 2: § 36) mit Vorteil bedienen.

3. a) Dreieckskonstruktionen, bei denen zwei Winkel des Dreiecks gegeben sind, lassen sich sämtlich leicht nach der Methode der ähnlichen Figuren ausführen. Man kann hiernach verschiedene der früher nach der Methode der Hilfsfiguren behandelten Aufgaben lösen, wie z. B. wenn außer den beiden Winkeln gegeben sind:

1) eine Höhe h; 2) eine Mittellinie m; 3) eine winkelhalbierende Transversale w; 4) die Summe zweier Seiten $a + b$; 5) die Differenz zweier Seiten $a - b$; 6) der Umfang $a + b + c$; 7) der Überschuß der Summe zweier Seiten über die dritte $a + b - c$; 8) die Summe zweier Höhen $h_a + h_b$; 9) die Differenz zweier Höhen $h_b - h_a$; 10) der Radius r des Umkreises; 11) der Radius ϱ des Inkreises; ferner Summen und Differenzen von Berührungsradien, von Seiten und Radien, Seiten und Höhen, u. dgl. m.

b) Statt eines Winkels kann das Verhältnis zweier Seiten $a : b = m : n$ des gesuchten Dreiecks gegeben sein. Der gegebene Winkel ist dann entweder der eingeschlossene γ oder ein gegenüberliegender. Im zweiten Falle kann die Aufgabe zweideutig werden. Man bilde hiernach die den Aufgaben unter a) entsprechenden. Für ein rechtwinkliges Dreieck genügt die Angabe eines Seitenverhältnisses, da der rechte Winkel ohnehin bekannt ist. Es können endlich beide Winkel durch Verhältnisse von Seiten des gesuchten Dreiecks vertreten sein, zu denen dann beispielsweise jedes der unter a) 1—11 angegebenen Stücke als drittes treten kann.

Statt des Verhältnisses zweier Seiten kann das Verhältnis der auf ihnen stehenden Höhen gegeben sein, da je zwei Seiten eines Dreiecks sich zueinander umgekehrt wie die zugehörigen Höhen verhalten.

Man konstruiere ein Dreieck aus:

1) dem Verhältnis der Höhe zur Projektion einer anliegenden Seite auf die Grundlinie, dem Verhältnis der andern anliegenden Seite zu ihrer Projektion auf die Grundlinie und der Summe der drei Höhen;

2) dem Verhältnis des Radius des Inkreises zu einem auf einer Seite durch den Berührungspunkt gebildeten Abschnitt, dem dieser Seite gegenüberliegenden Winkel und der zu dieser Seite gehörigen Mittellinie;

3) den Verhältnissen der drei Höhen zueinander und der Differenz der durch eine Winkelhalbierende auf der gegenüberliegenden Seite gebildeten Abschnitte.

c) Noch allgemeiner kann man die vorstehende Methode mit derjenigen der Hilfsfiguren verbinden, indem man sie bei der Konstruktion von Figuren

anwendet, die ihrerseits wieder als Hilfsfiguren auf die Konstruktion von verlangten Figuren führen. Beispiele lassen sich nach dem vorhergehenden leicht bilden.

Die Methode der ähnlichen Figuren kann auch auf die Konstruktion von Vierecken und Vielecken, die auf die von Dreiecken zurückgeführt wird, angewendet werden.

§ 41. Methode der algebraischen Analysis.

1. Es sei zu lösen die Aufgabe 1): Eine gegebene Strecke so zu teilen, daß die Differenz der Quadrate der Abschnitte gleich dem Produkt aus der ganzen Strecke und dem kleinern Abschnitt ist.

Analysis: Es sei $AB = a$ die zu teilende Strecke, x der kleinere, also $a - x$ der größere gesuchte Abschnitt, so soll

$$(a - x)^2 - x^2 = a\,x$$

sein. Die Auflösung dieser Gleichung führt zu dem Werte der Unbekannten

$$x = \tfrac{1}{3}a \quad .$$

Konstruktion: Teile die Strecke AB im Verhältnis 1 : 2.

Beweis: Nach Konstruktion ist der größere Abschnitt $AX = \frac{2}{3}a$, der kleinere $BX = \frac{1}{3}a$, die Differenz ihrer Quadrate also $\frac{4}{9}a^2 - \frac{1}{9}a^2 = \frac{1}{3}a^2$, und das Produkt aus der ganzen Strecke und ihrem kleinern Abschnitt ebenfalls $\frac{1}{3}a^2$.

Determination: Die Aufgabe ist stets lösbar und eindeutig.

Aufgabe 2): Ein gegebenes Dreieck durch eine Parallele zur Grundlinie zu halbieren.

Analysis: Ist ABC (Fig. 153) das gegebene Dreieck, XY die gesuchte Parallele zu AB, so ist das Dreieck CXY ähnlich dem Dreieck ABC und die Flächen beider verhalten sich wie die Quadrate zweier entsprechender Seiten. Setzt man $CB = a$, den Abschnitt $CX = x$, so muß, da das Dreieck CXY die Hälfte von ABC sein soll,

$$x^2 : a^2 = 1 : 2$$

sein, woraus

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2}a^2} = \sqrt{a \cdot \tfrac{1}{2}a}$$

folgt. Es muß also x die mittlere Proportionale zwischen a und $\frac{1}{2}a$ sein.

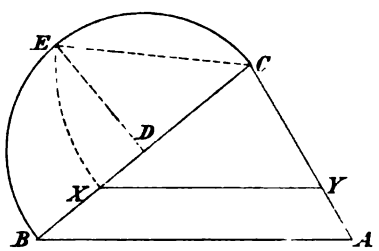


Fig. 153.

Konstruktion: Halbiere die Seite CB des gegebenen Dreiecks ABC in D, beschreibe über CB als Durchmesser einen Halbkreis, errichte auf CB in D die Senkrechte, die den Halbkreis in E schneidet, ziehe CE, beschreibe um C mit CE als Radius einen Kreisbogen, der CB in X schneidet und ziehe durch X die Parallele zu BA, die CA in Y trifft. Dann ist XY die verlangte Teilungslinie.

Beweis: XY ist parallel zu BA nach Konstruktion. Daher ist ferner $\triangle CXY \sim \triangle CBA$, folglich $\triangle CXY : \triangle CBA = CX^2 : CB^2$. Nun ist $CX^2 = CE^2 = CD \cdot CB = \frac{1}{2}CB \cdot CB = \frac{1}{2}CB^2$, woraus $\triangle CXY = \frac{1}{2}CBA$ folgt.

Determination: Die Aufgabe ist stets lösbar und eindeutig.

Aufgabe 3): Eine gegebene Strecke so zu teilen, daß der größere Abschnitt die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Strecke und dem kleinern Abschnitt ist. (Teilung einer Strecke nach dem goldenen Schnitt; vgl. § 30 Aufgabe 4)

Analysis: Ist $AB = a$ die gegebene Strecke, $AX = x$ der gesuchte größere Abschnitt, also $BX = a - x$ der kleinere Abschnitt, so muß

$$x^2 = a\,(a - x), \qquad x^2 + a\,x = a^2$$

sein. Diese quadratische Gleichung hat die beiden Wurzeln:

$$x = -\tfrac{1}{2}a - \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}a^2} \quad ,$$

von denen für die Aufgabe im engern Sinne nur die positive

$$x = \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a$$

zu gebrauchen ist. Die Quadratwurzel bedeutet die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten a und $\frac{1}{2}a$ sind.

Konstruktion: Halbiere die gegebene Strecke AB, errichte in B auf AB die Senkrechte BC gleich der Hälfte von AB, ziehe AC, trage auf CA die Strecke $CD = CB$ und auf AB die Strecke $AX = AD$ ab, so ist X der verlangte Teilpunkt.

Beweis: Es ist $AX = AD = AC - CD = AC - CB$, also $AC = AX + CB$. Nun ist $AC^2 = AB^2 + CB^2$, also $AB^2 + CB^2 = (AX + CB)^2 = AX^2 + 2\,AX \cdot CB + CB^2$. Hieraus folgt $AB^2 = AX^2 + 2\,AX \cdot CB$ oder $AX^2 = AB^2 - AX \cdot 2\,CB$ oder $AX^2 = AB^2 - AX \cdot AB$ oder $AX^2 = AB \cdot (AB - AX)$, oder endlich $AX^2 = AB \cdot BX$.

Determination: Die Aufgabe ist stets lösbar. Sie ist eindeutig, sofern der Teilpunkt X zwischen A und B, die Teilung also als innere vorausgesetzt ist. Faßt man jedoch die Aufgabe im weitern Sinn so auf, daß der Teilpunkt auch auf der Verlängerung der zu teilenden Strecke (äußere Teilung) liegen darf, so erhält man eine zweite Auflösung, die der negativen Wurzel der in der Analysis aufgestellten quadratischen Gleichung:

$$x_2 = -\left(\sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}a^2} + \tfrac{1}{2}a\right)$$

entspricht. Man hat dann AC um BC zu verlängern und die entstehende Strecke von A aus statt in der Richtung nach B in der entgegengesetzten Richtung, entsprechend dem negativen Werte von x_2, abzutragen. In diesem Falle wird der Abschnitt AX die mittlere Proportionale zwischen AB und dem andern Abschnitt BX. Dies stimmt damit überein, daß jetzt $AB < AX$ wird, mithin $AX < BX$ sein muß. Soll diese Auflösung gelten, so ist also in dem Wortlaut der Aufgabe statt »der größere« Abschnitt zu setzen »ein« Abschnitt. In der Tat ist die Bedingung, daß $AX > BX$ sei, bei dem Ansatz der Gleichung in der Analysis nicht berücksichtigt, so daß die Gleichung der Analysis auf beide Auflösungen führen mußte.

2. Wird zur Auflösung einer gegebenen Aufgabe eine unbekannte Strecke gesucht, so kann man diese Strecke als die Unbekannte x einer Gleichung darzustellen suchen, indem man die in der Aufgabe angegebene Beziehung zwischen x uud bekannten Größen algebraisch ausdrückt. Die Auflösung der so gefundenen Gleichung liefert einen algebraischen Ausdruck für die Unbekannte, der geometrisch zu deuten und hiernach zu konstruieren ist. Es können auch mehrere Unbekannte durch eine gleiche Anzahl von Gleichungen bestimmt werden. Die Analysis besteht also bei dieser Methode aus folgenden Teilen: 1) Angabe oder Wahl der Strecken, die als Unbekannte gesucht werden sollen; 2) Ansetzen der nötigen Gleichungen aus den Bedingungen der Aufgabe: 3) Auflösen dieser Gleichungen; 4) geometrische Deutung der Resultate.

Von diesen Teilen erheischt der letzte eine nähere Erörterung. Es seien $a, b, c, \ldots$ bekannte Strecken. Dann bedeutet:

$a + b$ die durch Verlängerung der Strecke a um die Strecke b, oder umgekehrt, entstehende Summe beider Strecken;

$a - b$ die durch Abtragen der Strecke b von der Strecke a entstehende Differenz der Strecken;

$a + b - c + d \ldots$ die den Zeichen in dieser algebraischen Summe entsprechend durch Verlängern oder Abschneiden aus den gegebenen entstehende Strecke.

Jede beliebige Verbindung von Strecken durch + und — bedeutet also wieder eine Strecke und heißt daher, wie die einzelnen Glieder des Ausdrucks, eine lineare, oder eine Größe erster Dimension.

Ein Produkt na bedeutet eine Strecke, wenn a eine Strecke und der Faktor n eine natürliche Zahl ist: na ist dann ein Vielfaches von a und wird durch n maliges Abtragen der Strecke a auf einer Geraden konstruiert.

Dagegen kann das Produkt ab, in dem beide Faktoren Strecken bedeuten, nicht mehr als eine Strecke gedeutet werden. Nach den Erklärungen in § 24 Nr. 1 kann man es als die arithmetische Darstellung des Inhalts eines Rechtecks, dessen Seiten a und b sind, oder irgend einer andern Figur von gleicher Größe mit diesem Rechteck, betrachten.

Insbesondere ist a^2 als Inhalt eines Quadrats zu deuten, dessen Seite gleich a ist.

Ausdrücke, die wie ab und a^2 Flächen bedeuten, werden als Größen zweiter Dimension bezeichnet.

Ein Quotient $\frac{a}{n}$ hat eine geometrische Bedeutung, wenn a eine Strecke und der Divisor n eine natürliche Zahl ist. Die Aufgabe, ihn zu konstruieren, ist identisch mit der bekannten, die Strecke a in n gleiche Teile zu teilen. Ist n eine gebrochene Zahl, so fordert die Konstruktion von $\frac{a}{n}$, ebenso wie die von na, die Teilung der Strecke a in einem gegebenen Verhältnis. Der Quotient $\frac{a}{n}$ ist in jedem Falle eine Größe erster Dimension, wenn n eine Zahl ist.

Ist dagegen in $\frac{a}{b}$ sowohl b als a eine Strecke, so ist der Quotient eine Zahl, nämlich das Verhältnis der Strecke a zur Strecke b. Er ist eine Größe nullter Dimension.

Den im vorstehenden angeführten einfachen Ausdrücken reihen sich folgende zusammengesetzte an:

Der Ausdruck $\frac{a \cdot b}{c}$, worin a, b, c Strecken sind, kann gedeutet werden als das Produkt der Verhältniszahl $\frac{a}{c}$ mit der Strecke b, oder auch als das Produkt der Strecke a mit $\frac{b}{c}$. Er bedeutet also wieder eine Strecke. Da aus $\frac{ab}{c} = x$, $c : a = b : x$ folgt und umgekehrt, so erkennt man, daß die Konstruktion dieses Ausdrucks gleichbedeutend ist mit der Konstruktion der vierten Proportionale zu c, a und b.

Insbesondere ist der Ausdruck $\frac{a^2}{b} = x$ als die dritte Proportionale zu b und a zu deuten, denn es folgt daraus: $b : a = a : x$.

Bestehen allgemeiner der Dividend und der Divisor eines Quotienten aus linearen Faktoren und ist die Anzahl der Faktoren des Dividenden um 1 größer als die des Divisors, so bedeutet der Ausdruck geometrisch eine Strecke und ist daher ein Ausdruck erster Dimension. Man kann nämlich jeden solchen Ausdruck als das Produkt eines linearen Faktors mit zwei oder mehreren Zahlen, so z. B. $\frac{abcd}{efg}$ als $a \cdot \frac{b}{e} \cdot \frac{c}{f} \cdot \frac{d}{g}$, ansehen. Die Konstruktion eines derartigen Ausdrucks kann durch wiederholte Konstruktion einer vierten Proportionale geschehen. Beispielsweise kann man, um $x = \frac{abcd}{efg}$ zu konstruieren, zuerst die vierte Proportionale zu e, a und b suchen. Setzt man diese gleich y, so ist

$y = \frac{a\,b}{e}$, also $x = \frac{y\,c\,d}{f\,g}$. Sucht man darauf wieder die vierte Proportionale z zu f, y und c, so ist $z = \frac{y\,c}{f}$, also $x = \frac{z\,d}{g}$, und man hat also schließlich noch die vierte Proportionale zu g, z und d zu konstruieren. Soll ferner beispielsweise $x = \frac{a^2\,b^3\,c^4}{d^5\,e^3}$ geometrisch gedeutet werden, so ergibt sich, daß x, da der Zähler neun, der Nenner acht Faktoren enthält, von der ersten Dimension ist, und daß man x erhält, wenn man etwa der Reihe nach die Ausdrücke $y = \frac{a^2}{d}$, $z = \frac{b\,c}{d}$, $u = \frac{y\,c}{d}$, $v = \frac{u\,z}{e}$, $w = \frac{v\,z}{e}$, $x = \frac{w\,z}{e}$ konstruiert. Selbstverständlich kann die Reihenfolge der einzelnen Konstruktionen in allen diesen Fällen eine verschiedene sein.

Ist die Anzahl der linearen Faktoren im Zähler um zwei größer als die der Faktoren im Nenner, so erhält man durch Absonderung eines der Faktoren des Zählers ein Produkt zweier Strecken; der betreffende Ausdruck ist daher von der zweiten Dimension und läßt sich als eine Fläche konstruieren.

Ist allgemein die Anzahl der linearen Faktoren des Zählers um n größer als diejenige des Nenners, so heißt der Ausdruck ein solcher n-ter Dimension. Ausdrücke dritter Dimension, wie $a\,b\,c$, $a^2\,b$, $\frac{a\,b\,c\,d}{e}$ u. dgl. m. erhalten ihre geometrische Deutung in der Stereometrie; Ausdrücke von einer höheren als der dritten Dimension haben keine geometrische Bedeutung und können daher in geometrischen Aufgaben überhaupt nicht vorkommen. Sind die Anzahlen der Faktoren des Zählers und des Nenners gleich groß, so ist der Ausdruck von der nullten Dimension, d. h. eine Zahl.

Ein Ausdruck zweiter Dimension kann auf einen solchen erster Dimension zurückgeführt werden, nicht nur dadurch, daß man ihn durch eine lineare Größe dividiert, sondern auch durch Ausziehen der Quadratwurzel. Wie $\sqrt{a^2}$ die Seite eines Quadrats, also eine Strecke a bedeutet, so hat auch $\sqrt{a\,b}$ die Bedeutung einer Strecke. Setzt man $\sqrt{a\,b} = x$, so folgt $x^2 = a\,b$ oder $a : x = x : b$ und umgekehrt; x ist also die mittlere Proportionale zwischen a und b und kann daher konstruiert werden. Z. B. ist $x = \sqrt{\frac{k}{n}\,a^2} = \sqrt{a \cdot \frac{k}{n}\,a}$, wenn k und n natürliche Zahlen sind, die mittlere Proportionale zur Strecke a und $\frac{k}{n}\,a$.

Entsprechend ist $x = \sqrt{\frac{a\,b\,c}{d}}$ die mittlere Proportionale zwischen a und der vierten Proportionale zu d, b und c, oder auch zwischen b und $\frac{a\,c}{d}$, oder zwischen $\frac{a\,b}{d}$ und c. Ebenso kann z. B. $x = \sqrt{\frac{a^3\,b\,c^2}{d^3\,e}}$ so konstruiert werden, daß man zunächst $x = \frac{a}{d}\sqrt{\frac{a\,b\,c^2}{d\,e}}$ setzt und nacheinander $y = \frac{a\,b}{d}$, $z = \frac{y\,c}{e}$, $u = \sqrt{c\,z}$, $v = \frac{a\,u}{d}$ konstruiert.

Hierher gehören auch folgende aus dem pythagoreischen Lehrsatz zu deutende Ausdrücke:

$\sqrt{a^2 + b^2}$ ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten a und b sind.

$\sqrt{a^2 - b^2}$ ist eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse a und dessen andre Kathete b ist.

Man kann auch $\sqrt{a^2 - b^2}$ mittels der Umformung in $\sqrt{(a+b)(a-b)}$ als die mittlere Proportionale zwischen $a+b$ und $a-b$ deuten.

Aus dem vorstehenden folgen leicht die Deutungen und Konstruktionen zusammengesetzter Ausdrücke, von denen wir noch die folgenden anführen:

$\sqrt{ab + cd}$ kann konstruiert werden, indem man die mittlere Proportionale zwischen a und b, ferner die mittlere Proportionale zwischen c und d und endlich die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks konstruiert, dessen Katheten diese beiden mittlern Proportionalen sind.

$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ kann konstruiert werden, indem man zunächst $z = \sqrt{a^2 + b^2}$, also die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks aus den Katheten a und b zeichnet, so daß dann für den vorhergehenden Ausdruck $\sqrt{z^2 + c^2 + d^2}$ gesetst werden kann, dann entsprechend $u = \sqrt{z^2 + c^2}$ und zuletzt $x = \sqrt{u^2 + d^2}$ konstruiert.

Insbesondere ist $a\sqrt{2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{a^2 + a^2}$ die Hypotenuse eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks mit der Kathete a oder die Diagonale eines Quadrats mit der Seite a; $a\sqrt{19} = \sqrt{19a^2}$ kann konstruiert werden, indem man dafür $\sqrt{16a^2 + 4a^2 - a^2} = \sqrt{(4a)^2 + (2a)^2 - a^2}$ setzt, also z. B. zuerst $y = \sqrt{(4a)^2 + (2a)^2}$ und sodann $x = \sqrt{y^2 - a^2}$ konstruiert. Man kann aber auch dafür $\sqrt{25a^2 - 4a^2 - a^2 - a^2}$ setzen und dann entsprechend verfahren. Ferner kann man $\sqrt{19a \cdot a}$ als mittlere Proportionale zwischen a und $19a$ konstruieren. Noch andre zu geometrischer Deutung geeignete Umformungen sind $\sqrt{(6a)^2 - (4a)^2 - a^2}$ oder $\sqrt{(5a)^2 - (2a) \cdot (3a)}$, u. dgl. m.

Ist ein Ausdruck aus mehreren andern durch Addition und Subtraktion zusammengesetzt, so ist er einer geometrischen Deutung fähig, wenn sämtliche Glieder homogen, d. h. von derselben Dimension, also in der Planimetrie entweder alle von der ersten oder alle von der zweiten, sind. Es hat keinen Sinn, Größen erster und zweiter Dimension, Strecken zu Flächen zu addieren. Ist in einem Ausdrucke diese Bedingung nicht erfüllt, so ist entweder ein Fehler gemacht worden, oder die gestellte Aufgabe fordert Unmögliches.

Anders verhält es sich, wenn unter mehreren Strecken eine als Längeneinheit gesetzt worden ist. So geht beispielsweise der Ausdruck erster Dimension:

$$\frac{ab}{c} + \frac{er}{f} + \frac{gr^2}{hi} + \frac{kl}{r} + \frac{mn^2}{r^2}$$

durch die Annahme $r = 1$ in

$$\frac{ab}{c} + \frac{e}{f} + \frac{g}{hi} + kl + mn^2$$

über, also in einem Ausdruck, der scheinbar Glieder der 0-ten, ersten, zweiten und dritten Dimension nebeneinander, ja sogar ein solches, welches bei konsequenter Durchführung der Bezeichnung als von der minus ersten Dimension zu bezeichnen wäre, enthält. Dieser Schein verschwindet, wenn man bedenkt, daß die Annahme der Größe r zur Längeneinheit bedingt, daß in dem zweiten Ausdruck die Größen a, b, c, e u. s. w. nur noch die Verhältniszahlen der früher so bezeichneten Größen zu r bezeichnen können. Setzt man statt ihrer hiernach $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$ u. s. w. ein, so erhält man nach leichten Umformungen wieder den Ausdruck in der zuerst gegebenen Gestalt.

3. a) Aufgaben, deren Analysis auf Gleichungen ersten Grades führt, bedürfen keiner weitern Erklärung. Sie sind stets eindeutig bestimmt. Kommt bei der gesuchten Strecke außer der Länge auch die Richtung in Betracht, so zeigt

ein negatives Resultat an, daß ihr in der Konstruktion die Richtung zu geben ist, die der in der Analysis angenommenen entgegengesetzt ist. Kommt die Richtung nicht in Betracht, so zeigt ein negatives Resultat die Unmöglichkeit der Auflösung an; zugleich aber deutet es auf die Möglichkeit einer Erweiterung der Aufgabe hin, durch die auch das negative Resultat einen Sinn erhalten würde.

Zu einer Seite BC eines Dreiecks ABC eine Parallele XY zu ziehen, so daß eine der folgenden Bedingungen erfüllt wird:

1) $XY = CY$; 2) $AX = CY$; 3) $XY^2 = AX \cdot AB$; 4) $XY = BX + CY$; 5) $XY = CY - BX$; 6) $XY = AX - CY$; 7) $BC - XY = AX + AY$; 8) $BC - XY = AX - AY$.

9) Auf den Seiten eines Rechtecks von den Eckpunkten aus gleiche Stücke abzuschneiden, so daß die Teilpunkte der Seiten die Eckpunkte eines Rhombus bilden.

10) In ein Dreieck ABC ein Parallelogramm mit dem Umfang $2s$ so zu zeichnen, daß es mit ihm den Winkel B gemeinsam hat.

11) Auf einem Durchmesser AB eines Kreises sei ein Punkt P gegeben; man soll auf der Verlängerung von AB einen Punkt X so bestimmen, daß die Tangente XY gleich PX wird.

12) Auf einem Durchmesser AB eines Kreises ist ein Punkt C gegeben und über AC als Durchmesser ist ein Halbkreis konstruiert: man soll einen Kreis konstruieren, der die auf AB senkrechte Gerade CD und zwei Halbkreise berührt.

b) Aufgaben, deren Analysis auf rein quadratische Gleichungen führt, liefern für die gesuchte Unbekannte, zwei Wurzeln von gleichem absoluten Werte, aber entgegengesetztem Vorzeichen. In Betreff der negativen Wurzel gilt das darüber bei a) Gesagte. Hiernach kann eine solche Aufgabe eindeutig oder zweideutig sein.

1) Auf einer Strecke AB, auf der ein Punkt C gegeben ist, soll ein zweiter Punkt X so bestimmt werden, daß $AC : AX = AX : AB$ ist.

2) Im Dreieck ABC zu BC eine Parallele XY so zu ziehen, daß das Dreieck AXY gleich $\frac{2}{3}$ von ABC ist.

3) In einem gegebenen Kreis fünf gleiche Quadrate zu zeichnen, so daß jedes der vier äußern zwei Eckpunkte auf dem Kreise und mit dem mittlern eine Seite gemeinsam hat.

4) Ein gleichschenkliges Dreieck aus den Höhen auf der Basis und auf dem Schenkel zu konstruieren.

5) Zwei Strecken zu konstruieren, wenn die Summe ihrer Quadrate und ihr Verhältnis gegeben ist.

6) Ein regelmäßiges Sechseck zu zeichnen, dessen Inhalt die mittlere Proportionale zwischen den gegebenen Quadraten a^2 und b^2 ist.

c) Aufgaben, deren Analysis auf gemischt quadratische Gleichungen führt, haben im allgemeinen zwei verschiedene Auflösungen. Ist eine Wurzel der Gleichung negativ, so gilt für die Auflösung das im entsprechenden Fall unter a) Gesagte. Damit die Gleichung

$$x^2 + px = q \quad ,$$

in der x eine Strecke bedeutet, eine geometrische Bedeutung habe, müssen alle Glieder mit dem ersten von gleicher, also der zweiten Dimension sein; p muß daher eine Strecke, q eine Fläche bedeuten. Wir können demnach q als in der Form eines Produktes $m \cdot n$ gegeben voraussetzen Man erhält dann durch Auflösen der Gleichung die beiden Wurzeln

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 + mn} \quad ,$$

die nach den Anweisungen in Nr. 2 konstruiert werden können. Eine andre Konstruktion der beiden Wurzeln x_1, x_2 der quadratischen Gleichung gründet sich auf den Satz, daß

$$x_1 + x_2 = -p \, , \qquad x_1 x_2 = -mn$$

ist. Man hat die beiden Fälle zu unterscheiden, in denen x_1 und x_2 gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben. In beiden Fällen beschreibt man zunächst einen Kreis mit dem Durchmesser p. Haben x_1 und x_2 gleiche Vorzeichen, ist also q negativ, so trage man in diesen Kreis eine Sehne AB ein, die aus zwei Strecken $AP = m$, $PB = n$ besteht, und also gleich $m + n$ ist: haben x_1 und x_2 ungleiche Vorzeichen, also bei positivem q, so trage man eine Sehne $AB = m - n$ ein und verlängere AB um $BP = n$, so daß also $AP = m$ ist. In beiden Fällen ziehe man dann die durch P und den Mittelpunkt gehende Sehne XY, so sind die Abschnitte XP, YP die gesuchten Strecken x_1 und x_2. — Liegt der Punkt P innerhalb des Kreises, so sind beide Strecken positiv zu nehmen, wenn p negativ ist, dagegen beide negativ, wenn p positiv ist. Liegt P außerhalb des Kreises, so ist die eine Strecke positiv, die andre negativ, und zwar hat die größere immer das entgegengesetzte Vorzeichen wie p.

Beispiele: Eine gegebene Strecke AB in einem Punkte X so zu teilen, daß:

1) $AX^2 = 2 \cdot BX^2$; 2) $AX \cdot BX = AX^2 - BX^2$: 3) $AX \cdot BX = (AX - BX)^2$ ist.

In einem gegebenen Dreieck ABC eine Transversale XY parallel zu BC zu ziehen, so daß

4) $\triangle AXY = \triangle BCX$: 5) $BC : XY = AX : BX$: 6) $AC : XY = AX : CY$ ist.

Eine Sehne AB eines gegebenen Kreises so zu verlängern, daß die von dem Endpunkte der Verlängerung an den Kreis gelegte Tangente

7) eine gegebene Länge hat, 8) gleich dem n-ten Teil der ganzen Sekante ist.

Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren aus:

9) einer Kathete und der Projektion der andern Kathete auf die Hypotenuse; 10) der Höhe und der Bedingung, daß eine Kathete gleich der Projektion der andern auf die Hypotenuse sei; 11) der Hypotenuse und der Bedingung, daß die drei Seiten eine stetige Proportion bilden.

Einen Kreis zu konstruieren:

12) der zwei Seiten eines gegebenen Dreiecks berührt und von der dritten unter einer Sehne von gegebener Länge geschnitten wird: 13) der eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt und von einem gegebenen Kreise unter einem Durchmesser geschnitten wird; 14) der den einen von zwei gegebenen Kreisen berührt, durch den Halbierungspunkt der Centrale geht und seinen Mittelpunkt auf der Peripherie des andern hat.

15) Auf einem kreisförmigen Billard steht ein Ball in einem Punkte P. Man soll denselben central so stoßen, daß er nach zweimaligem Anprallen nach P zurückkehrt.

§ 42. Besondere Arten von Konstruktionsaufgaben.

1. Verwandlungs- und Teilungsaufgaben.

a) Die Verwandlungsaufgaben, von denen die einfachsten und wichtigsten bereits in § 26 behandelt sind, verlangen die Konstruktion einer Figur, die mit einer gegebenen Figur gleichen Flächeninhalt haben, und die außerdem eine oder mehrere andre Bedingungen erfüllen soll. Man kann sie also als Aufgaben bezeichnen, bei denen sich unter den zur Konstruktion einer verlangten Figur gegebenen Bestimmungsstücken der Flächeninhalt befindet. Dieser Flächeninhalt wird durch diejenige Figur angegeben, deren Verwandlung verlangt ist. Zur Auflösung können verschiedene Methoden angewendet werden; selbstverständlich stützt sie sich auf die Sätze über den Flächeninhalt der Figuren.

Häufig wird die Auflösung dadurch erleichtert, daß man die verlangte Verwandlung succesive ausführt, d. h. zuerst die gegebene Figur in eine andre verwandelt, die noch nicht alle gestellten Bedingungen erfüllt, diese dann in eine

zweite und die zweite in eine dritte u. s. w. verwandelt, indem man Sorge trägt, daß die bereits erfüllten Bedingungen weiter erfüllt bleiben.

Soll beispielsweise ein gegebenes Viereck $ABCD$ in ein gleichschenkliges Dreieck mit gegebener Grundlinie verwandelt werden, so kann man es zunächst nach § 26 Nr. 2 in ein beliebiges Dreieck ABE, dann dieses in ein andres AFG mit der gegebenen Grundlinie AG und zuletzt AFG unter Beibehaltung dieser Grundlinie in ein gleichschenkliges Dreieck AHG verwandeln, indem man die Spitze H als Schnittpunkt zweier Örter, nämlich der durch F gehenden Parallelen zu AG und der Mittelsenkrechten auf AG bestimmt.

b) Die Teilungsaufgaben, von denen ebenfalls die einfachsten und wichtigsten bereits in § 26 Nr. 5 und 6 behandelt sind, fordern die Teilung einer Figur in zwei oder mehrere Teile, die entweder einander gleich sind oder in einem gegebenen Verhältnis zueinander stehen. Außerdem können besondere Bedingungen für die Lage oder Richtung der Teilungslinien gestellt sein. In allen solchen Fällen kann man jede einzelne der gesuchten Teilungslinien als eine solche Linie ansehen, die für sich die gegebene Figur in einem bekannten Verhältnis teilen, also von ihr ein Stück abschneiden soll, das ein bestimmter Teil der ganzen Figur ist. Eine solche Linie läßt sich, wenn man zunächst die sonstigen Bedingungen der Aufgabe unbeachtet läßt, nach den Angaben des § 26 Nr. 5 und 6 konstruieren und man hat dann noch das abgeschnittene Stück in ein andres zu verwandeln, so daß auch den übrigen Bedingungen genügt wird. Die Teilungsaufgaben werden also auf diese Weise auf Verwandlungsaufgaben zurückgeführt. Zuweilen läßt sich auch der umgekehrte Weg einschlagen, daß man zuerst die gegebene Figur in eine andre verwandelt, die so beschaffen ist, daß ihre Teilung durch ein bekanntes Verfahren auch den verlangten Teil der ursprünglichen Figur liefert.

Soll z. B. ein Viereck $ABCD$ in drei gleiche Teile geteilt werden und zwar durch Gerade, die von demselben Eckpunkt A ausgehen, so hat man durch jede der Teilungslinien ein Drittel des Vierecks abzuschneiden. Zieht man die Diagonale BD, teilt diese in drei gleiche Teile BE, EF, FD und zieht die gebrochenen Linien AFC, AEC, so ist durch diese das Viereck $ABCD$ in drei gleiche Teile geteilt. Man hat dann noch jedes der Vierecke $AFCD$, $AECB$ zu verwandeln, so daß statt jener gebrochenen Linien gerade entstehen. Zieht man beispielsweise AC und durch F und E die Parallelen zu AC, die DC in X, BC in Y schneiden, so sind AX und AY die verlangten Teilungslinien. Man kann aber auch nach der andern Methode zuerst $ABCD$ in ein Dreieck verwandeln, dessen Spitze in A und dessen Grundlinie in einer Seite liegt, dann dieses Dreieck durch von A ausgehende Linien in drei gleiche Teile teilen u. s. w.

In der Praxis wendet man noch ein andres Verfahren an, das eine Konstruktion nach vorheriger Messung ist. Hat man nämlich den Flächeninhalt der zu teilenden Figur durch Messung und Rechnung ermittelt, so ergibt sich daraus auch der Inhalt des durch die gesuchte Teilungslinie abzuschneidenden Stückes. Kennt man durch die übrigen Bedingungen dessen Gestalt und Lage so weit, daß man hiernach mittels seines Inhalts die Lage von zur Bestimmung der Teilungslinie dienenden Punkten durch Rechnung ermitteln kann, so läßt sich durch Abtragen der Längen mittels eines Maßstabes die gesuchte Gerade mit hinreichender Annäherung zeichnen. — Ist beispielsweise in der vorstehenden Aufgabe der Teilung eines Vierecks in drei gleiche Teile $DC = 8{,}34\ m$, $CB = 5{,}12\ m$, $AB = 3{,}14\ m$, $AD = 2{,}55\ m$, $AC = 7{,}19\ m$ gemessen, so kann man zunächst den Inhalt jedes der Dreiecke ABC und ACD aus seinen drei Seiten berechnen. Man findet $\triangle ABC = 7{,}0258\ m^2$, $\triangle ACD = 8{,}7164\ m^2$, also den Inhalt des Vierecks $ABCD = 15{,}7422\ m^2$ und mithin den des dritten Teils dieses Vierecks gleich $5{,}2474\ m^2$. Das durch die gesuchte Linie AX abzuschneidende Drittel ADX

wird ein Dreieck, dessen Höhe gleich der zur Grundlinie DC gehörigen des Dreiecks ACD, und dessen Grundlinie der Abschnitt $DX = x$ von DC ist. Jene Höhe ergibt sich aus $DC = 8{,}34$ und dem Inhalt des Dreiecks $ADC = 8{,}7164$ zu $8{,}7164 : 4{,}17 = 2{,}09\ m$; also ist $\frac{1}{2}x \cdot 2{,}09 = 5{,}2474$, woraus $x = 5{,}02\ m$ folgt. Trägt man also mittels eines Maßstabes von DC die Strecke $DX = 5{,}02\ m$ ab und zieht AX, so hat man die eine der gesuchten Teilungslinien gefunden.

2. Konstruktionen von Figuren in und um Figuren. Eine Figur heißt einer andern eingeschrieben, wenn sämtliche Eckpunkte auf dem Umfang der andern liegen; die zweite Figur heißt dann der ersten umschrieben. Ein Kreis ist einer Figur eingeschrieben, wenn er die Begrenzungslinien berührt.

a) Soll eine Figur in eine gegebene Figur konstruiert werden, so ist durch den Umfang der zweiten ein Ort für jeden Eckpunkt der ersten gegeben, und es sind somit diese Eckpunkte und damit die gesuchte Figur gefunden, sobald für jeden ein zweiter Ort aus den Bedingungen der Aufgabe ermittelt ist. Soll beispielsweise in die gemeinschaftliche Fläche von zwei gleichen sich schneidenden Kreisen ein Quadrat beschrieben werden, so muß dessen Mittelpunkt die Centrale halbieren, und diese muß zwei Seiten des Quadrats parallel sein. Daraus folgt, daß die Diagonalen des Quadrates als Gerade, welche die Centrale in deren Halbierungspunkt unter Winkeln von 45^0 schneiden, die noch fehlenden Örter für die vier Eckpunkte sind.

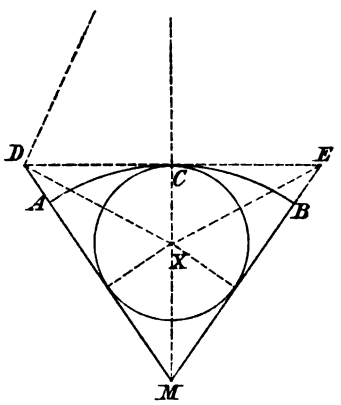


Fig. 154.

Ist dem Kreissektor AMB (Fig. 154) ein Kreis einzuschreiben, so muß der Mittelpunkt X auf der Halbierungslinie des Centriwinkels liegen und der Halbierungspunkt C des Bogens wird der Berührungspunkt auf dem Kreisbogen sein. Legt man in C die gemeinsame Tangente der beiden Kreise, so bestimmt diese mit den Radien MA, MB ein gleichschenkliges Dreieck MDE, dessen Inkreis der gesuchte Kreis ist. Läßt man die erweiterte Auffassung zu, daß der gesuchte Kreis die Radien des Sektors in ihrer Verlängerung berühren darf, so erhält man als zweite Lösung den Ankreis des Dreiecks MDE.

Die Methode der ähnlichen Figuren führt häufig zur Auflösung derartiger Aufgaben. Ist z. B. einem Dreieck ABC (Fig. 155) ein Quadrat einzuschreiben, so daß zwei Ecken auf der Grundlinie AB und die beiden andern auf den Schenkeln des Dreiecks liegen, so kann man zunächst ein Quadrat konstruieren, von dem eine Ecke Q' in AC liegt, während die andre Ecke P' nicht auf CB fällt. Dieses Quadrat ist dem gesuchten ähnlich und liegt mit ihm perspektiv; der Ähnlichkeitspunkt ist A. Die Verbindungslinie von A mit P' liefert also in ihrem Schnittpunkt P mit CB eine Ecke des gesuchten Quadrats, das nunmehr bestimmt ist.

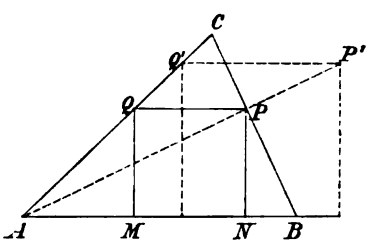


Fig. 155.

Dürfen die Ecken P und Q auch auf den Verlängerungen der Seiten AC und CB über C oder über A und B hinaus liegen, so erhält man noch zwei Auflösungen.

Diese Aufgabe läßt sich dahin erweitern: in eine gegebene Figur eine andre von gegebener Gestalt einzuschreiben, wenn über die Lage der zweiten noch gewisse nähere Bestimmungen getroffen sind. Ist z. B. ein Eckpunkt der einzuschreibenden Figur festgelegt, so führt die folgende Betrachtung häufig zu einer Lösung der Aufgabe.

Durch die Ecke B des Dreiecks ABC (Fig. 156) zieht man eine beliebige Gerade und konstruiert die dem ersten ähnlichen Dreiecke $AB'C'$, $AB''C''$, so daß die entsprechenden Ecken B', B'' auf dieser Geraden liegen. Wegen der Gleichheit der Winkel der Dreiecke ist, wenn man C' mit C uud C'' verbindet, $\angle BAB' = \angle CAC'$, $\angle B'AB'' = \angle C'AC''$ und da

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}, \qquad \frac{AB'}{AB''} = \frac{AC'}{AC''},$$

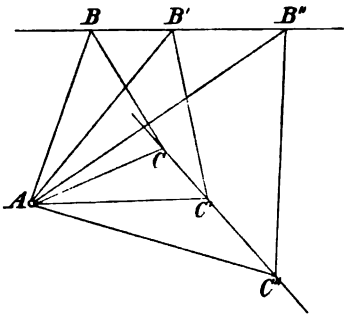


Fig. 156.

so ist auch $\triangle BAB' \sim \triangle CAC'$, $\triangle B'AB'' \sim \triangle C'AC''$, mithin $\angle BB'A = \angle CC'A$, $\angle B''B'A = \angle C''C'A$. Da aber $\angle BB'A + \angle B''B'A = 180^0$ ist, so sind auch $\angle CC'A$ und $\angle C''C'A$ Supplemente und C, C', C'' liegen auf einer Geraden. Man hat also den Satz: Haben ähnliche Dreiecke einen entsprechenden Eckpunkt gemein, während die zweiten entsprechenden Eckpunkte auf einer Geraden liegen, so liegen auch die dritten Eckpunkte auf einer Geraden. Die Erweiterung des Satzes auf ähnliche Vielecke, die ja aus ähnlichen Dreiecken zusammengesetzt werden können, ist einleuchtend. Mit Hilfe dieses Satzes ergibt sich z. B. die Lösung der Aufgabe: in ein Dreieck ABC (Fig. 157) ein gleichseitiges Dreieck einzuschreiben, von dem eine Ecke P auf AB gegeben ist. Konstruiert man zwei beliebige gleichseitige Dreiecke, deren eine Ecke in P liegt, während zwei andre auf AC liegen, so gibt die Verbindungslinie der dritten Eckpunkte M' und M'' auf CB die Ecke M des gesuchten Dreiecks. Die Aufgabe läßt sich sehr verschiedenartig abändern und erweitern.

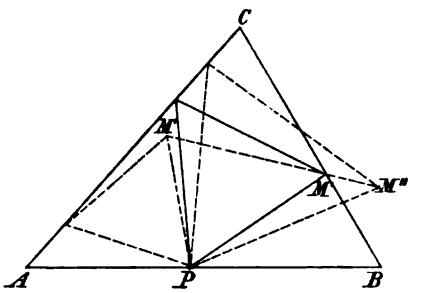


Fig. 157.

b) Soll eine Figur um eine gegebene Figur beschrieben, oder soll, was bei geradlinigen Figuren dasselbe ist, eine Figur gezeichnet werden, deren Seiten durch gegebene Punkte gehen, so sind diese Seiten durch je einen zweiten Punkt oder durch den Winkel, den sie mit einer bekannten Geraden bilden, bestimmt.

Solche Aufgaben lassen sich durch Umkehrung lösen. Hätte man z. B. um ein Dreieck ABC ein Quadrat zu beschreiben, von dem eine Ecke mit A zusammenfällt, während die nicht anstoßenden Quadratseiten durch B und C gehen, so könnte man zunächst in ein beliebiges Quadrat nach a) ein dem gegebenen Dreieck ähnliches einschreiben und zu diesem das gegebene perspektiv legen; dann ist das gesuchte Quadrat dem angenommenen perspektiv. Kürzer ist die direkte Lösung nach folgender Analysis: Sei $ADEF$ das gesuchte Quadrat (Fig. 158) und errichtet man in A auf AB die Senkrechte, welche die verlängerte Quadratseite EF in G schneidet, so ist $\triangle AFG \cong \triangle ADB$, weil beide außer in dem rechten Winkel in $AF = AD$ und in $\angle FAG = \angle BAD$, deren Schenkel senkrecht aufeinander stehen, übereinstimmen. Mithin ist $AG = AB$. Danach ist die Konstruktion leicht. Erweitert man die Aufgabe, wie alle Aufgaben dieser Gruppe dahin, daß man die gesuchte Figur nicht nur als im engern Sinne umschrieben

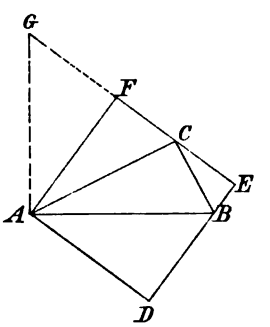


Fig. 158.

verlangt, sondern die Forderung stellt, daß ihre Seiten auch in ihrer Verlängerung durch gegebene Punkte gehen, so haben diese Aufgaben eine größere Anzahl von Lösungen. Errichtet man z. B. in der obigen Aufgabe die Senkrechte $AG = AB$ in entgegengesetztem Sinne wie vorher (Fig. 159), so erhält man das Quadrat $AD'E'F'$, dessen Seiten $D'E'$ und $E'F'$ in ihrer Verlängerung durch B und C gehen.

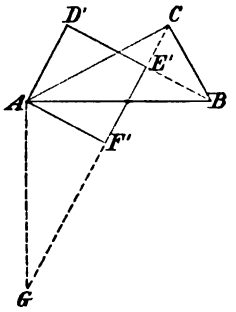


Fig. 159.

Ebenso könnte man entweder durch Umkehrung oder auf direktem Wege die Aufgaben lösen: Ein Quadrat zu konstruieren, dessen Seiten durch vier Punkte einer Geraden oder durch vier beliebige Punkte gehen sollen.

3. Das Apollonische Berührungsproblem der Planimetrie ist die Aufgabe, einen Kreis zu konstruieren, der drei gegebene Kreise berührt. Indem man dabei den Punkt als die Grenze eines Kreises, dessen Radius gleich Null und die Gerade als die Grenze eines Kreises, dessen Radius unendlich groß wird, mit heranzieht, also gestattet, statt eines oder mehrerer der gegebenen Kreise einen Punkt, durch den der gesuchte Kreis gehen, oder eine Gerade, die er berühren soll, zu setzen, erhält man zehn verschiedene Aufgaben.

Sind drei Punkte oder drei Gerade gegeben, so ist die Aufgabe schon gelöst durch den Umkreis oder die Berührungskreise des Dreiecks, das durch die drei Punkte oder die drei Geraden bestimmt ist.

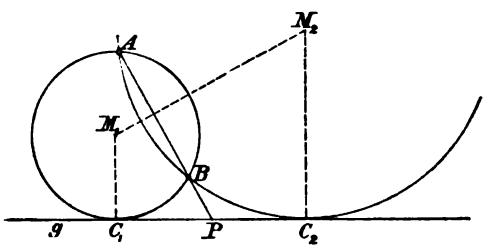


Fig. 160.

Die Aufgabe, einen Kreis zu konstruieren, der durch zwei Punkte A, B geht und die Gerade g berührt (Fig. 160), kann gelöst werden nach folgender Analysis: Der gesuchte Kreis um M berühre g in C; dann muß, wenn AB die Gerade g in P schneidet nach § 29 Nr. 1, $PA \cdot PB = PC^2$, also PC die mittlere Proportionale zu PA und PB sein, die sich nach 3) in § 30 konstruieren läßt. M ist dann bestimmt als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AB mit der in C errichteten Senkrechten. Die Aufgabe ist nur lösbar, wenn P außerhalb des Kreises fällt, also A und B auf derselben Seite von g liegen. Da man PC nach entgegengesetzten Richtungen auf g auftragen kann, gibt es zwei Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2.

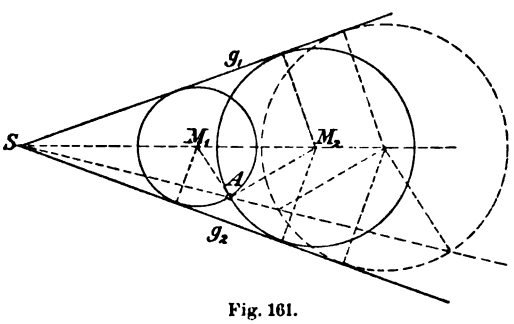


Fig. 161.

Die Aufgabe, einen Kreis zu konstruieren, der durch einen Punkt A geht und zwei sich in S schneidende Gerade g_1, g_2 (Fig. 161) berührt, läßt sich auf die vorige zurückführen. Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises liegt auf der Winkelhalbierenden des Winkelraums der beiden Geraden, der A enthält. Dann muß dieser Kreis auch durch den zu A symmetrisch in Bezug auf die Winkelhalbierende liegenden Punkt gehen. Die Aufgabe läßt sich auch direkt nach der Methode der ähnlichen Figuren lösen. Konstruiert man zunächst einen beliebigen Kreis, der g_1 und g_2 berührt, so muß der gesuchte zu diesem perspektiv liegen

in Bezug auf den Ähnlichkeitspunkt S. Der Ähnlichkeitsstrahl SA bestimmt auf dem Hilfskreis zwei Punkte; zieht man zu den beiden Radien, deren Endpunkte diese beiden Punkte sind, Parallelen durch A, so schneiden diese die Winkelhalbierende in den Mittelpunkten M_1 und M_2 der gesuchten Kreise.

Ist ein Kreis zu konstruieren, der durch zwei Punkte A, B geht und einen gegebenen Kreis mit dem Mittelpunkt K berührt, so möge der Berührungspunkt C sein (Fig. 162). Legt man durch C die gemeinsame Tangente der beiden Kreise, so wird diese durch AB in P geschnitten. Zieht man durch P eine Sekante des Kreises K, die diesen in Q und R schneidet, so ist nach § 29 Nr. 1

$$PC^2 = PA \cdot PB$$

und ebenso

$$PC^2 = PQ \cdot PR \quad ,$$

mithin

$$PA \cdot PB = PQ \cdot PR \quad ;$$

die vier Punkte A, B, Q, R liegen also auf einem Kreise. Konstruiert man einen beliebigen Kreis, der durch A und B geht und K in Q und R schneidet, so ergibt sich P und die beiden Tangenten von P an K liefern zwei Punkte C.

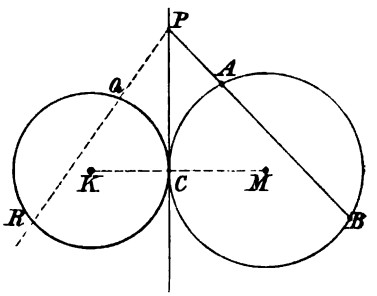


Fig. 162.

Soll ein Kreis konstruiert werden, der durch A geht, die Gerade g und den Kreis K berührt, so nehme man an, der Kreis M gehe durch A, berühre g in B und K außen in C (Fig. 163). Zieht man den zu g senkrechten Durchmesser PQ von K, der g in R schneidet, so ist C innerer Ähnlichkeitspunkt von K und M; es muß also die Verlängerung von BC durch P gehen. Verbindet man C mit Q, so sind die Winkel PCQ und BRQ Rechte, mithin $BCQR$ ein Kreisviereck; folglich ist

$$PB \cdot PC = PQ \cdot PR \quad .$$

Zieht man PA, so schneidet diese Gerade den Kreis M noch in einem zweiten Punkte S und es ist

$$PA \cdot PS = PB \cdot PC \quad ,$$

folglich auch

$$PA \cdot PS = PQ \cdot PR \quad .$$

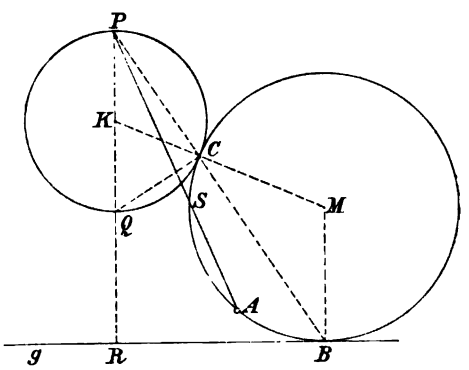


Fig. 163.

S liegt also auf dem durch A, Q, R bestimmten Kreise. Damit ist die Aufgabe auf die zurückgeführt, einen Kreis durch A und S zu legen, der g berührt. In gleicher Weise kann der Fall behandelt werden, daß der gesuchte Kreis den Kreis K innen berührt. Es gibt also höchstens vier Kreise.

Hat man einen Kreis zu konstruieren, der durch einen Punkt geht und zwei Kreise berührt, so möge der Kreis M der gesuchte sein, der durch A geht und die Kreise K_1, K_2 beide von außen in B_1, B_2 berührt (Fig. 164). K_1M muß durch B_1, K_2M durch B_2 gehen; zieht man B_1B_2, so muß diese Gerade K_2 in D schneiden. Verbindet man D mit K_2, so ist $\triangle K_2B_2D$ gleichschenklig, also $\angle K_2B_2D = \angle K_2DB_2$; da aber auch $\triangle MB_1B_2$ gleichschenklig ist, so ist $\angle MB_2B_1 = \angle MB_1B_2$. K_2B_2D und MB_2B_1 sind aber Scheitelwinkel, mithin ist $\angle K_2DB_2 = \angle MB_1B_2$ und K_2D ist parallel K_1B_1. Damit ist bewiesen, daß B_1B_2 die Centrale K_1K_2 in dem äußern Ähnlichkeitspunkt S der beiden Kreise

schneidet. Dann sind aber, wenn die Centrale K_1 in C_1, K_2 in C_2 und E schneidet, B_1C_1 und DE als entsprechende Sehnen der perspektiv liegenden Kreise parallel und daher $\angle DES = \angle B_1C_1S$; es ist aber C_2EDB_2 ein Kreisviereck, also $\angle DES = \angle C_2B_2D$ und mithin $\angle B_1C_1S = \angle C_2B_2D$, also ist auch $B_1C_1C_2B_2$ ein Kreisviereck und

$$SB_1 \cdot SB_2 = SC_1 \cdot SC_2 \quad .$$

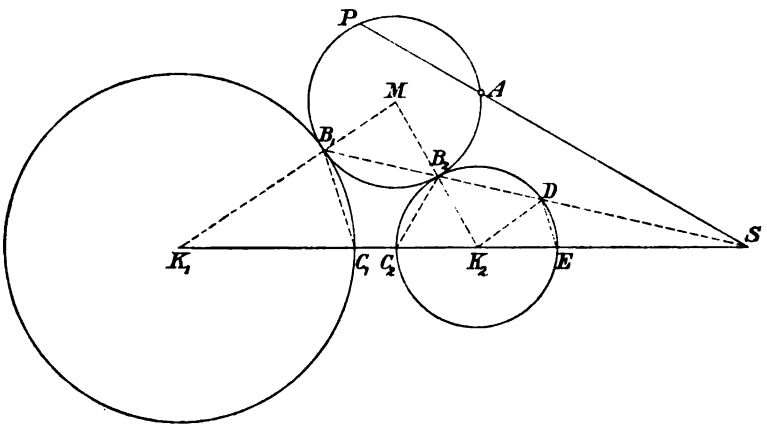


Fig. 164.

Schneidet nun SA den Kreis M nochmals in P, so ist auch

$$SB_1 \cdot SB_2 = SA \cdot SP$$

und daher

$$SA \cdot SP = SC_1 \cdot SC_2 \quad .$$

P liegt also auf dem durch A, C_1, C_2 bestimmten Kreise und die Aufgabe ist darauf zurückgeführt, einen Kreis zu konstruieren, der durch A und P geht und einen Kreis, K_1 oder K_2 berührt. Diese Aufgabe kann bis zu vier Lösungen haben, da M die Kreise K_1, K_2 entweder gleichartig oder ungleichartig berühren kann.

Die drei Berührungsaufgaben, bei denen kein Punkt gegeben ist, sondern entweder zwei Gerade und ein Kreis oder eine Gerade und zwei Kreise oder drei Kreise lassen sich auf die vorigen zurückführen, wenn man sich zu dem gesuchten Kreis einen konzentrischen denkt, der durch den Mittelpunkt eines der gegebenen Kreise geht. Dieser berührt eine Gerade, die parallel der gegebenen im Abstand des Radius eines der gegebenen Kreise gezogen wird und einen Hilfskreis um den Mittelpunkt eines der gegebenen Kreise mit einem Radius gleich der Summe oder Differenz der Radien von zweien dieser Kreise. Damit wird die Aufgabe auf eine solche zurückgeführt, bei der statt eines Kreises ein Punkt gegeben ist; also die zuletzt angeführten drei Aufgaben auf die, bei denen gegeben sind: zwei Gerade und ein Punkt, oder eine Gerade, ein Kreis und ein Punkt, oder zwei Kreise und ein Punkt. Diese drei Aufgaben können daher bis zu acht Auflösungen haben. Eine allgemeine Auflösung des Problems wird mit weitern Hilfsmitteln in § 50 Nr. 4 gegeben.

Siebenter Abschnitt.

Die merkwürdigen Punkte, Geraden und Kreise des Dreiecks.

§ 43. Beziehungen des Dreiecks zum Umkreis, zum Inkreis und zu den Ankreisen.

1. Im Dreieck ABC (Fig. 165) mögen die Seiten und Winkel in der üblichen schematischen Weise bezeichnet sein. Es kann dabei $a > b$ vorausgesetzt werden. Es sei ferner die Höhe auf der Seite c : $CC' = h$. Man beschreibt den Umkreis des Dreiecks mit dem Mittelpunkt M und zieht den zu AB senkrechten Durchmesser, der AB in C_0 und die zu AB gehörigen Bogen in C_1 und C_2 halbiert.

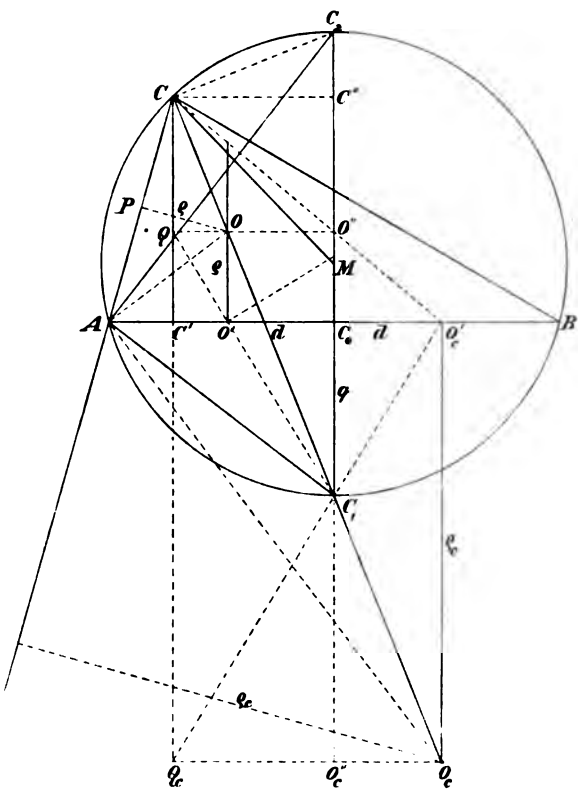


Fig. 165.

Jede Seite des Dreiecks ist Sehne des Kreises und der gegenüberliegende Winkel ist ein zu der Sehne gehöriger Peripheriewinkel. Würde man zwei Eckpunkte B und C mit M verbinden, so wäre $\angle BMC = 2\alpha$ und die Mittelsenkrechte von BC würde $\angle BMC$ halbieren; also ist $\angle MCB = 90^0 - \alpha$, folglich $\angle MCC' = 90^0 - \beta - (90^0 - \alpha) = \alpha - \beta$. Da auch $\angle ACC' = 90^0 - \alpha$ ist, so hat man den Satz: Die Höhe und der Radius des Umkreises nach der Spitze bilden mit den anstoßenden Dreiecksseiten gleiche Winkel und der Winkel, den sie miteinander bilden, ist gleich der Differenz der Winkel an der Grundlinie. Verbindet man C mit C_1, so ist CC_1 die Halbierungslinie von γ, weil auf den gleichen Bogen AC_1 und C_1B gleiche Peripheriewinkel, jeder

gleich $\frac{1}{2}\gamma$, stehen. Dann wird auch $\angle MCC'$ durch CC_1 halbiert und es ist $\angle C'CC_1 = \angle MCC_1 = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Die halbe Differenz von α und β möge mit δ bezeichnet werden. Dann ist auch $\angle MC_1C = \delta$.

Auf CC_1 liegt der Mittelpunkt O des Inkreises, den man erhält, wenn man noch α durch AO halbiert. Verbindet man A mit C_1, so ist $\angle C_1AB = \frac{1}{2}\gamma$, also $\angle C_1AO = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma$; es ist aber auch der Außenwinkel des Dreiecks AOC, $\angle AOC_1 = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma$, folglich $\angle C_1AO = \angle AOC_1$: also ist $\triangle AOC_1$ gleichschenklig und $AC_1 = OC_1$. Man erhält also den Mittelpunkt O des Inkreises ohne noch den Winkel α halbieren zu müssen, indem man AC_1 von C_1 aus, auf CC_1 aufträgt. Es ist dann die von O auf AB gefällte Senkrechte $OO' = \varrho$ der Radius des Inkreises. Fällt man auch von O auf die beiden andern Dreiecksseiten Senkrechte, so müssen beide ebenfalls gleich ϱ sein und man kann um O den Inkreis beschreiben, der die Seiten des Dreiecks in den Fußpunkten der drei Senkrechten berührt.

Auf der Verlängerung von CC_1 liegt auch der Mittelpunkt O_c des zur Seite c gehörigen Ankreises des Dreiecks, den man erhalten würde, wenn man auf AO in A die Senkrechte errichtete, die den Außenwinkel bei A halbieren muß. Dann ist aber $\triangle OAO_c$ bei A rechtwinklig und da $AC_1 = OC_1$ ist, so ist C_1 der Mittelpunkt des über OO_c beschriebenen Halbkreises, mithin auch $O_cC_1 = AC_1$. Man erhält also auch O_c, wenn man AC_1 auf der Verlängerung von CC_1 aufträgt. Der Halbierungspunkt C_1 des Bogens AB des Umkreises halbiert demnach OO_c. Die von O_c auf AB gefällte Senkrechte $O_cO_c' = \varrho_c$ ist der Radius des Ankreises, der die Seite AB in O_c' und die Verlängerungen der beiden andern Seiten in den Fußpunkten der von O_c auf diese gefällten Senkrechten berührt.

Da C_1 der Mittelpunkt von OO_c ist, so ist $O'C_0 = C_0O_c'$; O' und O_c' liegen also symmetrisch zu C_0. Nach § 28 Nr. 3 ist $AO' = s - a$, wenn $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$, dann hat man $O'C_0 = C_0O_c' = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}(b + c - a) = \frac{1}{2}(a - b)$. Bezeichnet man diese halbe Differenz der an A und B anliegenden Seiten mit d, so ist $O'C_0 = C_0O_c' = d$. Ferner ist, wenn man durch O die Parallele zu AB zieht, die C_1C_2 in O'' schneidet, $C_1C_0 = \frac{1}{2}(\varrho_c - \varrho)$, was durch q bezeichnet werden möge und $C_1O'' = q + \varrho = \frac{1}{2}(\varrho_c + \varrho)$.

Ist der Winkel γ spitz wie in Figur 165, so ist $q < r$ und M fällt innerhalb des Dreiecks; ist $\gamma = 90^0$, so ist AB der zu C_1C_2 senkrechte Durchmesser des Kreises, also $q = r$; ist γ stumpf, so ist $q > r$ und M liegt außerhalb des Dreiecks.

2. Die in Nr. 1 entwickelten Beziehungen geben eine bequeme Lösung zahlreicher Konstruktionsaufgaben eines Dreiecks aus drei Bestimmungsstücken. Ist der Radius r des Umkreises und $q = \frac{1}{2}(\varrho_c - \varrho)$ gegeben, so ist dadurch die Seite c und der Winkel γ bestimmt. Es bedarf also noch der Angabe eines unabhängigen Stückes, um die Spitze C des Dreiecks zu finden, das unter der nicht beschränkenden Voraussetzung $a > b$ eindeutig bestimmt ist. So lassen sich die Aufgaben lösen: Ein Dreieck zu konstruieren aus dem Radius r des Umkreises und $q = \frac{1}{2}(\varrho_c - \varrho)$, wenn außerdem gegeben ist:

1) Eine Seite a oder b; 2) ein Winkel α oder β; 3) die Höhe h auf der Seite c; 4) ein Höhenabschnitt AC' oder BC' der Seite c; 5) $\delta = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$; 6) $d = \frac{1}{2}(a - b)$; 7) $AO' = \frac{1}{2}(b + c - a)$ oder $BO' = \frac{1}{2}(a + c - b)$; 8) ϱ oder ϱ_c, welche Aufgabe identisch ist mit der, bei der außer r noch ϱ und ϱ_c bekannt sind.

Statt q kann auch γ gegeben sein, denn man kann entweder diesen Winkel an einen Durchmesser C_1C_2 des Umkreises in M antragen oder das rechtwinklige Dreieck C_1AC_2 mit dem Winkel $AC_2C_1 = \frac{1}{2}\gamma$ konstruieren, womit in beiden Fällen q bestimmt ist.

Ist außer dem Umkreis des Dreiecks die Seite c gegeben, so ist das Dreieck im allgemeinen zweideutig bestimmt, weil jeder der beiden Abschnitte des auf AB, das man als Sehne in den Umkreis eintragen kann, senkrechten Durchmessers

als das zugehörige q zu betrachten ist, also γ spitz oder stumpf wird. Selbstverständlich muß $c < 2r$ sein, bei $c = 2r$ würde man ein rechtwinkliges Dreieck erhalten. Die Aufgaben, bei denen außer r und c noch eins der vorigen Bestimmungsstücke gegeben sind, lassen sich auf die obigen zurückführen, bedürfen aber einer Determination.

Durch r und δ ist das rechtwinklige Dreieck C_1CC_2 bestimmt, mithin auch dessen Höhe CC''. Ist dann noch h gegeben und macht man $C''C_0 = h$, so ist das Dreieck gefunden. Kennt man außer r und δ noch d und trägt dies von C'' aus auf CC'' auf, so gibt die Parallele zu C_1C_2 durch den Endpunkt auf CC_1 als Schnittpunkt O. Ein Kreisbogen um C_1 mit dem Radius C_1O gibt dann die Schnittpunkte A und B mit dem Umkreis.

Sind c und q gegeben, so kann man das rechtwinklige Dreieck AC_0C_1 aus den Katheten $\frac{1}{2}c$ und q und dann das rechtwinklige Dreieck C_1AC_2 konstruieren, dessen Hypotenuse $C_1C_2 = 2r$ ist. Durch ein drittes Bestimmungsstück wie δ, d, h, ϱ oder ϱ_c wird dann die Aufgabe auf die frühern, wo r gegeben war, zurückgeführt. Das rechtwinklige Dreieck AC_0C_1 ist auch bestimmt durch c und γ, sowie durch q und γ.

Durch d und δ ist das rechtwinklige Dreieck $OO''C_1$ bestimmt. Ist dann durch ein drittes Stück ein geometrischer Ort für A herzustellen, so ist A als Schnittpunkt dieses Ortes und des um C_1 mit OC_1 beschriebenen Kreisbogens gefunden. Damit hat man wieder das rechtwinklige Dreieck AC_0C_1 und der Umkreis liefert die Spitze C. So kann man das Dreieck konstruieren, wenn außer d und δ noch gegeben ist: q oder ϱ oder c.

Das Dreieck ABC kann auf dieselbe Art mittels des rechtwinkligen Dreiecks $OO'C_1$ gefunden werden, wenn q und ϱ oder, was dasselbe ist, ϱ und ϱ_c, außerdem δ oder d gegeben ist.

3. Die Verlängerung von $O'O$ schneidet CC' in Q und die Parallele durch O_c zu AB schneidet die Verlängerungen von CC' und C_2C_1 in Q_c und O_c'. Fällt man von O und O_c die Senkrechten auf eine der Seiten AC oder CB, so sind die rechtwinkligen Dreiecke mit dem Winkel $\frac{1}{2}\gamma$ und den gegenüberliegenden Katheten ϱ und ϱ_c dem Dreieck AC_0C_1 ähnlich. Mithin hat man:

$$\frac{CO}{AC_1} = \frac{\varrho}{q}, \qquad \frac{CO_c}{AC_1} = \frac{\varrho_c}{q},$$

oder da $AC_1 = OC_1 = O_cC_1$ ist:

$$1) \qquad \frac{CO}{OC_1} = \frac{\varrho}{q}, \qquad \frac{CO_c}{O_cC_1} = \frac{\varrho_c}{q}.$$

Nun ist auch $\triangle CQO \sim \triangle C_1O'O$ und $\triangle CQ_cO_c \sim \triangle C_1O_c'O_c$, daher

$$\frac{QO}{O''O} = \frac{CO}{OC_1} = \frac{\varrho}{q}, \qquad \frac{Q_cO_c}{O_c'O_c} = \frac{CO_c}{O_cC_1} = \frac{\varrho_c}{q};$$

wofür man wegen $O''O = O'C_0$, $O_c'O_c = O_c'C_0$ schreiben kann:

$$\frac{QO}{O'C_0} = \frac{\varrho}{q}, \qquad \frac{Q_cO_c}{O_c'C_0} = \frac{\varrho_c}{q}.$$

Daraus folgt, daß $\triangle QOO' \sim \triangle O'C_0C_1$ und $\triangle Q_cO_cO_c' \sim \triangle O_c'C_0C_1$ ist und daß C_1, O', Q wie C_1, O_c', Q_c auf einer Geraden liegen. Daraus ergibt sich weiter:

$$\frac{QO''}{O''C_1} = \frac{O'C_0}{C_0C_1}.$$

Es ist $\angle C_2CC'' = \frac{1}{2}\gamma$ und daher $\triangle CC''C_2 \sim \triangle C_1O''O$, woraus folgt:

$$\frac{C_2C''}{OO''} = \frac{CC''}{C_1O''} = \frac{QO'}{O''C_1} = \frac{O'C_0}{C_0C_1}, \qquad \frac{C_2C''}{d} = \frac{d}{q}, \qquad C_2C'' = \frac{d^2}{q}.$$

Der letzte Ausdruck läßt sich konstruieren, wenn man in O' die Senkrechte auf $O'C_1$ errichtet; der Abschnitt, den die Senkrechte auf C_1C_2 bildet, von C_0 an gerechnet, ist dann $d^2 : q$. Nun ist $C_2C'' = 2r - q - h$, also erhält man:

$$2) \qquad 2r - q - h = \frac{d^2}{q}, \quad h = 2r - q - \frac{d^2}{q}, \quad q + h = 2r - \frac{d^2}{q} .$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CQO und $C_1O'O$ folgt noch:

$$\frac{CQ}{O'C_1} = \frac{CO}{OC_1}, \qquad \frac{h - \varrho}{q + \varrho} = \frac{\varrho}{q}, \qquad \frac{h - \varrho}{\varrho} = \frac{q + \varrho}{q} ;$$

die letzte Proportion läßt sich verwandeln in

$$\frac{h - 2\varrho}{\varrho} = \frac{\varrho}{q} ,$$

woraus sich ergibt

$$3) \qquad h - 2\varrho = \frac{\varrho^2}{q}, \qquad h = 2\varrho + \frac{\varrho^2}{q} .$$

Hieraus ersieht man, daß h, ϱ, q oder was dasselbe ist h, ϱ, ϱ_c nicht unabhängige Bestimmungsstücke des Dreiecks sind.

Der Eckpunkt C ist der Ähnlichkeitspunkt (§ 36 Nr. 2) des Inkreises und des Ankreises der Seite c. Bestimmt man daher zu O' den Diametralpunkt des Inkreises, so muß dieser auf dem Ähnlichkeitsstrahl CO'_c liegen; ebenso muß die Verlängerung von CO' durch den Diametralpunkt von O'_c des Ankreises gehen.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck C_1AC_2 findet man:

$$4) \qquad AC_1^2 = C_1C_2 \cdot C_1C_0 = 2rq ,$$

oder da $AC_1 = OC_1 = O_cC_1$

$$5) \qquad OC_1^2 = O_cC_1^2 = 2rq .$$

Durch Multiplikation mit den Gleichungen 1) erhält man

$$CO \cdot OC_1 = 2r\varrho, \qquad CO_c \cdot O_cC_1 = 2r\varrho_c .$$

Nun ist $CO \cdot OC_1$ der absolute Wert der Potenz von O und $CO_c \cdot O_cC_1$ die Potenz von O_c in Bezug auf den Umkreis des Dreiecks (§ 29 Nr. 1): sind also die Entfernungen dieser Punkte von M: $OM = e$, $O_cM = e_c$, so ist

$$e^2 - r^2 = -2r\varrho, \qquad e_c^2 - r^2 = 2r\varrho_c$$

und daraus folgt

$$6) \qquad e = \sqrt{r^2 - 2r\varrho}, \qquad e_c = \sqrt{r^2 + 2r\varrho_c} .$$

Aus der Formel für e erkennt man, daß im allgemeinen $r > 2\varrho$ sein muß: beim gleichseitigen Dreieck ist $r = 2\varrho$ und $e = 0$.

Der Kreisbogen, der um C_1 mit C_1A beschrieben wird und der durch O und B geht (Fig. 166), schneidet auf CB die Strecke $CD = AC = b$ ab, so daß $DB = a - b = 2d$ ist. Fällt man auf die Sehne DB dieses Kreisbogens die Senkrechte C_1E, so ist $DE = EB = \frac{1}{2}(a - b) = d$ und $CE = a - d = b + d = \frac{1}{2}(a + b)$. Da $\triangle C_1ED \sim \triangle C_1O''O$ (Fig. 165 S. 371) sein muß, so ist $\angle DC_1E = OC_1O' = \delta$ und $C_1E = C_1O'' = q + \varrho$. Es ist aber $CEC_1 \sim \triangle AC_0C_1$, also wenn man $\frac{1}{2}(a + b) = m$ einführt:

$$\frac{CE}{AC_0} = \frac{EC}{C_0C_1}, \qquad \frac{m}{\frac{1}{2}c} = \frac{q + \varrho}{q}$$

und daher

$$7) \qquad m = \tfrac{1}{2}c \cdot \frac{q + \varrho}{q} .$$

Verlängert man AC um CB bis F, so daß $AF = a + b$ wird, so ist in dem gleichschenkligen Dreieck BCF der Basiswinkel $CFB = \frac{1}{2}\gamma$; da nun $\angle AC_2B = \gamma$, $\angle AC_2C_0 = \frac{1}{2}\gamma$ ist, so liegt F auf einem Kreise mit dem Radius C_2A um den Mittelpunkt C_2 und die von C_2 auf die Sehne AF dieses Kreises gefällte Senkrechte C_2G halbiert diese Sehne, mithin ist $AG = \frac{1}{2}(a+b) = m$, $CG = \frac{1}{2}(a-b) = d$. In dem rechtwinkligen Dreieck AGC_2 ist $\angle GAC_2 = \angle CC_1C_2 = \delta$ und in dem rechtwinkligen Dreieck CGC_2 ist $\angle CC_2G = \frac{1}{2}\gamma$.

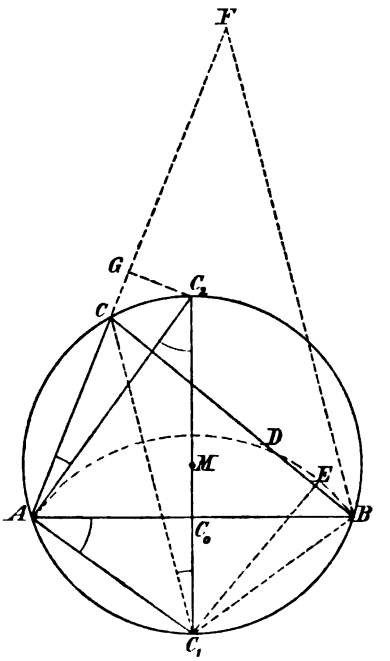


Fig. 166.

Durch diese beiden Konstruktionen erhält man rechtwinklige Dreiecke, die m und d und die Winkel $\frac{1}{2}\gamma$ und δ enthalten.

4. Die Beziehungen in Nr. 3 geben wieder die Möglichkeit, Konstruktionsaufgaben zu lösen. Aus der großen Zahl solcher Aufgaben sollen nur einige als Beispiele herausgegriffen und deren Lösungen angedeutet werden.

Durch q und d ist das Dreieck $O'C_0C_1$ (Fig. 165) bestimmt: ist dann noch ϱ gegeben, so erhält man den Punkt Q der Höhe, womit die Spitze C gefunden werden kann.

Ist außer q und d noch h gegeben, so konstruiere man $d^2 : q$ und erhält dann

$$2r = q + \frac{d^2}{q} + h \quad ,$$

womit die Aufgabe auf eine in Nr. 2 behandelte zurückgeführt ist.

Kennt man umgekehrt r, d, h, so kann man aus

$$q + \frac{d^2}{q} = 2r - h\,, \qquad q \cdot \frac{d^2}{q} = d^2$$

q und $d^2 : q$ bestimmen. Man trägt auf einem Durchmesser C_1C_2 des gegebenen Umkreises von C_2 aus h ab, schlägt über der Strecke $2r - h$ den Halbkreis, zieht in der Entfernung d eine Parallele zu C_1C_2, die den Halbkreis in zwei Punkten schneidet. Die Senkrechten von den Schnittpunkten auf den Durchmesser des Halbkreises teilen diesen in q und $d^2 : q$. Da man beide vertauschen darf, so ist die Aufgabe zweideutig.

Um das Dreieck aus ϱ, h, δ zu konstruieren, kann man $C'C = h$ senkrecht zu einer beliebigen Geraden errichten und $C'Q = \varrho$ auf der Senkrechten auftragen. Dann ist durch $CQ = h - \varrho$ und $\angle QCO = \delta$ das rechtwinklige Dreieck CQO bestimmt und damit OO'. Der Schnittpunkt von CO und QO' gibt C_1.

Ist ϱ, h, d gegeben, so ist durch ϱ und d das Dreieck $OO'C_0$ und auf der Verlängerung von $O'C_0$ der Punkt O'_c bestimmt. Trägt man auf $O'O$ von O' aus h ab, zieht durch den Endpunkt von h die Parallele zu $O'C_0$ und durch O'_c die Parallele zu OC_0, so ist der Schnittpunkt der Parallelen die Spitze C und CO schneidet die Senkrechte in C_0 zu $O'O'_c$ in C_1.

Sind von einem Dreieck r und ϱ gegeben, so kann man $e = \sqrt{r^2 - 2r\varrho}$ als mittlere Proportionale zu r und $r - 2\varrho$ konstruieren; damit erhält man für O als geometrischen Ort den mit e um O beschriebenen Kreis. Gibt ein drittes Bestimmungsstück einen zweiten Ort für O, so ist das Dreieck bestimmt und zwar im allgemeinen zweideutig. Ist dieses dritte Stück d, so ist der

zweite Ort die in der Entfernung d von dem beliebigen Durchmesser C_1C_2 des Umkreises gezogene Parallele. Ist δ gegeben, so ist dadurch C_1C bestimmt, welche Gerade durch O gehen muß.

In allen diesen Aufgaben kann statt ϱ auch ϱ_c gegeben sein, wodurch sich die Lösung nicht wesentlich abändert.

Ist die Summe der Seiten a und b also auch m bekannt, so ist durch m und γ das Dreieck AC_1E und $C_1E = q + \varrho$, durch m und δ das Dreieck AGC_2 bestimmt. So kann man ein Dreieck konstruieren aus m, γ, ϱ oder ϱ_c; m, δ, c.

Die in Nr. 3 entwickelten Formeln dienen auch zu Berechnung gesuchter Stücke eines durch Konstruktion erhaltenen Dreiecks. Ist z. B. r, ϱ, q gegeben, so hat man nach 3)

$$h = 2\varrho + \frac{\varrho^2}{q} = \frac{2q\varrho + \varrho^2}{q} = \frac{(q+\varrho)^2 - q^2}{q} \quad .$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck C_1AC_2 (Fig. 165 S. 371) erhält man:

$$\tfrac{1}{2}c = \sqrt{q(2r - q)} = \sqrt{2rq - q^2}$$

und nun gibt 1)

$$\tfrac{1}{2}(a+b) = \tfrac{1}{2}c \cdot \frac{q+\varrho}{q} = \frac{q+\varrho}{q}\sqrt{2rq - q^2} \quad .$$

Das rechtwinklige Dreieck $OO''C_1$, in dem $OO' = d$ und $OC_1 = AC_1 = \sqrt{2rq}$ ist, liefert

$$d = \tfrac{1}{2}(a-b) = \sqrt{2rq - (q+\varrho)^2} \quad .$$

Durch $\frac{1}{2}(a+b)$ und $\frac{1}{2}(a-b)$ sind a und b bestimmt, ebenso der Inhalt F aus $\frac{1}{2}c$ und h. Ersetzt man q durch seinen Wert $\frac{1}{2}(\varrho_c - \varrho)$, so erhält man die eben berechneten Stücke durch r, ϱ, ϱ_c ausgedrückt:

$$h = \frac{2\varrho_c\varrho}{\varrho_c - \varrho} \quad ,$$

$$c = \sqrt{4r(\varrho_c - \varrho) - (\varrho_c - \varrho)^2} \quad ,$$

$$a + b = \frac{\varrho_c + \varrho}{\varrho_c - \varrho}\sqrt{4r(\varrho_c - \varrho) - (\varrho_c - \varrho)^2} \quad ,$$

$$a - b = \sqrt{4r(\varrho_c - \varrho) - (\varrho_c + \varrho)^2} \quad .$$

Ist r, d, h gegeben, so findet man a und b aus der Beziehung (§ 29 Nr. 2)

$$ab = 2rh$$

und der gegebenen

$$\tfrac{1}{2}(a-b) = d \quad ,$$

nämlich

$$\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} = \sqrt{2rh + d^2} \pm d \quad .$$

Aus der quadratischen Gleichung:

$$q + \frac{d^2}{q} = 2r - h$$

ergibt sich

$$q = \tfrac{1}{2}(2r - h \pm w), \qquad w = \sqrt{(2r-h)^2 - 4d^2}$$

und daraus

$$c = 2\sqrt{q(2r - q)} = \sqrt{(2r - h \pm w)(2r + h \mp w)} \quad .$$

Die rechtwinkligen Dreiecke $AO'O$ und $O_cO_c'A$ (Fig. 165 S. 371) sind ähnlich, weil die Schenkel der spitzen Winkel OAO' und AO_cO_c' aufeinander senkrecht stehen und da $AO' = s - a$, $AO_c' = BO' = s - b$ ist, so erhält man

$$\frac{\varrho}{s-a} = \frac{s-b}{\varrho_c}, \qquad \varrho_c\varrho = (s-a)(s-b) \quad .$$

Aus der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke CPO und AC_0C_1 folgt:

$$\frac{\varrho}{\frac{1}{2}(\varrho_c - \varrho)} = \frac{s-c}{\frac{1}{2}c}, \qquad \frac{\varrho}{\varrho_c - \varrho} = \frac{s-c}{c},$$

welche Proportion sich umändern läßt in

$$\frac{\varrho}{\varrho_c} = \frac{s-c}{s}.$$

Durch Multiplikation und Division dieser Gleichung und der für $\varrho_c \varrho$ erhält man

$$\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}, \qquad \varrho_c = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)}{s-c}}.$$

Nach § 24 Nr. 5 ist nun der Inhalt des Dreiecks

$$F = s\varrho = (s-c)\varrho_c = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Diese Formel ist die Heronische Dreiecksformel (§ 28 Nr. 3).

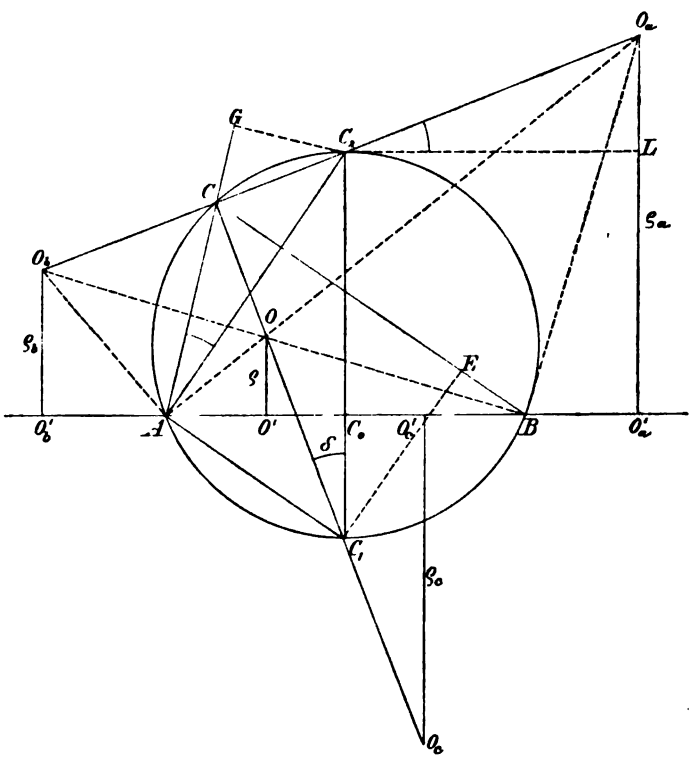


Fig. 167.

5. Beschreibt man um das Dreieck ABC den Umkreis und zieht den zu AB senkrechten Durchmesser C_1C_2, der AB in C_0 halbiert (Fig. 167), so ist auf der Halbierungslinie CC_1 des Winkels γ der Mittelpunkt O des Inkreises zu bestimmen, indem man $OC_1 = AC_1$ macht. Ist O' der Berührungspunkt des Inkreises und macht man $C_0O_c' = O'C_0$, so ist O_c' der Berührungspunkt des Ankreises der Seite c. Es ist dann $AO_c' = BO' = s - b$ und $BO_c' = AO' = s - a$. Nun ist CC_2 die Halbierungslinie des Außenwinkels bei C, weil CC_2 auf CC_1 senkrecht ist. Die Halbierungslinie AO und BO der Innenwinkel α und β

schneiden die Verlängerung von CC_2 in O_a und O_b, den Mittelpunkten der Ankreise der Seiten a und b. Fällt man von O_a und O_b die Senkrechten $O_aO'_a$ und $O_bO'_b$, auf die Verlängerung von c, so sind $O_aO'_a = \varrho_a$, $O_bO'_b = \varrho_b$ die Radien der Ankreise und O'_a, O'_b die Berührungspunkte auf c. Der Berührungspunkt des Ankreises einer Seite teilt aber, wie bei dem Ankreise von c gezeigt wurde, die Seite im umgekehrten Verhältnis wie der Berührungspunkt des Inkreises. Daher muß $O'_aB = O'_bA = s - c$ und $AO'_a = BO'_b = c + s - c = s$ sein. Daraus folgt weiter:

$$C_0O'_a = C_0O'_b = \tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{2}(a + b - c) = \tfrac{1}{2}(a + b) \quad ,$$

$$O'O'_a = O'_cO'_b = \tfrac{1}{2}(a + b) + \tfrac{1}{2}(a - b) = a \quad ,$$

$$O'O'_b = O'_cO'_a = \tfrac{1}{2}(a + b) - \tfrac{1}{2}(a - b) = b \quad .$$

Da C_0 der Mittelpunkt von $O'_aO'_b$ ist, so wird auch O_aO_b durch C_2 halbiert. Zieht man O_bA, so ist O_aAO_b ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse O_aO_b und da C_2 ihr Mittelpunkt ist, so ist $C_2A = C_2O_a = C_2O_b$. Man erhält also O_a und O_b indem man C_2A auf die Verlängerung von CC_2 von C_2 aus nach beiden Seiten abträgt.

In dem Trapez $O_aO'_aO'_bO_b$ ist C_0C_2 die Mittelparallele, also

$$C_0C_2 = \tfrac{1}{2}(\varrho_a + \varrho_b) \quad .$$

Da nun $C_0C_1 = \frac{1}{2}(\varrho_c - \varrho)$ ist, so ergibt sich die bemerkenswerte Beziehung

$$\tfrac{1}{2}(\varrho_a + \varrho_b) + \tfrac{1}{2}(\varrho_c - \varrho) = 2r$$

oder

$$8) \qquad \varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = 4r \quad .$$

$AC_0 = \frac{1}{2}c$ ist mittlere Proportionale zu C_0C_2 und C_0C_1 also ist

$$c^2 = (\varrho_a + \varrho_b)(\varrho_c - \varrho) \quad ,$$

oder mit Berücksichtigung von 8)

$$9) \qquad c = \sqrt{4r(\varrho_a + \varrho_b) - (\varrho_a + \varrho_b)^2} \quad .$$

Die Schenkel von $\angle BO_aO'_a$ stehen senkrecht auf denen von $\angle O_bBO'_b$, daher sind die rechtwinkligen Dreiecke $O_aO'_aB$ und BO'_bO_b ähnlich und es ist:

$$\frac{\varrho_a}{s - c} = \frac{s}{\varrho_b}, \quad \varrho_a\varrho_b = s(s - c) \quad .$$

Multipliziert man diese Gleichung mit der in Nr. 4 erhaltenen

$$\varrho_c\varrho = (s - a)(s - b) \quad ,$$

so erhält man:

$$\varrho\varrho_a\varrho_b\varrho_c = s(s - a)(s - b)(s - c) = F^2$$

in Übereinstimmung mit § 28 Nr. 3. Die Addition beider Gleichungen ergibt:

$$ab = \varrho_a\varrho_b + \varrho_c\varrho \quad .$$

Zieht man in Fig. 167 die Parallele zu AB durch C_2, die ϱ_a in L schneidet, so ist $\angle O_aC_2L = \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \delta$ und $O_aL = \frac{1}{2}(\varrho_a - \varrho_b)$. Fällt man von C_2 die Senkrechte C_2G (vgl. Fig. 166) auf die Verlängerung von AC, so ist $\triangle C_2LO_a \sim \triangle AGC_2$, mithin ist auch $C_2G = \frac{1}{2}(\varrho_a - \varrho_b)$. Es ist weiter $\angle C_2LO_a \sim \angle C_1O''O$ und daher, weil $C_1O'' = \frac{1}{2}(\varrho_c + \varrho)$ ist

$$\frac{\frac{1}{2}(a + b)}{\frac{1}{2}(\varrho_a - \varrho_b)} = \frac{\frac{1}{2}(\varrho_c + \varrho)}{\frac{1}{2}(a - b)}$$

oder

$$a^2 - b^2 = (\varrho_a - \varrho_b)(\varrho_c + \varrho) \quad .$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck C_2LO_a ergibt noch der pythagoreische Lehrsatz

$$\tfrac{1}{4}(a+b)^2 = C_2O_a^2 - \tfrac{1}{4}(\varrho_a - \varrho_b)^2 \quad ,$$

und da

$$C_2O_a^2 = C_2A^2 = r(\varrho_a + \varrho_b)$$

ist, erhält man

$$a+b = \sqrt{4r(\varrho_a+\varrho_b) - (\varrho_a-\varrho_b)^2} \quad .$$

Die Ähnlichkeit der Dreiecke CGC_2 und AC_0C_2 ergibt noch:

$$\frac{\frac{1}{2}(a-b)}{C_2G} = \frac{\frac{1}{2}c}{C_0C_2} \quad ,$$

woraus folgt:

$$a-b = c\,\frac{\varrho_a-\varrho_b}{\varrho_a+\varrho_b} = \frac{\varrho_a-\varrho_b}{\varrho_a+\varrho_b}\sqrt{4r(\varrho_a+\varrho_b) - (\varrho_a+\varrho_b)^2} \quad .$$

Auch die hier abgeleiten Beziehungen dienen zur Lösung vieler Konstruktions- und Rechenaufgaben, bei denen als Bestimmungsstücke Radien der Ankreise, sowie deren Summe oder Differenz gegeben sind.

§ 44. Der Höhenschnittpunkt und der Schwerpunkt des Dreiecks.

1. Es seien AA', BB', CC', die drei Höhen eines Dreiecks ABC (Fig. 168) und H ihr Schnittpunkt. Der Höhenschnittpunkt teilt jede Höhe in zwei Abschnitte: der an der Ecke anliegende heißt der obere, der an die Seite anstoßende ist der untere Höhenabschnitt. Da die Winkel $AA'B$ und $BB'A$ rechte sind, so folgt, daß der über einer Seite eines Dreiecks als Durchmesser beschriebene Kreis durch die Fußpunkte der auf den andern Seiten stehenden Höhen geht.

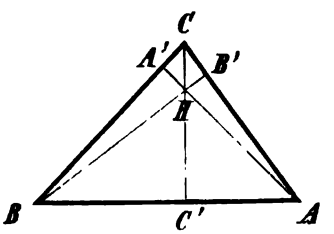


Fig. 168a.

Für die einander in H schneidenden Sehnen BB', AA' und ebenso für die einander in C schneidenden BA', AB' ergibt sich hieraus

$$BH \cdot HB' = AH \cdot HA' \; (= CH \cdot HC')$$

und

$$CA' \cdot CB = CB' \cdot CA$$

oder

$$CA : CB = CA' : CB'$$

d. h. die Produkte der beiden Abschnitte der Höhen eines Dreiecks sind einander gleich, und zwei Seiten eines Dreiecks verhalten sich zueinander umgekehrt wie ihre dem gemeinschaftlichen Eckpunkt anliegenden Abschnitte.

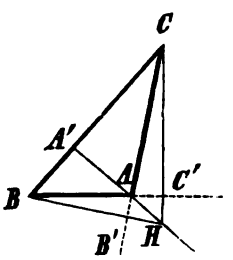


Fig. 168b.

Berücksichtigt man, daß durch die drei Höhen drei neue Dreiecke AHB, AHC, BHC entstehen, derart daß beispielsweise für BHC die Seitenabschnitte CB', BC' Höhen, also jedesmal der dritte Eckpunkt des Urdreiecks der Höhenschnittpunkt des neuen ist, so sieht man, daß die beiden vorstehenden Sätze in einen einzigen zusammenfallen. Auch sind sie identisch mit den bereits in § 25 Nr. 4 bewiesenen Satze, daß die Produkte aus einer von zwei Seiten eines Dreiecks und der Projektion der andern auf diese einander gleich sind.

Die Fig. 168 enthält ferner drei Gruppen von je vier ähnlichen Dreiecken, wie durch die Übereinstimmung in den Winkeln bewiesen werden kann. Es ist nämlich 1) $\triangle ABB' \sim \triangle ACC' \sim \triangle CHB' \sim \triangle BHC'$; 2) $\triangle BCC' \sim \triangle BAA' \sim \triangle AHC' \sim \triangle CHA'$; 3) $\triangle CAA' \sim \triangle CBB' \sim \triangle BHA' \sim \triangle AHB'$. Auch mit Hilfe der Ähnlichkeit dieser Dreiecke lassen sich die vorstehenden Sätze unmittelbar beweisen.

Man erhält in entsprechender Weise mittels der durch je vier Punkte, wie z. B. C, A', H, B', gehenden Kreise oder durch die Ähnlichkeit der Dreiecke denselben Satz in der Form:

$$BA' \cdot BC = BH \cdot BB' \quad ,$$

d. h. das Produkt aus einer Seite und einem ihrer Abschnitte ist gleich dem Produkt aus der mit diesem Abschnitt zusammenstoßenden Höhe auf einer andern Seite und dem obern Abschnitt dieser Höhe.

Durch die Ähnlichkeit vorher angegebener Dreieckspaare oder durch Gleichsetzung dreier Ausdrücke für den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks, $a h_a = b h_b = c h_c$ erhält man ferner den Satz, daß die Produkte aus einer Seite des Dreiecks und der zugehörigen Höhe einander gleich sind.

Verbindet man endlich den Satz $BA' \cdot BC = BH \cdot BB'$ mit dem allgemeinen pythagoreischen Lehrsatz:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,BC \cdot BA' \quad ,$$

so erhält man den Satz:

Das Quadrat der Seite eines Dreiecks ist gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, vermehrt oder vermindert um das doppelte Produkt der Höhe auf der ersten Seite und ihrem obern Abschnitt.

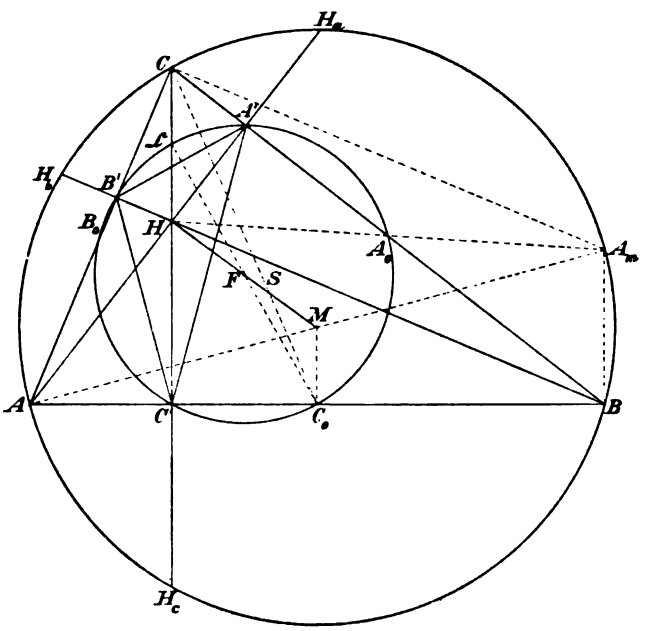


Fig. 169.

2. Die Fußpunkte A', B', C' der Höhen eines Dreiecks ABC (Fig. 169) bestimmen das Fußpunktendreieck des Urdreiecks.

Jede Seite des Fußpunktendreiecks schneidet von dem ursprünglichen ein diesem ähnliches Dreieck ab; denn die Dreiecke ABC und $A'B'C$ stimmen außer

in dem gemeinschaftlichen Winkel C zufolge der Gleichung $CA' \cdot CB = CB' \cdot CA$ auch in den Verhältnissen der einschließenden Seiten überein.

Daher ist $\angle CA'B' = \angle CAB = \alpha$. Ebenso ist $\angle BA'C' = \alpha$, und da auch die rechten Winkel $AA'C$ und $AA'B$ einander gleich sind, so folgt $\angle B'A'H = \angle C'A'H$. Man erhält somit den Satz: Die Höhen eines Dreiecks halbieren die Winkel oder die Außenwinkel des Fußpunktendreiecks, je nachdem sie innerhalb oder außerhalb des Urdreiecks liegen, und die Seiten des Urdreiecks halbieren die Außenwinkel oder Innenwinkel des Fußpunktendreiecks.

Der Höhenschnittpunkt ist demnach der Mittelpunkt des Inkreises oder eines Ankreises des Fußpunktendreiecks und die Eckpunkte des Urdreiecks sind die Mittelpunkte der drei andern Berührungskreise.

Auch ergibt sich aus dem vorstehenden, daß jeder Winkel des Fußpunktendreiecks durch einen Winkel des Urdreiecks bestimmt ist. Ist dieses spitzwinklig, so ist jeder Winkel des ersten doppelt so groß als das Komplement des gegenüberliegenden Winkels des Urdreiecks.

Verlängert man eine Höhe eines spitzwinkligen Dreiecks über ihren Fußpunkt bis zum Umkreis, so ist die Verlängerung gleich dem untern Höhenabschnitt. Ist (Fig. 169) $C'H_c$ die Verlängerung der Höhe CC', und zieht man AH_c, so ist $\angle H_cAB = \angle H_cCB = 90^0 - \beta = \angle A'AB$, daher $\triangle H_cAC' \backsim HAC'$ und also $C'H_c = HC'$.

Daher muß auch umgekehrt, wenn man eine Höhe über ihren Fußpunkt um ihren untern Abschnitt verlängert, der Endpunkt der Verlängerung auf dem Umkreise liegen.

Für stumpfwinklige und rechtwinklige Dreiecke gilt im wesentlichen derselbe Satz und Beweis: auch hier halbiert der Fußpunkt der Höhe den Abstand ihres Schnittpunktes mit dem Umkreis von dem Höhenschnittpunkt.

Die Schnittpunkte H_a, H_b, H_c der drei Höhen mit dem Umkreis bestimmen ein Dreieck, das dem Fußpunktendreieck ähnlich ist und zu ihm perspektiv liegt; H ist der äußere Ähnlichkeitspunkt und die Seiten des Dreiecks $H_aH_bH_c$ sind doppelt so groß als die des Fußpunktendreiecks.

3. Zieht man durch eine Ecke A des Dreiecks ABC (Fig. 169 S. 380) den Durchmesser des Umkreises, dessen Mittelpunkt M ist und verbindet den Diametralpunkt A_m mit B und C, sowie M mit dem Mittelpunkt C_0 von AB, so sind die Dreiecke ABA_m und ACA_m bei B und C rechtwinklig. Daher ist A_mB parallel CH und A_mC parallel zu BH, mithin HBA_mC ein Parallelogramm und $A_mB = CH$. Da nun wegen der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke ABA_m und AC_0M, $A_mB = 2\,MC_0$ also auch $CH = 2\,MC_0$ ist, so hat man den Satz bewiesen: Ein oberer Höhenabschnitt ist doppelt so groß als die Mittelsenkrechte der Seite, auf der die Höhe steht, wobei als Mittelsenkrechte der Seite kurz der Abstand des Umkreismittelpunkts von der Seite bezeichnet ist. Da sich die Diagonalen des Parallelogramms HBA_mC gegenseitig in A_0 halbieren, so geht die Verbindungslinie des Höhenschnittpunkts mit dem Diametralpunkt einer Ecke durch den Mittelpunkt der dieser Ecke gegenüberliegenden Seite. Umgekehrt muß, wenn man die Verbindungslinie des Höhenschnittpunkts mit dem Mittelpunkt einer Seite über diesen um sich selbst verlängert, der Endpunkt der Verlängerung auf dem Umkreis liegen. Zieht man die Mittellinie CC_0 und verbindet H mit M, so wird CC_0 durch HM in S im Verhältnis

$$\frac{CH}{MC_0} = \frac{2}{1}$$

geteilt. Mithin ist S der Schnittpunkt der drei Mittellinien (§ 22 Nr. 3), d. i. der Schwerpunkt des Dreiecks. Er liegt auf der Verbindungslinie des Höhen-

schnittpunkts mit dem Umkreis, der Eulerschen Geraden des Dreiecks und teilt HM ebenfalls im Verhältnis 2 : 1. Der Abstand des Schwerpunkts von einer Dreiecksseite ist ein Drittel der Höhe auf dieser Seite. Die Abstände des Schwerpunkts von zwei Dreiecksseiten verhalten sich daher umgekehrt wie diese Seiten.

Die Verbindungslinien des Schwerpunkts mit den Ecken teilen das Dreieck in drei gleiche Teile. Jede solche Verbindungslinie ist zwei Drittel der Mittellinie, die durch die Ecke geht. Es ist also nach § 28 Nr. 4

$$SC = \tfrac{2}{3} m_c = \tfrac{1}{3} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

und

$$SA^2 + SB^2 + SC^2 = \tfrac{1}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = \tfrac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \ .$$

Zieht man durch A, B, C und S Parallele, die eine beliebige außerhalb des Dreiecks liegende Gerade in A', B', C', S' (Fig. 170) schneiden, die Mittellinie CC_0, durch C_0 die Parallele C_0C_0' zu den ersten und endlich durch C_0 eine Parallele zu der beliebigen Geraden, die SS' in D und CC' in E schneidet, so ist

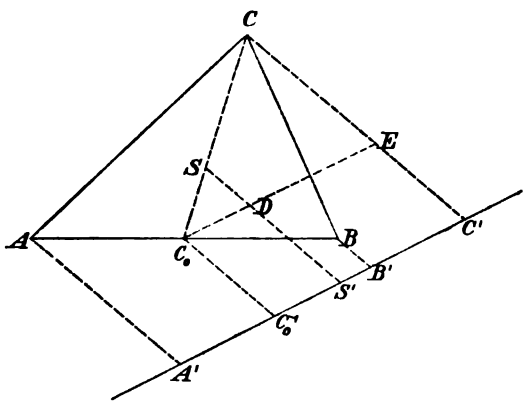


Fig. 170.

$$\frac{SD}{CE} = \frac{SS' - C_0C_0'}{CC' - C_0C_0'} = \frac{1}{3} \ ,$$

woraus sich

$$SS' = \tfrac{1}{3}(2\,C_0C_0' + CC')$$

ergibt. Als Mittelparallele des Trapezes $ABB'A'$ ist aber

$$C_0C_0' = \tfrac{1}{2}(AA' + BB') \ ,$$

daher erhält man:

$$SS' = \tfrac{1}{3}(AA' + BB' + CC') \ .$$

Die Parallele durch den Schwerpunkt ist also das arithmetische Mittel der Parallelen durch die Eckpunkte. Insbesondere ist der Abstand des Schwerpunkts von einer beliebigen Geraden außerhalb des Dreiecks das arithmetische Mittel der Abstände der Ecken.

Man überzeugt sich leicht, daß der Satz auch noch gelten muß, wenn die beliebige Gerade das Dreieck schneidet; nur hat man dann den Sinn in dem die Parallelen zu ziehen sind, zu beachten, also die Parallelen auf einer Seite der Geraden positiv, auf der andern negativ zu nehmen. Das arithmetische Mittel wird dann der dritte Teil der algebraischen Summe der Parallelen. Insbesondere muß für jede durch den Schwerpunkt gehende Gerade die algebraische Summe der in beliebiger Richtung gezogenen Parallelen oder die algebraische Summe der Entfernungen der Ecken gleich Null sein.

4. Wird der obere Höhenabschnitt CH in $\mathfrak{C}$ halbiert (Fig. 169 S. 380) und verbindet man $\mathfrak{C}$ mit C_0 und C mit M, so halbieren $\mathfrak{C}C_0$ und HM einander gegenseitig in F. Daher ist F der Mittelpunkt des Umkreises des rechtwinkligen Dreiecks $\mathfrak{C}C'C_0$. Dieselbe Konstruktion für die obern Abschnitte der beiden andern Höhen muß, da HM dasselbe bleibt, zu demselben Punkt F führen. F ist daher der Mittelpunkt eines Kreises, der durch A', B', C' geht, also der Mittelpunkt des Umkreises des Höhenfußpunktendreiecks. Da $C\mathfrak{C}$ gleich und parallel MC_0 ist, so ist auch $\mathfrak{C}C_0$ gleich und parallel $CM = r$, dem Radius des Umkreises. Mithin ist der Durchmesser des Umkreises des Höhenfußpunktendreiecks gleich dem Radius des Umkreises des Urdreiecks: der Radius dieses Kreises ist also $\frac{1}{2}r$. Derselbe Kreis geht aber auch durch

die Seitenmittelpunkte A_0, B_0, C_0 und durch die Halbierungspunkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ der obern Höhenabschnitte. Er geht also durch neun Punkte des Dreiecks und heißt der Kreis der neun Punkte oder der FEUERBACHsche Kreis des Urdreiecks. Sein Mittelpunkt F liegt auf der EULERschen Geraden und halbiert HM: diese Gerade enthält also die vier Punkte H, F, S, M und zwar ist $FS = \frac{1}{2} SM$ und $FH = -\frac{1}{2} HM$, daher wird FM durch H und S harmonisch im Verhältnis 1 : 2 geteilt.

§ 45. Der FEUERBACHsche Kreis.

1. Die Beziehung des FEUERBACHschen Kreises zum Umkreis kann auch durch folgende Betrachtung ermittelt werden. Die Höhenfußpunkte A', B', C' (Fig. 169 S. 380) liegen nach § 44 Nr. 3 so, daß die Verlängerungen der Höhen vom Höhenschnittpunkt bis zum Umkreis durch die Höhenfußpunkte halbiert werden. Dann teilt also H die Strecken $A'H_a$, $B'H_b$, $C'H_c$ außen im Verhältnis 1 : 2. Daher ist durch A', B', C' ein Kreis bestimmt (§ 36 Nr. 2), der zum Umkreis so liegt, daß H der äußere Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise ist. Der Mittelpunkt F des Umkreises des Höhenfußpunktendreiecks oder des FEUERBACHschen Kreises muß also auf HM so liegen, daß H die Centrale FM außen in demselben Verhältnis 1 : 2 teilt oder daß F die Strecke HM halbiert. Der Radius dieses Kreises muß $\frac{1}{2} r$ sein, wenn r der Radius des Umkreises ist. Jede von H nach einem Punkte des Umkreises gezogene Gerade wird durch den FEUERBACHschen Kreis halbiert und umgekehrt, der Halbierungspunkt der Verbindungslinie von H mit einem Punkte des Umkreises liegt auf dem FEUERBACHschen Kreis. Da nun die Mittelpunkte der Seiten des Urdreiecks die Mittelpunkte der Verbindungslinien von H mit den Diametralpunkten der Ecken sind (§ 44 Nr. 3), so muß der FEUERBACHsche Kreis durch die Mittelpunkte A_0, B_0, C_0 der Seiten gehen. Endlich muß er die obern Höhenabschnitte in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ halbieren. Da der Schwerpunkt S die Strecke FM innen im Verhältnis 1 : 2 teilt, so ist S der innere Ähnlichkeitspunkt des FEUERBACHschen Kreises und des Umkreises.

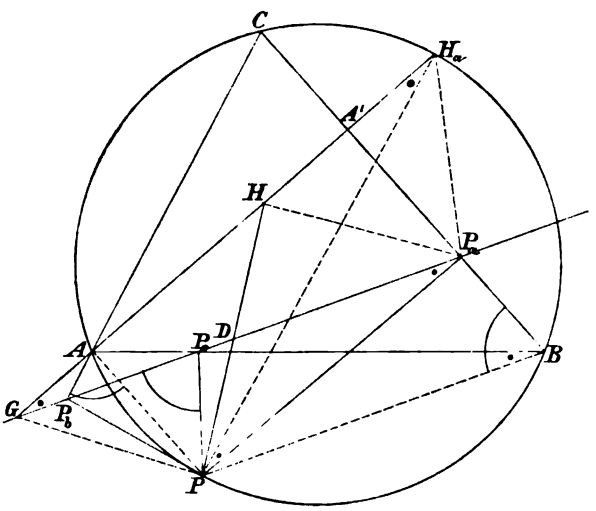


Fig. 171.

2. Fällt man von einem Punkte P des Umkreises eines Dreiecks Senkrechte auf die drei Seiten a, b, c, deren Fußpunkte P_a, P_b, P_c sind (Fig. 171) und verbindet P_c mit P_a und P_b, sowie P mit A und B, so entstehen die drei

Kreisvierecke $CAPB$, AP_bPP_c, BPP_cP_a. Der Außenwinkel PAP_b des Kreisvierecks $CAPB$ ist gleich dem Innenwinkel CBP und gleich dem Peripheriewinkel P_bP_cP in dem Kreisviereck AP_bPP_c; mithin ist $\angle P_aBP = \angle P_bP_cP$ oder P_bP_cP muß Außenwinkel des Kreisvierecks BPP_cP_a sein. Daraus folgt, daß P_a, P_c, P_b auf einer Geraden liegen. Man hat also den Satz bewiesen: Die Fußpunkte der von einem Punkte des Umkreises eines Dreiecks auf die Seiten gefällten Senkrechten liegen auf einer Geraden. Diese ist die Simsonsche Gerade des Punktes des Umkreises.

Zieht man die Höhe AA', die den Umkreis in H_a und die Simsonsche Gerade des Punktes P in G schneidet und verbindet H_a und G mit P, so ist im Kreisviereck BPP_cP_a, $\angle PBP_c = \angle PP_aP_c$; $\angle PBP_c$ ist aber im Umkreis Peripheriewinkel auf dem Bogen AP, mithin ist $\angle PBP_c = \angle AH_aP$, also ist auch $\angle PP_aG = \angle PH_aG$. Als Wechselwinkel an den Parallelen H_aG und PP_a ist nun $\angle PP_aG = \angle P_aGH_a$ und $\angle PH_aG = \angle H_aPP_a$, mithin bilden die Diagonalen des Trapezes PP_aH_aG mit den parallelen Seiten gleiche Winkel und das Trapez ist daher gleichschenklig. Trägt man $A'H_a$ auf $A'A$ von A' aus auf, so ist der Endpunkt H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC und es ist $HP_a = H_aP_a$, woraus folgt, daß PP_aHG ein Parallelogramm ist, dessen Diagonalen einander in D halbieren. Somit erhält man den Satz: Die Verbindungslinie des Höhenschnittpunktes mit einem Punkte des Umkreises des Dreiecks wird durch die Simsonsche Gerade dieses Punktes halbiert. Dann muß aber dieser Halbierungspunkt D auf dem Feuerbachschen Kreise liegen.

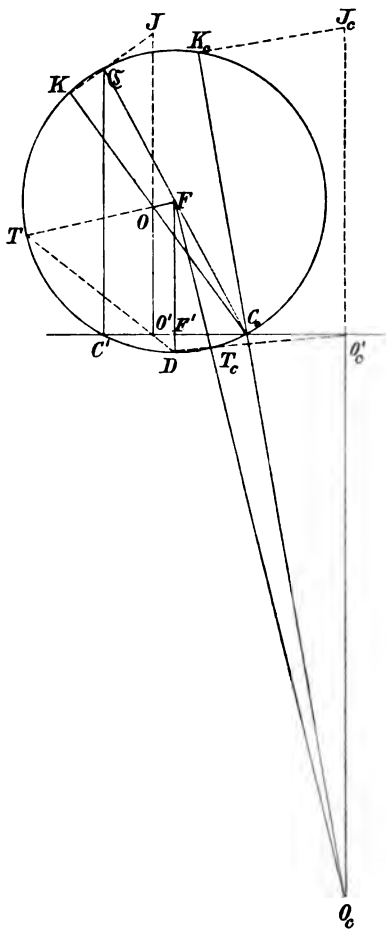


Fig. 172.

3. Der Mittelpunkt F des Feuerbachschen Kreises halbiert die Hypotenuse $\mathfrak{C}C_0 = r$ des rechtwinkligen Dreiecks $\mathfrak{C}C'C_0$ (Fig. 172; vgl. Fig. 169), so daß die von F auf AB gefällte Senkrechte $FF' = \frac{1}{2}\mathfrak{C}C'$ und $C'F' = F'C_0 = \frac{1}{2}C'C_0$ ist. Verbindet man F mit den Mittelpunkten O und O_c des Inkreises und des Ankreises der Seite c, so kann man die Entfernungen FO und FO_c als die Hypotenusen von zwei rechtwinkligen Dreiecken berechnen, die man erhält, wenn man von O und O_c Parallelen zu AB zieht, die FF' selbst und in der Verlängerung schneiden. Dabei ist nach der Bezeichnung von § 43 Nr. 1 $O'C_0 = C_0O'_c = \frac{1}{2}(a - b) = d$.

Man erhält so:

$$FO^2 = (\tfrac{1}{2}\mathfrak{C}C' - \varrho)^2 + (d - \tfrac{1}{2}C'C_0)^2 \quad .$$

Führt man die Quadrate aus und beachtet, daß

$$\mathfrak{C}C'^2 + C'C_0^2 = r^2$$

ist, so hat man:

$$FO^2 = \tfrac{1}{4}r^2 - \varrho \cdot \mathfrak{C}C' - d \cdot C'C_0 + \varrho^2 + d^2 \quad .$$

Nun ist (§ 43 Nr. 3: § 44 Nr. 4)

$$C'O' = QO = \frac{\varrho}{q}\,d\,, \quad C'C_0 = C'O' + O'C_0 = \frac{\varrho}{q}\,d + a$$

und

$$\mathfrak{C}C' = h - C\mathfrak{C} = h - MC_0 = h - (r - q) = r - \frac{d^2}{q}\,,$$

so daß sich ergibt:

$$FO^2 = \tfrac{1}{4}r^2 - \varrho\left(r - \frac{d^2}{q}\right) - d\left(\frac{\varrho}{q}\,d + d\right) + \varrho^2 + d^2 = \tfrac{1}{4}r^2 - r\varrho + r^2\,,$$

also, weil $\frac{1}{2}r > \varrho$ (§ 43 Nr. 3) sein muß,

$$FO = \tfrac{1}{2}r - \varrho\,.$$

Die Centrale des FEUERBACHschen und des Inkreises ist also gleich der Differenz der Radien dieser Kreise, mithin berührt der FEUERBACHsche Kreis den Inkreis einschließend.

Ebenso erhält man:

$$FO_c^2 = (\tfrac{1}{2}\mathfrak{C}C' + \varrho_c)^2 + (d + \tfrac{1}{2}C'C_0)^2 = \tfrac{1}{4}r^2 + \varrho_c \cdot \mathfrak{C}C' + d \cdot C'C_0 + \varrho_c^2 + d^2\,.$$

Hier kann man setzen:

$$C'O_c' = Q_cO_c = \frac{\varrho_c}{q}\,d\,, \quad C'C_0 = C'O_c' - O_c'C_0 = \frac{\varrho_c}{q}\,d - d$$

und es folgt:

$$FO_c^2 = \tfrac{1}{4}r^2 + \varrho_c\left(r - \frac{d^2}{q}\right) + d\left(\frac{\varrho_c}{q}\,d - d\right) + \varrho_c^2 + d^2 = \tfrac{1}{4}r^2 + r\varrho_c + \varrho_c^2\,,$$

also

$$FO_c = \tfrac{1}{2}r + \varrho_c\,.$$

Die Centrale des FEUERBACHschen und des Ankreises der Seite c ist also gleich der Summe ihrer Radien und da dieselbe Rechnung für jeden andern Ankreis angestellt werden könnte, so ergibt sich der Satz: Der FEUERBACHsche Kreis berührt die drei Ankreise des Dreiecks ausschließend.

Die vier Berührungspunkte des FEUERBACHschen Kreises mit den vier Berührungskreisen des Dreiecks sind hiernach leicht zu finden. Schneidet die Verlängerung von FF' den FEUERBACHschen Kreis in D, so daß D der Halbierungspunkt des Bogen $C'C_0$ dieses Kreises ist, so muß DO' die Verlängerung von FO in dem äußern Ähnlichkeitspunkt T des FEUERBACHschen und des Inkreises schneiden, also ist T der Berührungspunkt beider Kreise. Ebenso schneidet DO_c' die Gerade FO_c in T_c, dem innern Ähnlichkeitspunkt des FEUERBACHschen und des Ankreises der Seite c, also deren Berührungspunkt. Der absolute Wert der Potenz von O in Bezug auf den Kreis F ist

$$\tfrac{1}{4}r^2 - (\tfrac{1}{2}r - \varrho)^2 = \varrho(r - \varrho)\,.$$

Schneidet die Verlängerung von C_0O den Kreis F nochmals in K, so muß demnach

$$C_0O \cdot OK = \varrho(r - \varrho)\,, \quad \frac{C_0O}{\varrho} = \frac{r - \varrho}{OK}$$

sein. Verlängert man also $O'O$, macht $O'I = r$ und fällt von I auf die Verlängerung von C_0O die Senkrechte, so ist deren Fußpunkt der Punkt K des Kreises F. Die Potenz von O_c in Bezug auf den Kreis F hat den Wert:

$$(\tfrac{1}{2}r + \varrho_c)^2 - \varrho_c^2 = \varrho_c(r + \varrho_c)\,.$$

Die Verlängerung von C_0O_c möge den Kreis F nochmals in K_c schneiden; dann ist

$$C_0O_c \cdot O_cK_c = \varrho_c(r + \varrho_c), \quad \frac{C_0O_c}{\varrho_c} = \frac{r + \varrho_c}{O_cK_c} .$$

Verlängert man also O_cO_c' um r bis I_c, so ist der Fußpunkt der von I_c auf die Verlängerung von O_0O_c gefällten Senkrechten der Punkt K_c des Kreises F.

Die Mittelpunkte O_a, O_b, O_c der drei Ankreise eines Dreiecks bestimmen ein Dreieck, dessen FEUERBACHscher Kreis der Umkreis des Urdreiecks ist. Der Umkreis des Dreiecks $O_aO_bO_c$ hat daher den Radius $2r$.

Achter Abschnitt.

Einführung in die Geometrie der Lage.

§ 46. Harmonische Punkte und Büschel.

1. Die Gesamtheit aller Punkte, die in derselben Geraden liegen, wird eine Punktreihe genannt, und die Gerade heißt ihr Träger. Die Gesamtheit aller Geraden einer Ebene, die durch denselben Punkt gehen, wird ein Strahlbüschel oder Büschel kurzweg genannt, und der Punkt heißt sein Scheitel. Jede Gerade eines Büschels heißt ein Strahl; sie wird durch den Scheitel in zwei Halbstrahlen geteilt.

Vier Punkte A, B, C, D einer Punktreihe heißen nach § 23, Nr. 3 insbesondere harmonische Punkte, und zwar A und B, sowie C und D einander zugeordnet, wenn die Strecke AB durch C und D oder CD durch A und B innen und außen in demselben Verhältnis geteilt wird.

Vier Strahlen eines Büschels heißen harmonische Strahlen, wenn sie eine Gerade in vier harmonischen Punkten schneiden. Dabei heißen je zwei Strahlen, die durch zwei zugeordnete Punkte gehen, zugeordnete Strahlen.

Nach § 23 gibt es zu einer Strecke AB unendlich viele einander zugeordnete harmonische Teilpunkte C, D. Der äußere, z. B. D, liegt auf der Verlängerung von AB über den Endpunkt, der dem innern näher liegt als der andre, oder beide Teilpunkte liegen vom Halbierungspunkte M der Strecke AB aus nach derselben Richtung. Diesem Halbierungspunkte selbst ist der unendlich ferne Punkt der Geraden zugeordnet. In jedem Endpunkt der Strecke AB fallen zwei einander zugeordnete harmonische Teilpunkte zusammen. Bewegt sich der innere Teilpunkt C vom Halbierungspunkte M aus stetig bis nach B, so bewegt sich der äußere Teilpunkt D stetig aus unendlicher Entfernung bis B; die beiden Punkte bewegen sich also einander entgegen. Auch ist in § 23 Nr. 3 eine Lösung der Aufgabe gegeben, eine gegebene Strecke nach einem gegebenen Verhältnis harmonisch zu teilen oder zu einem gegebenen Teilpunkt einer Strecke den zugehörigen harmonischen Teilpunkt zu finden.

Wird im allgemeinen AB durch C und D in beliebigen Verhältnissen geteilt, so heißt das Verhältnis der Teilverhältnisse

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$$

das Doppelverhältnis der Teilung. Dieses ist positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem die Teilungen in gleichem oder entgegengesetztem Sinne ausgeführt sind. Ist daher das Doppelverhältnis $+1$, so fallen die Punkte C und D zusammen; ist dagegen sein Wert -1, so wird AB durch C und D

harmonisch geteilt. Die Bedingung dafür, daß A, B, C, D harmonische Punkte sind, ist demnach

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB} \quad .$$

Von dem Vorzeichen darf abgesehen werden, wenn es sich um rein metrische Beziehungen handelt, die Strecken also nur in absoluter Länge zu nehmen sind. Eine solche metrische Beziehung erhält man, wenn man die Strecke $AB = a$ setzt und die absoluten Längen der Entfernungen der harmonischen Teilpunkte vom Mittelpunkt M der Strecke ausdrückt, man erhält dann:

$$\frac{\frac{1}{2}a + MC}{\frac{1}{2}a - MC} = \frac{MD + \frac{1}{2}a}{MD - \frac{1}{2}a} \quad ,$$

oder

$$\frac{\frac{1}{2}a}{MC} = \frac{MD}{\frac{1}{2}a}, \quad MC \cdot MD = (\tfrac{1}{2}a)^2 \quad .$$

Das Produkt der Entfernungen der harmonischen Teilpunkte einer Strecke von ihrem Mittelpunkt ist konstant und zwar gleich dem Quadrat der halben Strecke und umgekehrt: ist das Produkt der Entfernungen zweier Teilpunkte einer Strecke von ihrem Mittelpunkt gleich dem Quadrat der halben Strecke, so wird die Strecke durch die Punkte harmonisch geteilt, wobei vorausgesetzt werden muß, daß die Teilpunkte in derselben Richtung vom Mittelpunkt aus liegen.

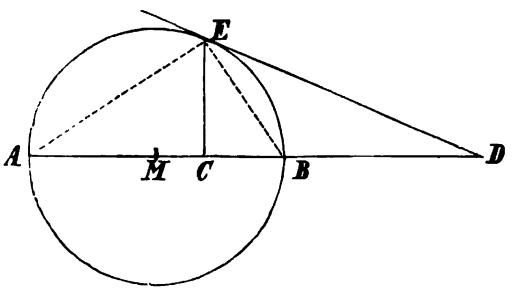


Fig. 173.

Beschreibt man über einer Strecke AB als Durchmesser den Kreis mit dem Mittelpunkt M (Fig. 173), legt in einem Punkte E die Tangente, die AB in D schneidet und fällt von E die Senkrechte EC auf AB, so sind C und D harmonische Teilpunkte von AB; denn es ist in dem rechtwinkligen Dreieck MED

$$MC \cdot MD = ME^2 = (\tfrac{1}{2}AB)^2 \quad .$$

Man sieht sofort, wie hiernach zu einem der Punkte C oder D der zugeordnete harmonische Teilpunkt zu finden ist.

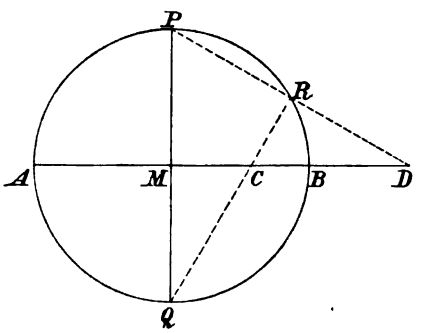


Fig. 174.

Zieht man in dem Kreis über dem Durchmesser AB und dem Mittelpunkt M den zu AB senkrechten Durchmesser PQ (Fig. 174), verbindet P und Q mit dem beliebigen Kreispunkt R, so daß QR und PR den Durchmesser AB in C und D schneiden, so ist $\triangle CMQ \sim \triangle PMD$, also

$$\frac{MC}{MP} = \frac{MQ}{MD}, \quad MC \cdot MD = MP \cdot MQ = (\tfrac{1}{2}AB)^2 \quad .$$

C und D teilen demnach AB harmonisch. Auch damit läßt sich zu einem Teilpunkt der zugeordnete harmonische konstruieren.

2. Zieht man durch vier harmonische Punkte A, B, C, D einer Geraden von dem beliebigen Punkt S aus Strahlen (Fig. 175) und durch einen der Punkte z. B. B die Parallele zu dem durch den zugeordneten Punkt A gehenden Strahl SA, der die beiden andern Strahlen in P und Q schneidet, so ist

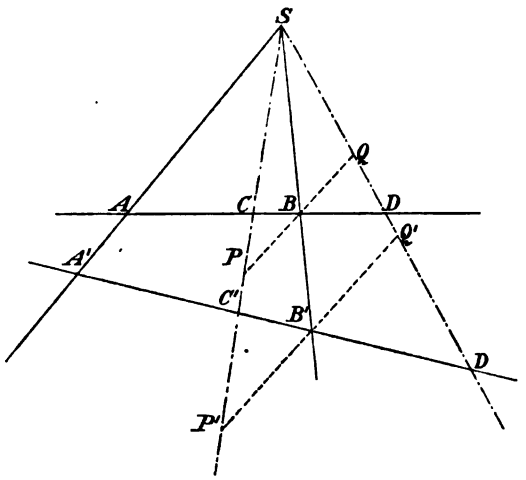


Fig. 175.

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AS}{PB},$$

$$\frac{AD}{DB} = -\frac{AS}{BQ}.$$

Nach der Voraussetzung ist aber

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB},$$

folglich ist $PB = BQ$. Schneidet man nun das harmonische Büschel $S(ABCD)$ durch eine beliebige Gerade, die die Strahlen in A', B', C', D' trifft und zieht durch B' die Parallele zu SA, die SC und SD in P' und Q' schneidet, so ist

$$\frac{A'C'}{C'B'} = \frac{A'S}{P'B'}, \quad \frac{A'D'}{D'B'} = -\frac{A'S}{B'Q'}.$$

Nun ist aber $P'Q'$ auch parallel PQ und da $PB = BQ$ ist, so ist auch $P'B' = B'Q'$; mithin muß sein

$$\frac{A'C'}{C'B'} = -\frac{A'D'}{D'B'},$$

d. h. die Schnittpunkte A', B', C', D' sind wieder vier harmonische Punkte. Damit erhält man den Fundamentalsatz:

Ein harmonisches Büschel wird durch jede Gerade in vier harmonischen Punkten geschnitten und zwar die zugeordneten Strahlen in zugeordneten Punkten.

Die zum Beweise dieses Satzes benutzte Beziehung, daß $P'B' = B'Q'$ ist, stellt einen besondern Fall dieses Satzes dar. Die zu einem Strahl SA parallele Transversale schneidet SA in dem unendlich fernen Punkte, folglich muß der Schnittpunkt B' auf dem zugeordneten Strahl der dem unendlich fernen Punkte auf $P'Q'$ zugeordnete Mittelpunkt der Strecke $P'Q'$ sein.

Zieht man also eine Transversale so, daß sie einem von vier harmonischen Strahlen parallel ist, so muß der zugeordnete Strahl das zwischen den beiden andern Strahlen liegende Stück der Transversale halbieren, und wenn umgekehrt das zwischen zwei einander zugeordneten harmonischen Strahlen liegende Stück einer Transversale durch einen der übrigen Strahlen halbiert wird, so muß der vierte Strahl der Transversale parallel sein.

Hiernach kann man ein harmonisches Büschel konstruieren, wenn man die Endpunkte und den Halbierungspunkt einer Strecke mit einem außerhalb liegenden Punkte verbindet und durch diesen Punkt die Parallele zu der Strecke zieht.

Man kann dies auch durch den Satz ausdrücken: Zwei Seiten eines Dreiecks bilden mit der Mittellinie der dritten Seite und der Parallelen zu dieser durch den gegenüberliegenden Eckpunkt ein harmonisches Büschel.

In § 23 Nr. 5 ist gezeigt worden, daß die Winkelhalbierende eines Dreiecks und ebenso die Halbierungslinie eines Außenwinkels die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt. Hieraus geht hervor, daß zwei einander schneidende Geraden mit den Halbierungslinien der von ihnen gebildeten Winkel ein harmonisches Büschel bilden. Von den Strahlen dieses Büschels stehen zwei einander zugeordnete, nämlich die beiden Winkelhalbierenden, aufeinander senkrecht. Umgekehrt muß, wenn ein Winkel zweier zugeordneten von vier harmonischen Strahlen durch den dritten Strahl halbiert wird, der vierte auf diesem senkrecht stehen und wenn zwei zugeordnete von vier harmonischen Strahlen aufeinander senkrecht stehen, so halbieren sie die von den beiden andern gebildeten Winkel.

Durch Umkehrung des Fundamentalsatzes gewinnt man den folgenden: Liegen auf zwei Geraden je vier harmonische Punkte A, B, C, D und A', B', C', D' so, daß drei der Geraden AA', BB', CC', DD' einander in demselben Punkte S schneiden, so geht auch die vierte durch diesen Punkt.

Der Punkt S kann hierbei auch unendlich fern liegen, d. h. die vier Geraden sind dann parallel.

Gehen insbesondere zwei harmonisch geteilte Strecken AB, AB' von demselben Endpunkt A aus, so müssen sich die drei Geraden, die je zwei entsprechende der übrigen Punkte verbinden, in demselben endlichen oder unendlich fernen Punkte schneiden.

Sind ferner von zwei verschiedenen Punkten S, S' aus durch drei beliebige in gerader Linie liegende Punkte A, B, C Strahlen gezogen, so schneiden die zu je zwei durch denselben Punkt gehenden Strahlen zugeordneten harmonischen Strahlen einander ebenfalls in einem Punkte dieser Geraden.

3. Die Sätze über harmonische Büschel führen zu Auflösungen folgender Aufgaben:

1) Zu einem gegebenen Teilpunkt einer Strecke AB den zugeordneten harmonischen Teilpunkt zu finden.

Man ziehe von einem beliebigen Punkte S außerhalb der Geraden AB die Strahlen durch die Endpunkte A, B und den gegebenen Teilpunkt. Ist dieser der innere C, so ziehe man zwischen SA und SB eine Strecke so, daß sie durch SC halbiert wird und dann zu dieser Strecke durch S den parallelen Strahl. Dieser trifft die Verlängerung von AB im gesuchten Teilpunkte D. Oder man ziehe zwischen SC und SB eine Parallele EF zu AS, verlängere EF um $FG = EF$ und ziehe durch G den Strahl SD. Ist dagegen der gegebene Teilpunkt der äußere D, so ziehe man zwischen SD und SB eine Parallele GF zu SA, verlängere sie um $FE = GF$ und ziehe durch E den Strahl SC. Abänderungen dieser Konstruktion sind hiernach leicht zu finden.

2) Zu einem von drei gegebenen Strahlen den zugeordneten harmonischen Strahl zu konstruieren.

Man ziehe durch einen beliebigen Punkt jenes Strahls die Parallele zu einem der beiden andern, verlängere sie über ihren Schnittpunkt mit dem zweiten um ihre eigene Länge und ziehe durch den Endpunkt der Verlängerung den verlangten Strahl. Man kann auch hierbei verschiedene Fälle unterscheiden.

3) Den Scheitel von vier harmonischen Strahlen zu konstruieren, wenn ein Strahl und für jeden der drei übrigen ein Punkt gegeben ist, durch den er gehen soll.

Man ziehe durch zwei der gegebenen Punkte die Gerade, suche zum Schnittpunkt dieser Geraden mit dem gegebenen Strahl den vierten harmonischen Punkt, verbinde diesen mit dem vierten gegebenen Punkt und bestimme den Schnittpunkt der Verbindungslinie mit dem gegebenen Strahl. Liegen die gegebenen Punkte in einer Geraden, und bilden sie mit dem Schnittpunkt dieser Geraden und des gegebenen Strahls vier harmonische Punkte, so ist die Aufgabe unbestimmt:

ist dies nicht der Fall, so fallen drei Strahlen in die Verbindungslinie zusammen.

4) Von vier harmonischen Punkten sei einer, und für jeden der übrigen sei eine Gerade gegeben, auf der er liegen soll; man konstruiere die übrigen Punkte.

Man suche zu zwei der gegebenen Geraden und der Verbindungslinie ihres Schnittpunkts mit dem gegebenen Punkte A den vierten harmonischen Strahl, der die dritte gegebene Gerade in D schneidet, ziehe AD und bestimme die Schnittpunkte B, C dieser Geraden mit den beiden andern gegebenen Geraden. Wenn die drei gegebenen Geraden durch denselben Punkt S gehen, so müssen sie mit SA vier harmonische Strahlen bilden und die Aufgabe ist dann unbestimmt, oder es fallen die drei gesuchten Punkte in S zusammen.

4. Die Sätze über harmonische Punkte und Strahlbüschel bieten weiter ein Hilfsmittel zur Auffindung von Lehrsätzen, wovon im folgenden einige Beispiele gegeben werden sollen.

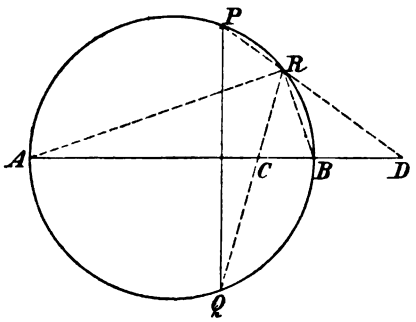


Fig. 176.

Da nach § 44 Nr. 3 die Höhen eines Dreiecks die Winkel des Fußpunktendreiecks halbieren, so bildet eine Höhe mit der Seite, auf der sie steht und mit den Verbindungslinien ihres Fußpunktes mit den beiden andern Höhenfußpunkten ein harmonisches Büschel. So ist in Fig. 169 S. 380, $C'(ACB'A')$ ein solches.

In einem Kreise werde die zu einem Durchmesser AB senkrechte Sehne PQ (Fig. 176) gezogen. Die Verbindungslinien des beliebigen Kreispunktes R mit P und Q teilen dann den Durchmesser in C und D harmonisch. Denn die Strahlen RA und RB stehen aufeinander senkrecht und es ist $\angle ARP = \angle ARQ$ als Peripheriewinkel auf gleichen Bogen; mithin ist $R(ABCD)$ ein harmonisches Büschel, woraus die Behauptung hervorgeht. Dasselbe Büschel wird auch durch PQ in vier harmonischen Punkten geschnitten. Man erkennt die Sätze als Verallgemeinerung der in Nr. 1 (Fig. 173) gezeigten Konstruktion.

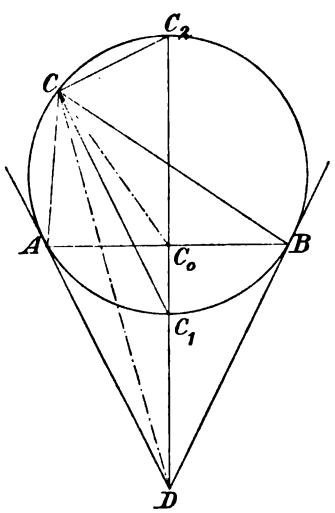


Fig. 177.

Die Konstruktion in Fig. 173, S. 387, gibt den Satz: Ein Punkt außerhalb eines Kreises und seine Berührungssehne teilen den Durchmesser, auf dessen Verlängerung der Punkt liegt, harmonisch.

Legt man in den Eckpunkten A und B des Dreiecks ABC (Fig. 177) die Tangenten an den Umkreis, die sich in D schneiden, so wird der durch D gehende Durchmesser C_1C_2 die Seite AB in C_0 halbieren. Dann sind nach dem vorigen D, C_0, C_1, C_2 vier harmonische Punkte, also $C(DC_0C_1C_2)$ ein harmonisches Büschel, von dem die zugeordneten Strahlen CC_1 und CC_2 senkrecht aufeinander sind; folglich muß $\angle C_1CD = \angle C_1CC_0$ und daher auch $\angle C_0CB = \angle DCA$ sein. CD bildet also mit der Seite CA denselben Winkel wie die Mittellinie CC_0 mit CB.

§ 47. Die Transversalen des Dreiecks. Das vollständige Viereck und Vierseit.

1. Eine Gerade, die durch eine Ecke eines Dreiecks gezogen wird, eine Ecktransversale, teilt die gegenüberliegende Seite innen oder außen in einem gewissen Verhältnis. Zieht man durch einen beliebigen Punkt O die drei Ecktransversalen, so werden alle drei Seiten des Dreiecks in Verhältnissen geteilt, die in einer Beziehung stehen müssen, da durch zwei der Transversalen die dritte bestimmt ist. Liegt O innerhalb des Dreiecks (Fig. 178a), so werden alle drei Seiten innen geteilt, die drei Teilverhältnisse sind positiv. Liegt der Punkt O außerhalb des Dreiecks (Fig. 178b), so muß er doch in dem Winkelraum eines Innenwinkels oder seines Scheitelwinkels liegen: sodann wird die gegenüberliegende Seite innen, die beiden andern außen geteilt, so daß das erste Teilverhältnis positiv, die beiden andern negativ zu nehmen sind. Sind die Schnittpunkte der durch A, B, C gehenden Ecktransversalen auf den gegenüberliegenden Seiten A', B', C', so haben die Dreiecke AOC und COB dieselbe Grundlinie CO und verhalten sich daher wie die auf CO stehenden Höhen, also wie die Abstände der Ecken A und B von CC'. Für dieses Verhältnis kann man aber auch das Verhältnis $AC' : C'B$ setzen. Man erhält daher die drei Gleichungen:

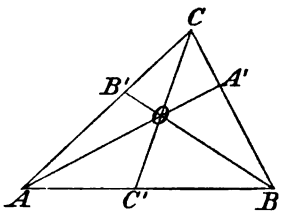


Fig. 178a.

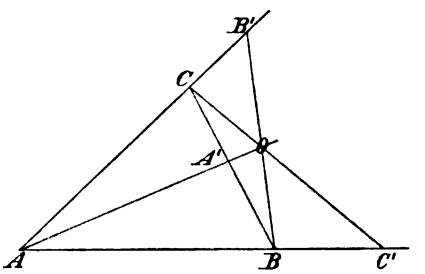


Fig. 178b.

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{\triangle AOC}{\triangle COB}, \quad \frac{BA'}{A'C} = \frac{\triangle BOA}{\triangle AOC}, \quad \frac{CB'}{B'A} = \frac{\triangle COB}{\triangle BOA},$$

deren Multiplikation ergibt:

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1 .$$

Im Falle b) sind die beiden Teilverhältnisse $AC' : C'B$ und $CB' : B'A$ negativ zu nehmen, ihr Produkt ist also wieder positiv. Daher gilt allgemein der Satz des Ceva:

Schneiden sich drei Ecktransversalen eines Dreiecks in einem Punkte, so ist das Produkt der Teilverhältnisse der Seiten gleich 1.

Es ist darauf zu achten, daß die Teilverhältnisse in cyklischer Reihenfolge zu nehmen sind, indem man die Seiten des Dreiecks in einerlei Richtung von einer Ecke anfangend durchläuft. Die richtige Anordnung erkennt man daran, daß jeder der sechs Buchstaben A, B, C, A', B', C' im Zähler und Nenner nur je einmal vorkommt.

Wichtiger als dieser Satz ist seine Umkehrung, die indirekt zu beweisen ist:

Teilen drei Ecktransversalen die Seiten eines Dreiecks so, daß das Produkt der Teilverhältnisse gleich 1 ist, so gehen sie durch einen Punkt.

Mit Hilfe dieses Satzes könnte man, was schon von früher bekannt ist, beweisen, daß einander die Mittellinien eines Dreiecks, die Winkelhalbierenden, die Halbierungslinien eines Innen- und die der beiden andern Außenwinkel, die Höhen und die Mittelsenkrechten in einem Punkte schneiden.

Weiter folgt aus diesem Satze, daß die Ecktransversalen nach den Berührungspunkten des Inkreises einander im Punkt von GERGONNE, die nach den Berührungspunkten der Ankreise auf den Seiten einander im Punkt von NAGEL schneiden.

2. Trägt man den Winkel, den eine Ecktransversale CC' des Dreiecks ABC (Fig. 179) mit AC bildet an der andern anstoßenden Seite CB in C so an, daß die dadurch erhaltene Gerade, AB in demselben Sinne wie CC' teilt, so nennt man CC'' die Gegentransversale von CC'. Fällt man von A und B die Senkrechten AA_1, AA_2 und BB_1, BB_2 auf CC' und CC'', so ist aus leicht erkennbaren ähnlichen Dreiecken:

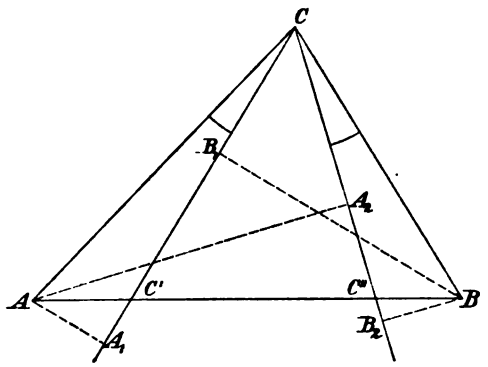


Fig. 179.

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{AA_1}{BB_1}, \quad \frac{AC''}{C''B} = \frac{AA_2}{BB_2}$$

und ebenso

$$\frac{AA_1}{BB_2} = \frac{AC}{CB}, \quad \frac{AA_2}{BB_1} = \frac{AC}{CB} .$$

Daher erhält man durch Multiplikation der beiden ersten Gleichungen mit Berücksichtigung der beiden letzten:

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{AC''}{C''B} = \frac{AC^2}{CB^2} .$$

Das Produkt der Teilverhältnisse einer Ecktransversale und ihrer Gegentransversale mit der gegenüberliegenden Dreiecksseite ist konstant und zwar gleich dem Verhältnis der Quadrate der anliegenden Seiten.

Zieht man durch jede Ecke eine Transversale und ihre Gegentransversale, so hat man außer der vorigen Gleichung, mit entsprechender Bezeichnung noch:

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{BA''}{A''C} = \frac{BA^2}{AC^2}, \quad \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{CB''}{B''A} = \frac{CB^2}{BA^2} .$$

Die Multiplikation der drei Gleichungen ergibt:

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC''}{C''B} \cdot \frac{BA''}{A''C} \cdot \frac{CB''}{B''A} = 1 .$$

Schneiden sich also die drei Ecktransversalen AA', BB', CC' in einem Punkte, so schneiden sich auch ihre drei Gegentransversalen AA'', BB'', CC'' in einem Punkte. Diese beiden Punkte heißen Gegenpunkte. Zu jedem Punkte gibt es also in Bezug auf das Dreieck einen zugeordneten, den Gegenpunkt.

Die Halbierungslinien der Innen- und Außenwinkel eines Dreiecks sind ihre eignen Gegentransversalen, daher sind die Mittelpunkte der vier Berührungskreise ihre eignen Gegenpunkte.

Die Höhen des Dreiecks sind die Gegentransversalen zu den Durchmessern des Umkreises, die durch die entsprechenden Ecken gezogen sind; der Höhenschnittpunkt und der Mittelpunkt des Umkreises sind also Gegenpunkte.

Die Gegentransversalen der Mittellinien eines Dreiecks heißen Symmedianen. Sie sind nach § 46 Nr. 4 in Fig. 177 zu konstruieren, indem man in den Ecken des Dreiecks Tangenten an den Umkreis legt und jede Ecke mit dem Schnittpunkt der Tangenten in den beiden andern Ecken verbindet. Der Schnittpunkt der Symmedianen, der Punkt von LEMOINE ist der Gegenpunkt zum Schwerpunkt. Die Symmediane durch einen Eckpunkt teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der Quadrate der anliegenden Seiten.

3. Eine Gerade, die nicht durch einen Eckpunkt eines Dreiecks geht, teilt jede Seite in einem bestimmten Verhältnis und zwar entweder zwei Seiten innen und die dritte außen, oder alle drei Seiten außen (Fig. 180a, b). Sind die Schnittpunkte der Transversale auf den Seiten BC, CA, AB: A', B', C' und zieht man durch B die Parallele zu AC, die die Transversale in D schneidet, so hat man die Teilverhältnisse:

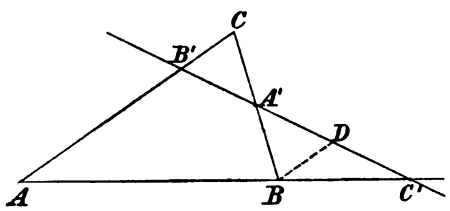


Fig. 180 a.

$$\frac{AC'}{C'B} = -\frac{B'A}{BD}, \quad \frac{BA'}{A'C} = \frac{BD}{CB'},$$

deren Multiplikation gibt

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} = -\frac{B'A}{CB'}$$

oder

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = -1 .$$

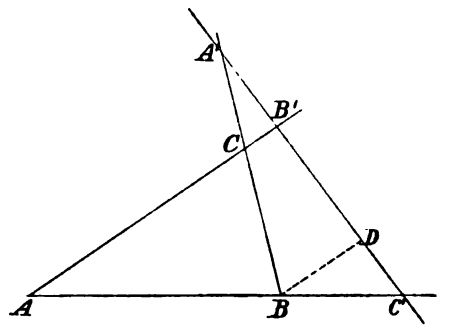


Fig. 180 b.

Diese Beziehung gilt in beiden Fällen; im Falle b sind alle drei Teilverhältnisse negativ, so daß auch hier das Produkt negativ ist. Es gilt also immer der Satz des MENELAOS:

Eine Transversale teilt die Seiten eines Dreiecks so, daß das Produkt der Teilverhältnisse gleich -1 ist.

In Beziehung auf die Anordnung der Teilverhältnisse gilt dasselbe, was in Nr. 1 bei dem analogen Satze des CEVA bemerkt wurde.

Auch von diesem Satze kann auf indirektem Wege die Umkehrung bewiesen werden:

Werden die Seiten eines Dreiecks so geteilt, daß das Produkt der Teilverhältnisse gleich -1 ist, so liegen die drei Teilpunkte auf einer Geraden.

Dieser Satz dient zum Beweise der folgenden:

Die Schnittpunkte der Halbierungslinien zweier Innenwinkel und des dritten Außenwinkels eines Dreiecks mit den gegenüberliegenden Seiten liegen auf einer Geraden.

Die Schnittpunkte der Halbierungslinien der drei Außenwinkel eines Dreiecks mit den gegenüberliegenden Seiten liegen auf einer Geraden.

Auch der Satz, daß die Fußpunkte der von einem Punkte des Umkreises auf die Dreiecksseiten gefällten Senkrechten auf einer Geraden liegen (vgl. § 45 Nr. 2) läßt sich durch den Satz von MENELAOS beweisen.

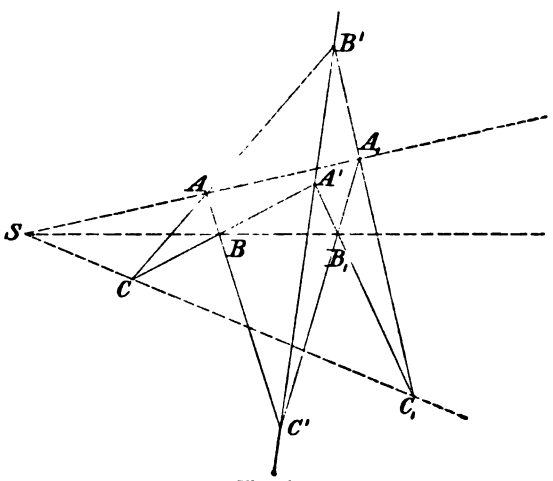


Fig. 181.

Liegen zwei beliebige Dreiecke ABC, $A_1B_1C_1$ perspektiv, d. h. so, daß die Verbindungslinien entsprechender Ecken A und A_1, B und B_1, C und C_1 durch denselben Punkt S gehen (Fig. 181) und schneiden sich die entsprechenden

Seiten AB und A_1B_1 in C', BC und B_1C_1 in A', CA und C_1A_1 in C', so wird das Dreieck SAB durch die Transversale $A_1C'B_1$, SBC durch $B_1A'C_1$, SCA durch $C_1B'A_1$ geschnitten. Man erhält daher nach dem Satze von MENELAOS die drei Gleichungen:

$$\frac{SA_1}{A_1A} \cdot \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BB_1}{B_1S} = -1 \quad ,$$

$$\frac{SB_1}{B_1C} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CC_1}{C_1S} = -1 \quad ,$$

$$\frac{SC_1}{C_1C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AA_1}{A_1S} = -1 \quad ,$$

deren Multiplikation ergibt:

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = -1 \quad ,$$

d. h. die Punkte C', A', B' auf den Seiten AB, BC, CA des Dreiecks ABC liegen auf einer Geraden. Damit ist der wichtige Satz von DESARGUES bewiesen:

Die Schnittpunkte entsprechender Seiten von zwei perspektiv liegenden Dreiecken liegen auf einer Geraden.

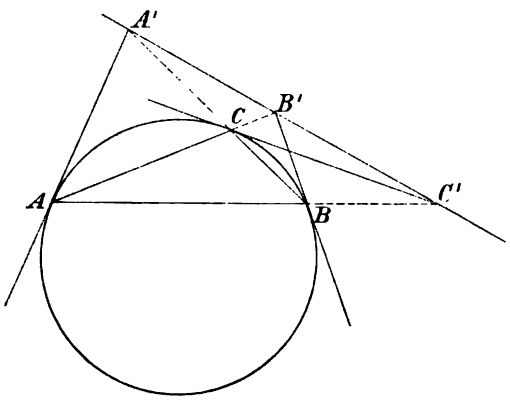


Fig. 182.

Sind die perspektiv liegenden Dreiecke ähnlich, so liegen die Schnittpunkte entsprechender Seiten unendlich fern und die durch die Schnittpunkte gehende Gerade liegt selbst unendlich fern.

Legt man in einem Eckpunkt C des Dreiecks ABC (Fig. 182) die Tangente an den Umkreis, die AB in C' schneidet, so läßt sich zunächst mit Hilfe der ähnlichen Dreiecke $AC'C$ und $CC'B$ beweisen, daß AB durch C' außen im Verhältnis $AC^2 : CB^2$ geteilt wird. Dadurch ergibt sich, daß die Seiten des Dreiecks, die in C zusammenstoßen mit der Symmediane (Nr. 2) durch diese Ecke und mit der in ihr an den Umkreis gelegten Tangente ein harmonisches Büschel bilden. Legt man auch an die Ecken A und B die Tangenten, die BC in A' und CA in B' schneiden, so erhält man die drei Gleichungen:

$$\frac{AC'}{C'B} = -\frac{AC^2}{CB^2} \quad , \quad \frac{BA'}{A'C} = -\frac{BA^2}{AC^2} \quad , \quad \frac{CB'}{B'A} = -\frac{CB^2}{BA^2}$$

und durch Multiplikation

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = -1 \quad ;$$

also den Satz: Die Schnittpunkte der Tangenten, die man in den Ecken eines Dreiecks an den Umkreis legt, mit den gegenüberliegenden Seiten, liegen auf einer Geraden. Diese heißt die Gerade von LEMOINE.

4. In einen Kreis sei ein Sechseck $ABCDEF$ eingeschrieben (Fig. 183). Verlängert man die gegenüberliegenden Seiten AB und DE, BC und EF, CD und FA, bis sie sich in G, H, I schneiden, so bilden die Schnittpunkte L, M, N der nicht aneinander stoßenden Seiten BC, DE und FA ein Dreieck, das durch

die drei Transversalen GAB, DIC, EFH geschnitten wird. Also erhält man nach dem Satze des MENELAOS:

$$\frac{LG}{GM}\cdot\frac{MA}{AN}\cdot\frac{NB}{BL}=-1\ ,$$

$$\frac{LD}{DM}\cdot\frac{MI}{IN}\cdot\frac{NC}{CL}=-1\ ,$$

$$\frac{LE}{EM}\cdot\frac{MF}{FN}\cdot\frac{NH}{HL}=-1\ .$$

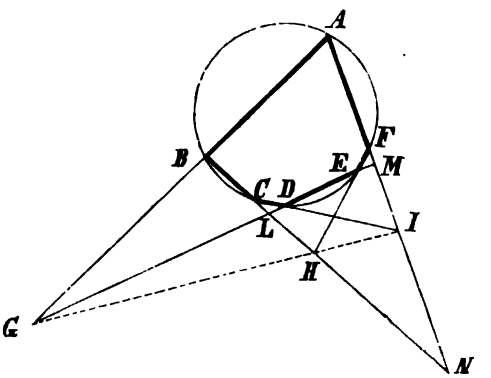


Fig. 183.

Multipliziert man diese drei Gleichungen miteinander und beachtet, daß von L, M, N jedesmal zwei Sekanten in den Kreis gezogen sind, also die Beziehungen gelten:

$$LD\cdot LE=CL\cdot BL\ ,\quad MA\cdot MF=DM\cdot EM\ ,\quad NB\cdot NC=AN\cdot FN\ ,$$

so erhält man

$$\frac{LG}{GM}\cdot\frac{MI}{IN}\cdot\frac{NH}{HL}=-1\ ,$$

d. h. die drei Punkte G, I, H der Seiten des Dreiecks LMN liegen auf einer Geraden. Damit ist der Satz von PASCAL bewiesen:

Die gegenüberliegenden Seiten eines Sehnensechsecks schneiden sich auf einer Geraden, der Geraden von PASCAL.

Der Beweis dieses höchst wichtigen Satzes hängt durchaus nicht davon ab, daß das Sechseck ein einfaches Sechseck ist, sondern es können sich seine Seiten auch durchschneiden. Bezeichnet man also sechs Punkte eines Kreises in beliebiger Reihenfolge durch A, B, C, D, E, F und verbindet sie in dieser Reihenfolge miteinander, so müssen sich immer AB und DE, BC und EF, CD und FA auf einer Geraden schneiden (Fig. 184). Sind zwei dieser Geraden parallel, liegt also ihr Schnittpunkt unendlich fern, so muß die PASCALsche Gerade den beiden Geraden parallel sein.

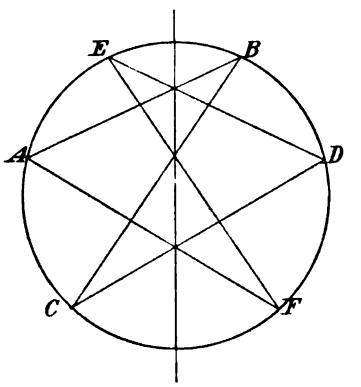


Fig. 184.

Der Lehrsatz gestattet auch die folgende Umkehrung. Bestimmt man zunächst den Schnittpunkt G von AB und DE und legt durch G eine beliebige Gerade, so bestimmt sich auf dieser H als Schnittpunkt von BC und I als Schnittpunkt von CD, mithin müssen sich EH und AI in F, einem Punkte des Kreises schneiden. Denkt man sich durch G alle Geraden gelegt, so erhält man unendlich viele Punkte F des Kreises. Es ist also möglich, aus fünf Punkten eines Kreises alle übrigen Kreispunkte zu erhalten nur durch Ziehen von Geraden, also nur mit Hilfe des Lineals, ohne den Zirkel zu benutzen. Die Ausführung dieser Konstruktion hat natürlich keine praktische Bedeutung für die Zeichnung eines Kreises, aber sie ist dadurch interessant, daß bei ihr die metrische Eigenschaft des Kreises, die bei der Benutzung des Zirkels maßgebend ist, ausgeschaltet erscheint. Daher ist sie von großer Bedeutung für die Geometrie der Lage.

Ein Sehnenfünfeck kann als ein Sehnensechseck betrachtet werden, in dem zwei Eckpunkte zusammenfallen, also eine Seite verschwindet, deren Rich-

tung aber noch durch die in dem betreffenden Eckpunkt an den Kreis gelegte Tangente angegeben wird. Fallen also z. B. D und E in D zusammen, so wird GM zu der durch D gehenden Tangente des Kreises. Der PASCALsche Satz führt hiernach auf den folgenden als besondern Fall:

In einem Sehnenfünfeck liegt der Schnittpunkt einer Seite und der im gegenüberliegenden Eckpunkt an den Kreis gelegten Tangente mit den Schnittpunkten je zweier einander gegenüberliegender übrigen Seiten auf einer Geraden.

Läßt man noch zwei Eckpunkte zusammenfallen, so erhält man ein Sehnenviereck und den Satz:

Sind die Berührungspunkte eines Tangentenvierecks zugleich die Eckpunkte eines Sehnenvierecks desselben Kreises, so liegen die vier Schnittpunkte der Gegenseiten beider Vierecke in gerader Linie.

Endlich erhält man für das Dreieck auf gleiche Weise den Satz: Die Schnittpunkte der durch die Eckpunkte eines Dreiecks gehenden Tangenten des Umkreises mit den gegenüberliegenden Seiten liegen in gerader Linie (vgl. Nr. 3).

5. Zieht man in dem Dreieck ABC die drei Ecktransversalen AA', BB', CC', die sich in O schneiden (Fig. 185), so daß also nach dem Satze des Ceva

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1$$

ist und bestimmt den zu C' zugeordneten harmonischen Teilpunkt C'' auf AB, so ist

$$\frac{AC'}{C'B} = -\frac{AC''}{C''B}$$

und mithin

$$\frac{AC''}{C''B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = -1 \ .$$

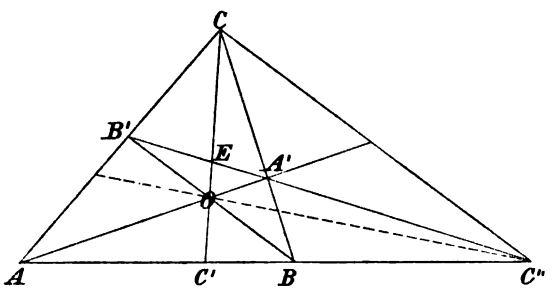


Fig 185.

Daraus folgt, daß die drei Punkte C'', A', B' auf einer Geraden liegen. Ebenso müssen umgekehrt, wenn man die Seiten des Dreiecks durch eine Transversale in C'', A', B' schneidet und zu C'' den zugeordneten harmonischen Teilpunkt C' auf AB bestimmt, die Geraden AA', BB', CC' einander in einem Punkte schneiden.

Zieht man noch CC'', so ist $C\,(A, B, C', C'')$ ein harmonisches Büschel.

Diese Sätze geben ein Mittel, zu drei Punkten den einem dieser Punkte zugeordneten harmonischen Punkt oder zu drei Strahlen den einem dieser Strahlen zugeordneten harmonischen Strahl zu konstruieren nur mit Hilfe des Lineals also ohne den Zirkel zu gebrauchen (wie in Nr. 4), so daß die Beziehungen von vier Punkten einer Geraden als harmonische Punkte oder von vier Strahlen als harmonisches Büschel als reine Lagenbeziehungen, erscheinen. Um nämlich zu A, B und C' den vierten C' zugeordneten Punkt zu finden, zieht man durch A, B, C' und durch einen beliebigen Punkt C die Strahlen CA, CB, CC' und durch den beliebigen Punkt O auf CC' die Geraden AA' und BB', die Verbindungslinie $A'B'$ gibt dann auf AB den Punkt C''. Es ist leicht ersichtlich, wie die Konstruktion auszuführen ist, wenn C'' gegeben und C' gesucht ist. Hat man zu drei Strahlen den einem dieser Strahlen zugeordneten vierten Strahl zu suchen, der mit den drei gegebenen ein harmonisches Büschel bildet, so schneidet man die Strahlen durch eine Transversale und bestimmt nach dem vorigen den vierten harmonischen Punkt zu den drei Schnittpunkten. Der durch diesen gehende Strahl ist dann der gesuchte.

Ist C' der Mittelpunkt von AB, so muß $A'B'$ durch den unendlich fernen Punkt von AB gehen, also mit AB parallel sein. Man kann also, wenn eine Strecke

und ihr Mittelpunkt gegeben ist, durch einen beliebigen Punkt eine Parallele zu der Strecke ziehen nur mit Hilfe des Lineals.

Ist umgekehrt $A'B'$ parallel zu AB, so muß C der Mittelpunkt von AB sein, es ist also auch die Aufgabe, eine Strecke zu halbieren nur durch das Lineal zu lösen, wenn eine Parallele zu dieser Strecke gegeben ist.

Man sieht ferner noch, daß auf den von A und C'' durch O gezogenen Geraden vier harmonische Punkte durch die Strahlen CA, CB, CC', CC'' entstehen müssen und das demnach auch die vier durch O gehenden Strahlen ein harmonisches Büschel bilden, das wieder auf den Strahlen CA und CB vier harmonische Punkte bestimmt. Endlich bilden auch die vier von C'' ausgehenden Strahlen ein harmonisches Büschel, das die Strahlen CA, CB und CC' in vier harmonischen Punkten schneidet.

6. Die vier Punkte $A'OB'C$ in Fig. 185 (Nr. 5) sind die Eckpunkte eines Vierecks, von dem je zwei gegenüberliegende Seiten bis zu ihrem Schnittpunkt B oder A verlängert, und in dem die Diagonalen CO, $A'B'$ gezogen sind.

Man nennt ein System von vier Punkten A', O, B', C mit sämtlichen durch je zwei der Punkte bestimmten Geraden: $A'C$, $A'O$, $A'B'$, CO, CB', $B'O$ ein vollständiges Viereck, diese Geraden seine Seiten, die vier Punkte seine Eckpunkte und die drei andern Schnittpunkte der Seiten A, B, E seine Diagonalpunkte. Entsprechend nennt man ein System von vier Geraden, von denen jede die übrigen schneidet, ein vollständiges Vierseit. Die sechs Schnittpunkte heißen die Eckpunkte, die vier Geraden seine Seiten, und die drei übrigen Verbindungslinien je zweier Eckpunkte seine Diagonalen.

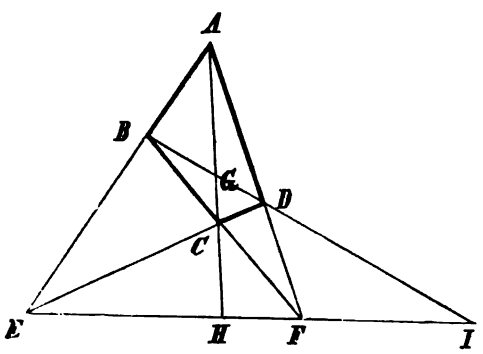


Fig. 186.

Die Figur kann hiernach sowohl als ein vollständiges Viereck, wie als ein vollständiges Vierseit aufgefaßt werden, und ihre Eigenschaften lassen sich zum Beweise von Lehrsätzen über beide verwenden.

Ist also $ABCDEF$ (Fig. 186) ein vollständiges Vierseit, so hat man, indem man AEF als ein Dreieck mit den durch C gehenden Ecktransversalen AH, ED, FB auffaßt, durch die Entwicklungen in Nr. 5 den Satz: In jedem vollständigen Vierseit teilen die Diagonalen einander harmonisch.

Hieraus ergibt sich ferner:

In jedem vollständigen Viereck sind die Diagonalpunkte die Scheitel harmonischer Büschel, deren zugeordnete Strahlenpaare zwei Seiten und zwei Verbindungslinien der Diagonalpunkte sind. So ist im vollständigen Viereck $ABCD$, dessen Seiten AB, BC, CD, AD, AC und BD sind, der Diagonalpunkt G Scheitel zu den vier harmonischen Strahlen GE, GC, GF, GD, ebenso E Scheitel zu den Strahlen EA, EG, EC, EF und F Scheitel zu den Strahlen FA, FG, FC, FE. Hieraus folgt weiter, daß, wenn man in einem vollständigen Viereck die Diagonalpunkte E, F, G untereinander verbindet und die Verbindungslinien bis zu den Seiten verlängert, jede der so entstandenen Linien wieder vier harmonische Punkte enthält, sowie daß, wenn man in einem vollständigen Vierseit einen Eckpunkt und einen Diagonalschnittpunkt verbindet, dadurch auf jeder der gegenüberliegenden Seiten ein vierter harmonischer Punkt bestimmt wird.

Wir fügen endlich den vorstehenden Sätzen noch den folgenden hinzu: Die Halbierungspunkte der drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits liegen in gerader Linie.

Ist nämlich im vollständigen Vierseit $ABCDEF$ (Fig. 187) der Punkt M die Mitte der Diagonale AC, ebenso N die Mitte von BD und O die Mitte von EF und zieht man durch M die Parallele GH zu ED, die AE in G und AD in H halbieren muß, ferner durch G die Parallele zu AD, die ED in I halbieren und EF in ihrem Halbierungspunkt O treffen muß, so muß IH durch N gehen, da I, N, H die Halbierungspunkte der drei Strahlen DE, DB, DA sind. Betrachtet man nun BCF als Transversale des Dreiecks AED, so ist

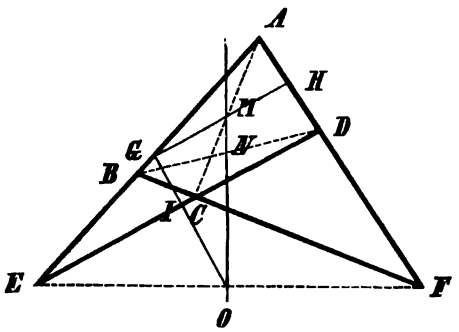


Fig. 187.

$$\frac{AB}{BE}\cdot\frac{EC}{CD}\cdot\frac{DF}{FA}=-1\ .$$

Setzt man hier $AB=2\cdot HN$, $EC=2\cdot GM$, $DF=2\cdot IO$ u. s. w., so erhält man

$$\frac{GM}{MH}\cdot\frac{HN}{NI}\cdot\frac{IO}{OG}=-1\ ,$$

und da M, N, O Teilpunkte der Seiten des Dreiecks GHI sind, so ergibt sich hieraus, daß sie auf einer Geraden liegen müssen.

§ 48. Die Potenz.

1. Nach § 29 Nr. 1, 3) ist die Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis der konstante Wert, den die Produkte der Abschnitte aller Sekanten haben, die von dem Punkt durch den Kreis gezogen werden können. Ist e die Entfernung des Punktes von dem Mittelpunkt des Kreises vom Radius r, so ist der Wert der Potenz e^2-r^2. Er ist positiv, gleich Null, negativ je nachdem der Punkt außerhalb, auf der Peripherie, innerhalb des Kreises liegt. Schneidet eine beliebige durch P gehende Sekante den Kreis in A und B, so ist der Wert der Potenz $PA\cdot PB$, wobei PA und PB positiv zu nehmen sind, wenn P außerhalb des Kreises, dagegen mit entgegengesetzten Vorzeichen, wenn P innerhalb des Kreises liegt. Im ersten Falle ist der Wert der Potenz auch gleich dem Quadrat der von dem Punkt an den Kreis gelegten Tangente; im zweiten ist der absolute Wert der negativen Potenz gleich dem Quadrat der halben durch den Punkt gehenden kürzesten Sehne. Die Potenz des Mittelpunkts des Kreises in Bezug auf den Kreis ist $-r^2$.

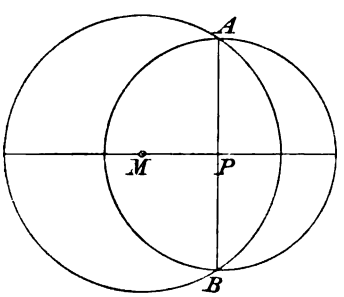


Fig. 188.

Für verschiedene Punkte bei demselben Kreis folgt hieraus: Zu jedem Punkte gibt es unendlich viele, die mit ihm in Beziehung auf denselben Kreis gleiche Potenz haben. Alle diese Punkte müssen mit dem ersten gleiche Entfernung vom Mittelpunkt haben; ihr geometrischer Ort ist also der durch den gegebenen Punkt gehende konzentrische Kreis. Dagegen ändert sich die Potenz eines Punktes, wenn seine Entfernung vom Mittelpunkt sich ändert.

Hiernach läßt sich die Aufgabe lösen: Auf einer Geraden oder einem Kreise einen Punkt zu bestimmen, der in Beziehung auf einen gegebenen Kreis eine gegebene Potenz hat.

Ist P ein Punkt innerhalb eines Kreises M (Fig. 188), AB die in P halbierte Sehne dieses Kreises, so wird der um P mit der Hälfte der Sehne als Radius

beschriebene Kreis von dem Kreise M in einem Durchmesser geschnitten und umgekehrt muß der Mittelpunkt P eines Kreises, der von einem gegebenen Kreise M in einem Durchmesser geschnitten werden soll, innerhalb dieses Kreises so liegen, daß er die gemeinschaftliche Sehne beider Kreise halbiert.

Wird also ein Kreis P von einem Kreise M in einem Durchmesser geschnitten, so ist das negative Quadrat des Radius von P die Potenz des Mittelpunkts P in Beziehung auf den Kreis M.

Ist P ein Punkt außerhalb eines Kreises M (Fig. 189), PT die von P an diesen Kreis gelegte Tangente, so schneidet der mit PT um P beschriebene Kreis den Kreis M in T so, daß die in T an beide Kreise gelegten Tangenten aufeinander senkrecht stehen; denn ist PT Tangente des Kreises M, so ist sie senkrecht zu dem Berührungsradius MT und dieser also als Senkrechte zu dem Radius PT des Kreises P eine Tangente dieses Kreises. Man versteht nun unter dem Winkel zweier einander schneidender Kurven allgemein den Winkel der in dem Schnittpunkt an diese Kurven gelegten Tangenten. Daher kann man hier sagen, daß jeder der Kreise M und P den andern rechtwinklig schneide. Da jede der in T an diese Kreise gelegten Tangenten zugleich Radius des andern Kreises ist, so kann man auch sagen, daß zwei Kreise einander rechtwinklig schneiden, wenn die nach einem Schnittpunkt gezogenen Radien aufeinander senkrecht stehen und umgekehrt.

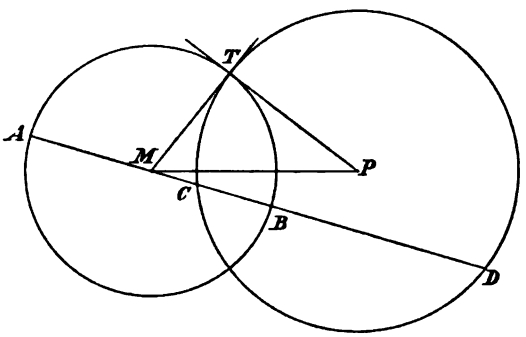


Fig. 189.

Schneiden zwei Kreise einander rechtwinklig, so ist das Quadrat des Radius des einen die Potenz seines Mittelpunkts in Beziehung auf den andern.

Jeder Durchmesser AB eines von zwei einander rechtwinklig schneidenden Kreisen wird durch die Schnittpunkte C, D mit dem andern harmonisch geteilt: denn ist M der Mittelpunkt des ersten Kreises, so ist $r^2 = MA^2 = MC \cdot MD$, woraus nach § 46 Nr. 1 die Behauptung folgt.

Es ergeben sich nun unmittelbar die Lösungen folgender Aufgaben:

Den geometrischen Ort der Mittelpunkte der Kreise zu bestimmen, die einen gegebenen Radius haben und a) von einem gegebenen Kreise in einem Durchmesser geschnitten werden oder b) einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneiden.

Den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise zu bestimmen, die einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte rechtwinklig scheiden.

Einen Kreis zu konstruieren, der einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte rechtwinklig schneidet und a) seinen Mittelpunkt auf einer Geraden oder b) einen gegebenen Radius hat.

Einen Kreis zu konstruieren, der einen gegebenen Radius hat, dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden liegt und der a) einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet oder b) von einem gegebenen Kreis in einem Durchmesser geschnitten wird.

2. Schneidet man zwei gegebene Kreise M_1 und M_2 (Fig. 190) durch einen beliebigen dritten Kreis und verbindet seine Schnittpunkte auf jedem Kreise A_1, B_1 und A_2, B_2, so schneiden sich diese Verbindungslinien in P. Da nun PA_1B_1 und PA_2B_2 Sekanten des dritten Kreises sind, so muß

$$PA_1 \cdot PB_1 = PA_2 \cdot PB_2 .$$

sein, d. h. P muß in Bezug auf beide Kreise gleiche Potenz haben. Zieht man umgekehrt durch einen Punkt P der in Beziehung auf beide Kreise gleiche Potenz hat zwei beliebige Sekanten durch beide Kreise, so liegen die vier Schnittpunkte auf einem Kreise.

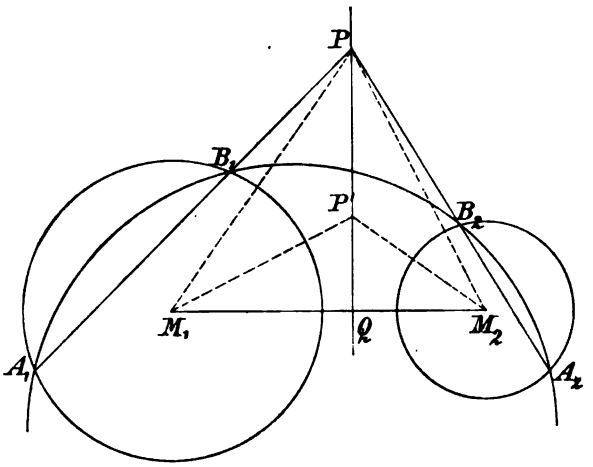


Fig. 190.

Liegt ein Punkt, der in Bezug auf zwei Kreise gleiche Potenz hat, außerhalb beider, so sind die von ihm an die beiden Kreise gelegten Tangenten einander gleich und er ist der Mittelpunkt eines Kreises, der beide gegebenen rechtwinklig schneidet.

Liegt ein Punkt, der in Bezug auf zwei Kreise gleiche Potenz hat, innerhalb beider, so sind die durch diesen Punkt zu ziehenden kleinsten Sehnen der beiden Kreise einander gleich und er ist der Mittelpunkt eines Kreises, der beide in Diametralpunkten schneidet.

Verbindet man einen Punkt P, der in Bezug auf die beiden Kreise M_1 und M_2 mit den Radien r_1 und r_2 gleiche Potenz hat, mit den Mittelpunkten der beiden Kreise, so muß

$$PM_1^2 - r_1^2 = PM_2^2 - r_2^2$$

sein, oder auch

$$PM_1^2 - PM_2^2 = r_1^2 = r_2^2 \quad .$$

Fällt man von P die Senkrechte PQ auf die Centrale $M_1M_2 = c$, so ist

$$PQ^2 = PM_1^2 - QM_1^2 = PM_2^2 - QM_2^2 \quad ,$$

mithin

$$PM_1^2 - PM_2^2 = QM_1^2 - QM_2^2 = r_1^2 - r_2^2 \quad .$$

Nimmt man auf PQ den beliebigen Punkt P' an und verbindet ihn mit M_1 und M_2, so ist auch

$$P'Q^2 = P'M_1^2 - QM_1^2 = P'M_2^2 - QM_2^2 \quad ,$$

also

$$P'M_1^2 - P'M_2^2 = QM_1^2 - QM_2^2 = r_1^2 - r_2^2$$

oder

$$P'M_1^2 - r_1^2 = P'M_2^2 - r_2^2 \quad ,$$

d. h. der Punkt P' hat ebenfalls gleiche Potenz in Bezug auf beide Kreise. Da P' ein beliebiger Punkt von PQ war, so haben alle Punkte dieser Geraden gleiche Potenz in Bezug auf beide Kreise. Umgekehrt zeigt die Entwicklung, daß jeder Punkt, der in Bezug auf beide Kreise gleiche Potenz hat, auf der Geraden PQ liegen muß. Nennt man daher den geometrischen Ort aller Punkte, die in Bezug auf zwei Kreise gleiche Potenz haben, die Potenzlinie der beiden Kreise, so hat man den Satz:

Die Potenzlinie zweier Kreise ist eine auf der Centrale senkrechte Gerade. Sie ist bestimmt durch einen ihrer Punkte und die Centrale oder durch zwei ihrer Punkte.

Haben die beiden Kreise einen gemeinsamen Punkt, so muß die Potenzlinie durch diesen Punkt gehen, weil er in Bezug auf beide Kreise die Potenz Null hat. Daher ist die Potenzlinie zweier einander schneidender Kreise die durch ihre Schnittpunkte gehende Gerade und die Potenzlinie zweier sich berührender Kreise die durch den Berührungspunkt gehende gemeinsame Tangente.

Wenn zwei Kreise gemeinsame Tangenten haben, so werden ihre Abschnitte zwischen den Berührungspunkten durch die Potenzlinie halbiert, weil die von den Schnittpunkten der gemeinsamen Tangenten und der Potenzlinie an die Kreise gelegten Tangenten einander gleich sein müssen.

Im allgemeinen ist die Lage der Potenzlinie zweier Kreise durch den Punkt Q bestimmt. Aus den beiden Gleichungen

$$QM_1 + QM_2 = c\,, \quad QM_1^2 - QM_2^2 = r_1^2 - r_2^2$$

findet man

$$QM_1 - QM_2 = \frac{r_1^2 - r_2^2}{c}$$

und dann

$$QM_1 = \tfrac{1}{2}\left(c + \frac{r_1^2 - r_2^2}{c}\right), \quad QM_2 = \tfrac{1}{2}\left(c - \frac{r_1^2 - r_2^2}{c}\right).$$

Setzt man $r_1 > r_2$ voraus, so ist QM_1 immer positiv, QM_2 nur so lange als

$$c > \frac{r_1^2 - r_2^2}{c}\,, \quad c^2 > r_1^2 - r_2^2$$

ist. Im Falle

$$c = \frac{r_1^2 - r_2^2}{c}\,, \quad c^2 = r_1^2 - r_2^2$$

wird der kleinere Kreis von dem größern in Diametralpunkten geschnitten, es ist dann $QM_1 = \sqrt{r_1^2 - r_2^2}$, $QM_2 = 0$; der Durchmesser selbst ist die Potenzlinie. Ist $c^2 < r_1^2 - r_2^2$, so wird QM_2 negativ, Q liegt auf der Verlängerung der Centrale über den Mittelpunkt des kleinern Kreises. Es liegt also immer die Potenzlinie dem Mittelpunkt des kleinern Kreises näher. Ist $c = 0$, sind die Kreise also konzentrisch, so liegt die Potenzlinie unendlich fern. Die besondern Fälle: $c = r_1 + r_2$ und $c = r_1 - r_2$ führen auf schon bekannte Resultate zurück.

3. Zu einem gegebenen Kreise und einer gegebenen Geraden gibt es unendlich viele Kreise, die mit dem gegebenen die Gerade als Potenzlinie haben; ihre Mittelpunkte liegen auf der Senkrechten zu der gegebenen Geraden, die durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises geht. Aus Nr. 2 ergibt sich, wie man irgend einen dieser Kreise konstruieren kann. Ist der Radius eines solchen gegeben, so gibt es zwei symmetrisch zur gegebenen Geraden liegenden Kreise.

Alle unendlich vielen Kreise, die mit einem gegebenen Kreise eine gegebene Gerade als Potenzlinie haben, bilden ein Kreisbüschel. Irgend zwei Kreise eines Büschels haben dieselbe Gerade als Potenzlinie. Schneiden sich zwei Kreise eines Büschels, so gehen alle Kreise des Büschels durch dieselben zwei Punkte. Berühren sich zwei Kreise eines Büschels, so berühren alle Kreise des Büschels einander in demselben Punkte. Haben irgend zwei Kreise eines Büschels keinen Punkt gemein, so haben keine zwei Kreise einen Punkt gemein.

Liegt ein Punkt der Potenzlinie eines Büschels außerhalb eines Kreises, so liegt er außerhalb aller Kreise des Büschels: man kann von ihm an alle Kreise des Büschels gleiche Tangenten legen. Der Punkt ist dann Mittelpunkt eines Kreises, der sämtliche Kreise rechtwinklig schneidet.

4. Sind drei Kreise M_1, M_2, M_3 gegeben, so erhält man durch Verbindung von je zweien drei Potenzlinien. Der Schnittpunkt der Potenzlinie von M_1 und M_2 mit der Potenzlinie von M_2 und M_3 hat die Eigenschaft, daß seine

Potenz in Beziehung auf M_1 gleich seiner Potenz in Beziehung auf M_2 und gleich seiner Potenz in Beziehung auf M_3 ist, d. h. er muß ein Punkt der Potenzlinie von M_3 und M_1 sein. Daher ergibt sich der Satz:

Die drei Potenzlinien dreier Kreise schneiden einander in demselben Punkte.

Dieser Punkt heißt der Potenzpunkt der drei Kreise.

Ein endlicher Potenzpunkt existiert nur dann, wenn die Mittelpunkte der drei Kreise nicht auf einer Geraden liegen. Liegen die drei Mittelpunkte auf einer Geraden, so sind im allgemeinen die drei Potenzlinien parallel, der Potenzpunkt liegt also unendlich fern. Bilden die drei Kreise ein Büschel, so fallen die drei Potenzlinien in eine Gerade zusammen und es ist dann jeder Punkt der gemeinsamen Potenzlinie Potenzpunkt der drei Kreise.

Aus dem Satz vom Potenzpunkt erhält man folgende besondere Fälle:

Schneiden drei Kreise einander, so schneiden ihre drei gemeinschaftlichen Sehnen einander in demselben Punkte. — Berührt jeder von drei Kreisen die beiden andern, so gehen die an die Berührungspunkte gelegten gemeinschaftlichen Tangenten durch denselben Punkt. — Berührt ein Kreis zwei einander schneidende Kreise, so liegt der Schnittpunkt der durch die Berührungspunkte gehenden gemeinschaftlichen Tangenten auf der gemeinschaftlichen Sehne. — Für alle Kreise, die zwei gegebene Kreise schneiden oder berühren, liegen die Schnittpunkte der beiden gemeinschaftlichen Sehnen oder der entsprechenden Tangenten in einer Geraden, nämlich der Potenzlinie der beiden gegebenen Kreise.

Insbesondere ist die in Nr. 2 angegebene Konstruktion eines Punktes, der in Bezug auf zwei Kreise gleiche Potenz hat, nichts anders als die Konstruktion des Potenzpunktes der beiden Kreise und eines beliebigen dritten, der beide schneidet.

5. Denkt man sich den Radius eines Kreises stetig abnehmend, so kann der Mittelpunkt als die Grenze betrachtet werden, der sich der Kreis ohne Ende nähert. In diesem Sinne kann man einen Punkt als einen Kreis mit dem Radius Null ansehen. Man kann daher auch die vorstehenden Untersuchungen auf die Fälle ausdehnen, daß ein oder mehrere Kreise sich auf Punkte reduzieren.

Hiernach hat man unter der Potenz eines Punktes P in Beziehung auf einen gegebenen Punkt M das Quadrat der Entfernung beider Punkte voneinander zu verstehen. Der geometrische Ort der Punkte, die in Beziehung auf den gegebenen Punkt M die gegebene Potenz r^2 haben, ist also der mit dem Radius r um M beschriebene Kreis.

Die Potenzlinie eines Kreises M und eines Punktes P ist der geometrische Ort der Punkte, die in Beziehung auf diesen Kreis und diesen Punkt gleiche Potenzen haben. Um sie zu bestimmen, hat man nur die vorstehenden Entwicklungen mit der Abänderung zu wiederholen, daß der Radius r_2 des kleinern Kreises gleich Null gesetzt wird. Die gesuchte Potenzlinie ist eine Gerade und steht senkrecht auf der Verbindungslinie des Punktes P mit dem Mittelpunkt des Kreises M. Liegt P auf dem Kreise M, so ist die Potenzlinie die durch P gehende Tangente des Kreises; in allen andern Fällen liegt die Potenzlinie außerhalb des Kreises. Ist P insbesondere der Mittelpunkt von M, so liegt die Potenzlinie unendlich fern.

Die Potenzlinie zweier Punkte A, B ist die Mittelsenkrechte ihrer Verbindungslinie.

Die drei Potenzlinien zweier Kreise und eines Punktes oder eines Kreises und zweier Punkte oder dreier Punkte schneiden einander in demselben Punkte, dem Potenzpunkte der Kreise oder Punkte.

Für den Fall, daß drei Punkte gegeben sind, reduziert sich der vorstehende Satz auf den bekannten, daß die drei Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks einander in dem Mittelpunkte des Umkreises schneiden. Ist ein Kreis

nebst zwei auf ihm liegenden Punkten gegeben, so hat man den ebenfalls bekannten Satz: Zwei Tangenten eines Kreises, die einander schneiden, sind — von den Berührungspunkten bis zum Schnittpunkt gerechnet — gleich lang, und ihr Schnittpunkt liegt auf der zur Verbindungssehne der Berührungspunkte senkrechten und durch ihren Mittelpunkt gehenden Geraden.

Die Potenzlinie eines Kreises und eines außerhalb liegenden Punktes halbiert die beiden von dem Punkt an den Kreis gelegten Tangenten.

Zieht man die Berührungssehne EF (Fig. 191) zu den von einem Punkte D außerhalb eines Kreises M an diesen gelegten Tangenten DE, DF, so ist diese, weil zu der Centrale DM senkrecht, zu der Potenzlinie des Punktes D und des Kreises M parallel. Der Abstand des Punktes C, in dem die Berührungssehne die Centrale schneidet, von dem Punkte D wird daher ebenso, wie die Tangenten, von der Potenzlinie halbiert. Da also die Potenzlinie die Mittelsenkrechte zu CD ist, so muß ihr Schnittpunkt G mit DE von C und D gleich weit entfernt sein. Es ist mithin auch $GE = GC$; also G ein Punkt, der in Beziehung auf den Kreis M und den Punkt C gleiche Potenz hat. Hieraus geht hervor, daß die Potenzlinie von M und D zugleich die Potenzlinie von M und C ist, oder der Satz:

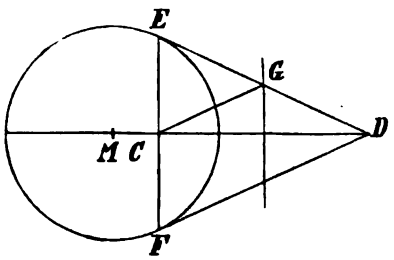


Fig. 191.

Die Potenzlinie eines Kreises und eines innerhalb liegenden Punktes C halbiert die beiden Tangenten, deren Berührungssehne in dem Punkte C halbiert wird.

Es läßt sich dieser Satz mit dem vorhergehenden vereinigen. Aus § 46 Nr. 1 ist bekannt, daß die Punkte C und D den durch C gehenden Durchmesser harmonisch teilen. Daher gilt der Satz:

Die Potenzlinie eines Kreises und eines Punktes halbiert den Abstand dieses Punktes von dem ihm zugeordneten harmonischen Teilpunkt des Durchmessers, auf dem der Punkt liegt.

Hiernach kann die Konstruktion der Potenzlinie eines Kreises und eines Punktes auf verschiedene Weise ausgeführt werden. Auf die Halbierung der Tangenten führt die Anwendung des Potenzpunktes. Um mit dessen Hilfe die Potenzlinie eines Kreises M und eines Punktes D zu konstruieren, kann man einen Kreis zeichnen, der durch D geht und M schneidet oder berührt. Die gemeinschaftliche Sehne beider Kreise und die in D an den Hilfskreis gelegte Tangente müssen sich als Potenzlinien in dem Potenzpunkt schneiden, der also ein Punkt der gesuchten Potenzlinie ist. Noch einfacher nimmt man auf M irgend einen andern Punkt H an und bestimmt den Potenzpunkt von M, D und H mittels der in H an M gelegten Tangente und der Mittelsenkrechten von D und H. Da H willkürlich ist, so kann man für einen äußern Punkt D den Berührungspunkt einer von D an M gelegten Tangente wählen und man sieht, daß man dann auf den Satz zurückkommt, nach dem der Halbierungspunkt dieser Tangente ein Punkt der gesuchten Potenzlinie ist.

Der Potenzpunkt dreier Kreise führt zur Auflösung folgender Aufgaben:

Einen Kreis zu konstruieren, der a) drei gegegebene Kreise rechtwinklig schneidet oder b) von jedem von drei gegebenen einander schneidenden Kreisen unter einem Durchmesser geschnitten wird, oder c) zwei gegebene Kreise rechtwinklig schneidet und durch einen gegebenen Punkt geht oder d) einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet und durch zwei gegebene Punkte geht.

Man kann den Radius eines Kreises unbegrenzt wachsen lassen und die Gerade als einen Kreis mit unendlich großem Radius ansehen. Nach Nr. 2 ist

dann die Potenzlinie eines Kreises und einer Geraden oder eines Punktes und einer Geraden diese Gerade selbst. Daher ist die Potenzlinie eines Kreisbüschels als der zu diesem Büschel gehörige Kreis mit unendlich großem Radius zu betrachten.

§ 49. Pol und Polare.

1. Zwei Punkte C, D, die den Durchmesser AB eines Kreises harmonisch teilen, heißen zugeordnete Pole des Kreises (vgl. § 46 Nr. 1). Ist M der Mittelpunkt, r der Radius des Kreises, so ist

$$MC \cdot MD = r^2 \quad .$$

Von zwei zugeordneten Polen des Kreises liegt der eine innerhalb, der andre auf derselben Seite des Mittelpunkts außerhalb des Kreises. Der zugeordnete Pol des Mittelpunkts liegt unendlich fern auf einem beliebigen Durchmesser und der zu dem unendlich fernen Punkte eines Durchmessers zugeordnete Pol ist der Mittelpunkt des Kreises. In einem Punkt der Peripherie fallen zwei zugeordnete Pole zusammen.

Zwei zugeordnete Pole eines Kreises haben in Bezug auf diesen Kreis eine gemeinschaftliche Potenzlinie und umgekehrt. Jeder Kreis, der durch zwei zugeordnete Pole eines Kreises geht, schneidet diesen rechtwinklig.

Eine Gerade, die in einem von zwei zugeordneten Polen auf dem zu diesen gehörigen Durchmesser senkrecht steht, heißt die Polare des andern Pols und dieser der Pol der Geraden. Zu jedem Punkte gibt es als in Bezug auf den Kreis eine Polare; zu jeder Geraden einen Pol.

Die Polare eines außerhalb des Kreises liegenden Punktes geht durch die Berührungspunkte der von dem Punkt an den Kreis gelegten Tangenten, ist also die Berührungssehne dieses Punktes. Die Polare eines auf dem Kreise liegenden Punktes ist die durch diesen Punkt gehende Tangente. Die Polare eines innerhalb des Kreises liegenden Punktes liegt außerhalb des Kreises und geht durch den Schnittpunkt der beiden Tangenten, deren Berührungssehne in dem Punkte halbiert wird. Die Polare des Mittelpunktes ist eine unendlich ferne Gerade. Jeder Durchmesser des Kreises ist die Polare des auf dem zu ihm senkrechten Durchmesser unendlich fern liegenden Punktes.

Der Pol einer Geraden, die den Kreis schneidet, ist der Schnittpunkt der beiden an die gemeinsamen Punkte von Kreis und Gerade gelegten Tangente. Der Pol einer Tangente eines Kreises ist der Berührungspunkt. Liegt eine Gerade außerhalb eines Kreises und legt man von ihrem Schnittpunkt mit dem zu ihr senkrechten Durchmesser die beiden Tangenten an den Kreis, so schneidet die Berührungssehne diesen Durchmesser im Pol der Geraden. Der Pol einer unendlich fernen Geraden ist der Mittelpunkt des Kreises.

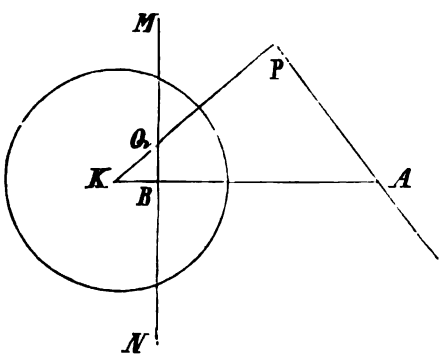


Fig. 192 a.

2. Es sei A ein beliebiger Punkt und MN (Fig. 192 a, b) seine Polare in Beziehung auf den Kreis K. Zieht man nun eine beliebige Gerade und fällt auf sie vom Mittelpunkt K die Senkrechte KP, die MN in Q schneidet, so ist, wenn B der zu A zugeordnete Pol, also KB senkrecht zu MN ist, $\angle KBQ = \angle KPA = 90^0$ und daher $\triangle KBQ \sim \triangle KPA$. Hieraus folgt:

$$KB : KQ = KP : KA$$

oder

$$KA \cdot KB = KP \cdot KQ \quad .$$

Da nun nach der Voraussetzung $KA \cdot KB = r^2$, so ist auch

$$KP \cdot KQ = r^2 \quad ,$$

d. h. P und Q sind ebenfalls zugeordnete Pole des Kreises K; AP ist die Polare von Q und Q ist der Pol von AP.

Hieraus folgt: Die Pole aller Geraden, die durch denselben Punkt gehen, liegen auf einer Geraden, nämlich der Polare dieses Punktes; oder dreht sich eine Gerade um einen festen Punkt, so bewegt sich ihr Pol auf der Polare dieses Punktes.

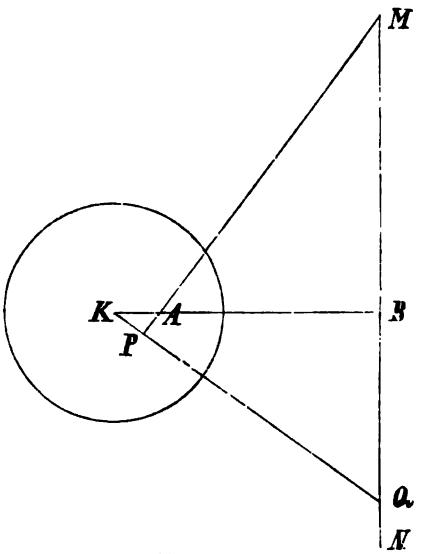


Fig. 192 b.

Nimmt man umgekehrt auf der Polare eines Punktes A außer seinem zugeordneten Pole B einen zweiten Punkt Q an, so folgt in gleicher Weise, daß die Polare von Q durch A gehen muß, d. h.: Die Polaren aller Punkte einer Geraden gehen durch den Pol dieser Geraden, oder bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden, so dreht sich die Polare des Punktes um den Pol der Geraden.

Die Verbindungslinie zweier Punkte ist hiernach die Polare des Schnittpunkts der Polaren dieser Punkte. Der Schnittpunkt zweier Geraden ist der Pol der Verbindungslinie der Pole dieser Geraden. Ist der Schnittpunkt zweier Geraden der Pol einer dritten Geraden, so geht diese durch die Pole der beiden Geraden.

Als besondere Fälle ergeben sich noch folgende:

Liegen die Scheitel mehrerer Winkel, deren Schenkel einen Kreis berühren, auf einer Geraden, so schneiden die zugehörigen Berührungssehnen einander in einem Punkte, dem Pole der Geraden.

Zieht man durch einen Punkt beliebig viele Sehnen und durch die Endpunkte einer jeden die Tangenten an den Kreis, so liegen die Schnittpunkte aller Tangentenpaare auf einer Geraden, der Polare des Punktes.

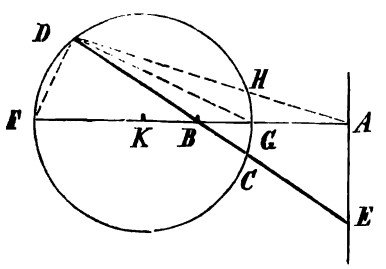


Fig. 193 a.

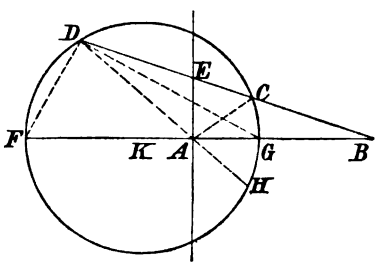


Fig. 193 b.

3. Zieht man durch einen Punkt B eine Sehne CD in einem Kreise K (Fig. 193a, b), die von der Polare des Punktes B in E geschnitten wird, so sind, wenn A der zugeordnete Pol und FG der Durchmesser durch den Punkt B ist, die Geraden DF, DG und DB, DA vier harmonische Strahlen. Da nun DG auf dem zugeordneten Strahle DF senkrecht steht, so muß DG den Winkel BDA der beiden andern Strahlen halbieren. Aus der Gleichheit der Peripheriewinkel

CDG, GDH folgt aber die Gleichheit der zugehörigen Bogen und der Sehnen CG und GH; die dann leicht zu beweisende Kongruenz der Dreiecke CGA und GHA führt zu der Folgerung, daß auch die Winkel CAG, HAG einander gleich sind. Da außerdem die Polare AE auf dem Strahl AG senkrecht ist, so bilden AE, AB und AC, AH ebenfalls ein harmonisches Büschel und müssen daher die Sekante DE in vier harmonischen Punkten schneiden. Somit ergibt sich der Satz:

Jede durch einen Punkt gehende Sehne eines Kreises wird durch diesen Punkt und seine Polare harmonisch geteilt.

Umgekehrt muß jeder von zwei harmonischen Teilpunkten einer beliebigen Sehne CD eines Kreises auf der Polare des andern Teilpunkts liegen.

Bestimmt man auf allen durch einen Punkt gehenden Sekanten eines Kreises, den dem Punkt zugeordneten harmonischen Teilpunkt der Kreissehne, so liegen alle diese Punkte auf der Polare des ersten Punktes. Die Polare eines Punktes ist also der geometrische Ort der diesem Punkte zugeordneten harmonischen Teilpunkt aller Sehnen des Kreises, die durch diesen Punkt gehen. Sie ist durch zwei dieser zugeordneten harmonischen Teilpunkte bestimmt.

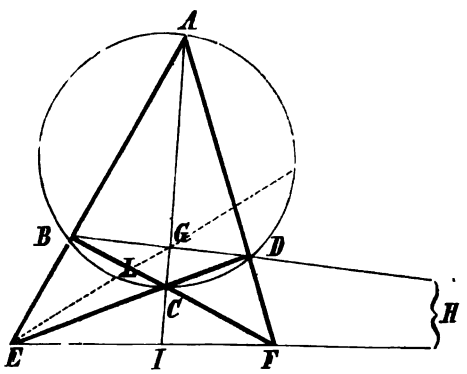


Fig. 194.

Durch Verbindung der Endpunkte zweier durch denselben Punkt in den Kreis gezogenen Sehnen entsteht ein dem Kreise eingeschriebenes Viereck. Es sei zunächst dieser Punkt G ein innerhalb des Kreises K (Fig. 194) liegender, AC und BD seien die durch ihn gezogenen Sehnen, und das Viereck $ABCD$ werde zum vollständigen Vierseit ergänzt. Dann trifft, wie in § 47 Nr. 6 gezeigt, die Verlängerung der innern Diagonale AC die äußere Diagonale EF in dem zu G zugeordneten harmonischen Teilpunkte I; die Polare von G muß also durch I gehen. Ebenso trifft die Verlängerung der innern Diagonale BD die äußere EF in dem zu G zugeordneten Teilpunkte H von EF; die Polare von G muß also auch durch H gehen. Diese Polare ist also die durch I und H gehende Gerade EF, und man hat den Satz:

Der Schnittpunkt der innern Diagonalen eines einem Kreise eingeschriebenen vollständigen Vierseits ist der Pol der äußern Diagonale.

Daher muß ferner die Polare des auf dieser Geraden liegenden Punktes F durch diesen Pol gehen, und zieht man noch EG, welche Gerade BC in dem zu F zugeordneten harmonischen Teilpunkte L schneiden muß, so ergibt sich, daß die Polare von F auch durch L gehen muß, daß also EG die Polare von F ist. Selbstverständlich kann man in gleicher Weise zeigen, daß GF die Polare von E ist.

Sind also durch einen außerhalb des Kreises liegenden Punkt F die Sehnen CB, DA gezogen, so ergeben die übrigen Verbindungslinien der Endpunkte dieser Sehnen das überschlagene Viereck $BCDA$, das zum vollständigen Vierseit ergänzt, die weitern Eckpunkte G und E erhält, und es gilt wieder der Satz, daß der Schnittpunkt F der Diagonalen AD, BC der Pol der Diagonale EG ist. Es gilt also allgemein der Satz:

Der Schnittpunkt zweier Sehnen eines Kreises ist der Pol zu derjenigen Geraden, welche die Schnittpunkte der beiden übrigen Paare von Verbindungslinien der Endpunkte dieser Sehnen verbindet.

Man kann diesen Satz auch wie folgt aussprechen: Verlängert man die Seiten eines einfachen Sehnenvierecks, so daß das zugehörige vollständige Vierseit ent-

steht, so bildet der Schnittpunkt der beiden innern Diagonalen mit den beiden äußern Eckpunkten ein Dreieck, in dem jeder Eckpunkt der Pol der gegenüberliegenden Seite ist.

Der vorstehende Satz gibt ein Mittel, um zu einem gegebenen Punkte die Polare in Bezug auf einen Kreis mittels des Lineals allein zu konstruieren. Ist nämlich E der gegebene, außerhalb des Kreises liegende Punkt, so ziehe man durch E zwei beliebige Transversalen, die den Kreis in B, A und C, D schneiden, ergänze durch die Geraden BC, AD, die einander in F schneiden, das vollständige Vierseit, ziehe seine nicht durch E gehenden Diagonalen AC und BD und verbinde ihren Schnittpunkt G mit F. Die Gerade GF ist die Polare von E. Dieselbe Konstruktion gilt, wenn der gegebene Punkt innerhalb des Kreises liegt. Man ziehe wieder durch G die beliebigen Transversalen AC, BD, ergänze das zugehörige vollständige Vierseit und bestimme die Schnittpunkte E von AB und CD, sowie F von AD und BC und ziehe endlich die gesuchte Polare EF von G.

Da die Polare EG den Kreis in den Endpunkten der zu F gehörigen Berührungssehne schneiden muß, so läßt sich mit Hilfe dieser Konstruktion auch die Aufgabe lösen: Von einem außerhalb eines Kreises gegebenen Punkt F die Tangenten an den Kreis nur mit Hilfe des Lineals zu legen.

4. Bestimmt man zu allen Eckpunkten einer geradlinigen Figur die Polaren in Beziehung auf einen Kreis, so bilden diese Polaren die Seiten einer zweiten Figur, die polar zu der ursprünglichen genannt wird. Da der Schnittpunkt der Polaren zweier Punkte A, B der Pol der Verbindungslinie dieser Punkte ist, so sind auch die Eckpunkte der Polarfigur die Pole der entsprechenden Seiten der ursprünglichen. Diese ist also die Polarfigur ihrer Polarfigur.

Allgemeiner kann man sagen, daß wenn zu jedem Punkte irgend einer Figur die Polare und zu jeder Geraden derselben der Pol in Beziehung auf einen Kreis konstruiert wird, diese Polaren und Pole eine zweite Figur bilden, und daß jede dieser beiden Figuren die Polarfigur der andern genannt wird.

Sind also zwei Figuren polar in Bezug auf einen Kreis, so entspricht jedem Punkte der einen eine Gerade der andern. Liegen Punkte der einen Figur auf einer Geraden, so gehen die entsprechenden Geraden der polaren Figur durch einen Punkt, den Pol der Geraden. Schneiden sich Gerade der einen Figur in einem Punkte, so liegen die entsprechenden Punkte der polaren Figur auf einer Geraden, der Polare des Punktes. Man kann diese merkwürdige Beziehung zweier in Bezug auf einen Kreis polaren Figuren auch in der Form aussprechen: Einer Punktreihe ist polar ein Strahlbüschel, dessen Scheitel der Pol des Trägers der Punktreihe ist; einem Strahlbüschel ist polar eine Punktreihe, deren Träger die Polare zum Scheitel des Büschels ist.

Daraus folgt: wenn ein Satz bewiesen worden ist, daß sich in einer Figur mehrere Gerade in einem Punkte schneiden, so gibt es einen entsprechenden Satz für die polare Figur, daß mehrere Punkte auf einer Geraden liegen. Die Sätze über die Lagenbeziehungen der geometrischen Grundgebilde müssen demnach immer paarweis existieren: zwei solche Sätze nennt man daher polar zueinander. Die einfachsten solcher polarer Sätze sind: Zwei Punkte liegen auf einer Geraden; zwei Gerade gehen durch einen Punkt.

Schneiden sich in einem Dreieck gewisse Ecktransversalen in einem Punkte, so müssen auch drei gewisse Punkte der Seiten auf einer Geraden liegen.

Einem vollständigen Viereck ist polar ein vollständiges Vierseit; daher müssen vier harmonische Punkte einem harmonischen Büschel polar sein und umgekehrt.

Die Polarfigur eines Tangenten-n-Ecks eines Kreises ist das Sehnen-n-Eck, dessen Eckpunkte die Berührungspunkte des ersten sind, und umgekehrt ist die Polarfigur eines Sehnen-n-Ecks des Kreises das Tangenten-n-Eck, dessen Berührungspunkte die Eckpunkte des ersten sind.

Es sei *HGKI* (Fig. 195) ein Tangentenviereck und *ABCD* das polare Sehnenviereck, und beide Vierecke seien zu vollständigen Vierseiten ergänzt. Dann ist der Schnittpunkt *X* der innern Diagonalen des Sehnenvierseits der Pol seiner äußern Diagonale *EF*. Ferner ist *E* der Schnittpunkt der Polare *AB* von *H* und der Polare *CD* von *K*, daher der Pol der Verbindungslinie dieser beiden Punkte, d. i. der Diagonale *HK* des Tangentenvierseits. Ebenso ist *F* als Schnittpunkt der Polare *AD* von *G* und der Polare *BC* von *I* der Pol der Diagonale *IG*. Hieraus folgt endlich, daß der Schnittpunkt der beiden Diagonalen *HK* und *IG* der Pol der Verbindungslinie *EF* ist und daß er folglich mit dem Punkte *X* zusammenfallen muß. Somit hat man den Satz: Die Diagonalen eines Tangentenvierecks und die Diagonalen des durch seine Berührungspunkte bestimmten Sehnenvierecks schneiden einander in einem Punkte.

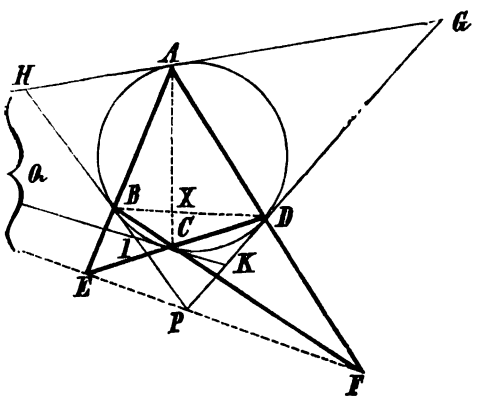


Fig. 195.

Da ferner der Schnittpunkt *X* der innern Diagonalen des vollständigen Tangentenvierseits zugleich der Pol seiner äußern Diagonale *PQ* sein muß, so ergibt sich aufs neue der in § 47 Nr. 4 bewiesene Satz, daß die vier äußern Eckpunkte *E*, *F*, *P*, *Q* in gerader Linie liegen.

Aus dem vorstehenden Satz erhält man noch die Folgerungen:

Da *E* der Pol von *XF*, zugleich aber der Pol von *HK* ist, so geht die Diagonale *HK* des Tangentenvierecks in ihrer Verlängerung durch den äußern Eckpunkt *F* des Sehnenvierseits, und ebenso muß die Verlängerung der Diagonale *GI* des ersten durch den äußern Eckpunkt *E* des zweiten gehen. — Die Punkte *E*, *F* und *P*, *Q* sind vier harmonische Punkte. — In einem vollständigen Tangentenvierseit ist jede Diagonale die Polare des Schnittpunkts der beiden andern.

5. Zu einem Sehnensechseck *ABCDEF* (Fig. 196) sei die Polarfigur in Bezug auf den ihm umschriebenen Kreis, das Tangentensechseck *MNOPQR* konstruiert.

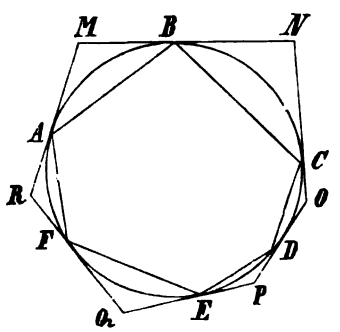


Fig. 196.

Nach dem Satze des PASCAL (§ 47 Nr. 4) liegen die drei Schnittpunkte der drei Paare gegenüberliegender Seiten des Sehnensechsecks auf einer Geraden. Da nun *M* der Pol der Seite *AB* und *P* der Pol der gegenüberliegenden Seite *ED* ist, so muß der Schnittpunkt *X* dieser beiden Seiten der Pol der Diagonale *MP* des Tangentensechsecks sein. Ebenso ist der Schnittpunkt *Y* von *BC* und *FE* der Pol der Diagonale *NQ* und der Schnittpunkt *Z* von *CD* und *FA* der Pol der Diagonale *OR*. Da nun die drei Pole *X*, *Y*, *Z* auf einer Geraden liegen, so folgt, daß die genannten drei Diagonalen einander in einem Punkte schneiden. Der so gefundene Satz:

In jedem Tangentensechseck schneiden sich die drei Diagonalen, welche je zwei einander gegenüberliegende Eckpunkte verbinden, in einem Punkte, ist mithin polar zum Satze des PASCAL und wird der Satz des BRIANCHON genannt; der Punkt ist der Punkt von BRIANCHON.

Der Punkt von BRIANCHON ist der Pol der Geraden von PASCAL. Mit Hilfe des Satzes von BRIANCHON läßt sich zu fünf Tangenten eines Kreises eine sechste nur mit Hilfe des Lineals konstruieren. Damit lassen sich sämtliche Tangenten eines Kreises finden, oder der Kreis kann durch seine Tangenten umhüllt werden.

Aus dem Satze des BRIANCHON folgen nachstehende Sätze, wenn man ein oder mehrere Paare aufeinander folgender Berührungspunkte der Seiten zusammenfallen läßt, so daß ein Eckpunkt als solcher verschwindet, indem er mit jenen beiden Berührungspunkten zusammenfällt.

Verbindet man in einem Tangentenfünfeck einen Eckpunkt mit dem Berührungspunkt der gegenüberliegenden Seite, so geht die Verbindungslinie durch den Schnittpunkt der beiden Diagonalen, die die Endpunkte dieser Seite mit den übrigen Eckpunkten verbinden.

Jede Diagonale eines Tangentenvierecks geht durch die Schnittpunkte der beiden Paare von Geraden, die die beiden andern Eckpunkte mit den Berührungspunkten je zweier anstoßender Seiten verbinden.

Die drei Ecktransversalen eines Tangentendreiecks, die durch je einen Berührungspunkt der Seiten gehen, schneiden einander in einem Punkte (vgl. § 47 Nr. 1).

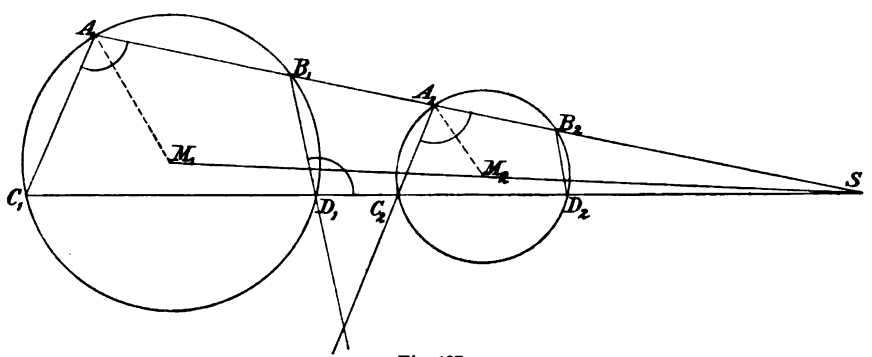


Fig. 197.

§ 50. Ähnlichkeitspunkte und Ähnlichkeitspolaren.

1. In § 36 ist gezeigt worden, daß zwei Kreise zwei Ähnlichkeitspunkte haben und daß diese die Centrale der Kreise im Verhältnis der Radien harmonisch teilen.

Ein Ähnlichkeitsstrahl bestimmt auf jedem der beiden Kreise zwei Punkte A_1, B_1 und A_2, B_2 (Fig. 197). Dann sind A_1 und A_2, B_1 und B_2 entsprechende Punkte als Endpunkte paralleler Radien, die in gleichem oder entgegengesetztem Sinne gezogen sind, je nachdem der Ähnlichkeitsstrahl durch den äußern oder innern Ähnlichkeitspunkt geht. Dagegen sind A_1 und B_2, B_1 und A_2 nicht entsprechende Punkte. Ebenso liegen auf einem zweiten durch denselben Ähnlichkeitspunkt gehenden Ähnlichkeitsstrahl die entsprechenden Punkte C_1 und C_2, D_1 und D_2, die nicht entsprechenden C_1 und D_2, D_1 und C_2. Dann sind die Verbindungslinien entsprechender Punkte A_1C_1 und A_2C_2, B_1D_1 und B_2D_2, ebenso A_1D_1 und A_2D_2, B_1C_1 und B_2C_2 parallel in gleichem oder entgegengesetztem Sinne, je nachdem die beiden Ähnlichkeitsstrahlen durch den äußern oder innern Ähnlichkeitspunkt gehen. Im ersten Falle ist $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_2C_2$; im Kreisviereck $A_1B_1D_1C_1$ ist aber auch $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_1D_1C_2$, folglich $\angle B_2A_2C_2 = \angle B_1D_1C_2$, d. h. $B_1D_1C_2A_2$ ist ein Kreisviereck. Da $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_2C_2 = \angle B_2D_2S$ ist, so liegen auch A_1, C_1, B_2, D_2 auf einem Kreise. Mit geringer Änderung des Beweises läßt sich auch zeigen, daß A_1, D_1, B_2, C_2

und B_1, C_1, A_2, D_2 auf einem Kreise liegen. Die gleich bezeichneten Punkte liegen auch dann auf Kreisen, wenn die beiden Ähnlichkeitsstrahlen durch den innern Ähnlichkeitspunkt gehen. Somit ist der Satz bewiesen: Zwei Paare nicht entsprechender Punkte auf zwei Ähnlichkeitsstrahlen, die durch denselben Ähnlichkeitspunkt gehen, liegen auf einem Kreise. Ihre Verbindungslinien schneiden daher nach § 48 Nr. 2 einander auf der Potenzlinie der beiden Kreise. So liegen demnach die Schnittpunkte der Geraden A_1C_1 und B_2D_2, B_1D_1 und A_2C_2, A_1D_1 und B_2C_2, B_1C_1 und A_2D_2 auf der Potenzlinie. Umgekehrt folgt, daß ein Kreis, der durch zwei auf demselben Ähnlichkeitsstrahl liegende, nicht entsprechende Punkte geht, die beiden Kreise in noch zwei nicht entsprechenden Punkten eines Ähnlichkeitsstrahls desselben Ähnlichkeitspunktes schneidet.

2. Drei Kreise haben drei Paare von Ähnlichkeitspunkten. Sind die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 und haben die Kreise M_1 und M_2 den äußern Ähnlichkeitspunkt S_3, den innern J_3 und entsprechend M_2 und M_3 die Ähnlichkeitspunkte S_1 und J_1, M_3 und M_1, ebenso S_2 und J_2, so ist, wenn die Radien der Kreise r_1, r_2, r_3 sind:

$$\frac{M_1S_3}{S_3M_2} = -\frac{r_1}{r_2}, \quad \frac{M_2S_1}{S_1M_3} = -\frac{r_2}{r_3}, \quad \frac{M_3S_2}{S_2M_1} = -\frac{r_3}{r_1},$$

$$\frac{M_1J_3}{J_3M_2} = \frac{r_1}{r_2}, \quad \frac{M_2J_1}{J_1M_3} = \frac{r_2}{r_3}, \quad \frac{M_3J_2}{J_2M_1} = \frac{r_3}{r_1}.$$

Daraus folgen die Beziehungen

$$\frac{M_1S_3}{S_3M_2} \cdot \frac{M_2S_1}{S_1M_3} \cdot \frac{M_3S_2}{S_2M_1} = -1,$$

$$\frac{M_1S_3}{S_3M_2} \cdot \frac{M_2J_1}{J_1M_3} \cdot \frac{M_3J_2}{J_2M_1} = -1,$$

Da nun auf den Seiten des Dreiecks $M_1M_2M_3$ die Punkte S_3, S_1, S_2 und J_3, J_1, J_2 liegen, so hat man den Satz:

Von den sechs Ähnlichkeitspunkten dreier Kreise liegen sowohl die drei äußern als auch je zwei innere mit dem nicht zugehörigen äußern auf einer Geraden.

Dieser Satz heißt der Lehrsatz des MONGE. Die vier Geraden, auf denen je drei der sechs Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise liegen, heißen die Ähnlichkeitsachsen der Kreise und zwar die, auf der die drei äußern Ähnlichkeitspunkte liegen, die äußere, die übrigen innere Ähnlichkeitsachsen.

Aus dem Lehrsatz von MONGE ergeben sich für gewisse Lagen der drei Kreise besondere Fälle. Berührt z. B. ein Kreis jeden von zwei andern gleichartig, d. h. beide von außen oder beide von innen, so geht die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte durch den äußern Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise; berührt dagegen der eine Kreis die beiden andern ungleichartig, den einen von außen, den andern von innen, so geht die Verbindungslinie durch den innern Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise.

Aus den obigen Gleichungen erhält man noch die weitern Beziehungen:

$$\frac{M_1J_3}{J_3M_2} \cdot \frac{M_2J_1}{J_1M_3} \cdot \frac{M_3J_2}{J_2M_1} = 1,$$

$$\frac{M_1J_3}{J_3M_2} \cdot \frac{M_2S_1}{S_1M_3} \cdot \frac{M_3S_2}{S_2M_1} = 1$$

und damit den Satz:

Die drei Verbindungslinien je eines der Mittelpunkte von drei Kreisen mit dem innern Ähnlichkeitspunkte der zwei andern schneiden einander in einem Punkt. Dasselbe gilt, wenn eine der drei Verbindungslinien nach dem innern, die übrigen nach den äußern Ähnlichkeitspunkten der andern Kreise gezogen werden.

3. Die Polaren der Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise in Beziehung auf diese nennt man die Ähnlichkeitspolaren der beiden Kreise und zwar die des äußern Ähnlichkeitspunktes die äußern und die des innern Ähnlichkeitspunktes die innern Ähnlichkeitspolaren.

Aus dem Lehrsatz von MONGE wurde bereits die Folgerung gezogen, daß die Verbindungslinie der beiden Punkte, in denen ein Kreis zwei andre Kreise berührt, durch einen Ähnlichkeitspunkt dieser Kreise geht. Berührt also ein Kreis O zwei andre Kreise M_1, M_2, so sind die beiden Berührungspunkte nicht entsprechende Punkte in Beziehung auf einen Ähnlichkeitspunkt dieser Kreise und zwar ist dieser Ähnlichkeitspunkt der äußere oder der innere, je nachdem O die Kreise M_1, M_2 gleichartig oder ungleichartig berührt.

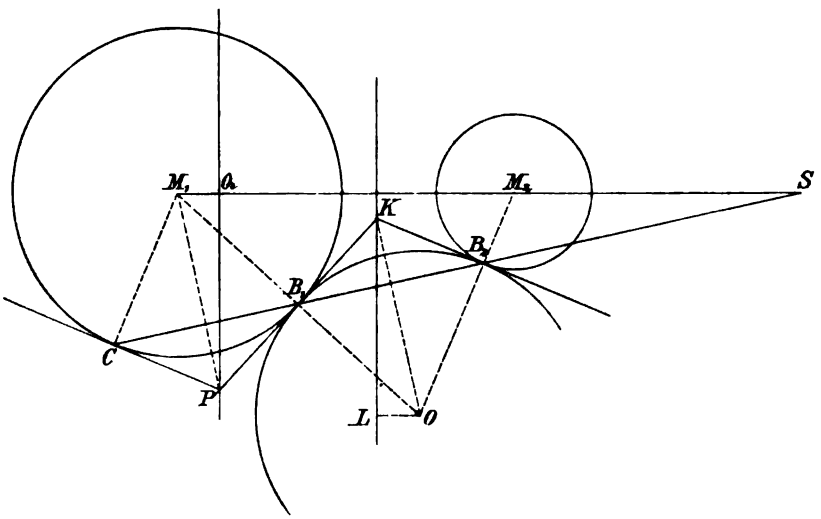


Fig. 198.

Man nennt den Ähnlichkeitsstrahl zweier Kreise, der durch ihre Berührungspunkte mit einem dritten Kreise geht, einen Berührungsstrahl der Kreise.

Werden zwei Kreise M_1, M_2 von einem dritten Kreise O (Fig. 198) gleichartig berührt, so geht jede ihrer äußern Ähnlichkeitspolaren durch den zu demselben Kreis gehörigen Pol des Berührungsstrahls; denn berührt der Kreis O den Kreis M_1 in B_1 und M_2 in B_2 und schneidet der Ähnlichkeitsstrahl SB_2B_1 den Kreis M_1 zum zweitenmal in C, so müssen sich die Polaren der drei auf einer Geraden liegenden Punkte C, B_1, S in einem Punkte schneiden. Nun sind die in C und B_1 an M_1 gelegten Tangenten die Polaren dieser Punkte, und somit ist der Schnittpunkt P dieser Tangenten der Punkt, durch den auch die Polare von S für den Kreis M_1 gehen muß. Dieser Punkt P ist ferner als Schnittpunkt der Polaren CP, B_1P der Pol von CB_1, d. h. der Pol des Berührungsstrahls SC für den Kreis M_1.

In entsprechender Weise kann bewiesen werden, daß, wenn zwei Kreise von einem dritten ungleichartig berührt werden, jede ihrer innern Ähnlichkeitspolaren durch den zu demselben Kreise gehörenden Pol des Berührungsstrahls geht.

Werden zwei Kreise M_1, M_2 von einem dritten Kreise O gleichartig berührt, so verhält sich die Entfernung des Mittelpunkts O von der Potenzlinie der

Kreise M_1, M_2 zu der Entfernung des Mittelpunkts irgend eines dieser Kreise von der äußern Ähnlichkeitspolare desselben Kreises wie der Radius ϱ von O zu dem Radius r dieses Kreises. Die Potenzlinie der Kreise M_1, M_2 geht nämlich durch den Schnittpunkt K der Potenzlinie von O und M_1 und der Potenzlinie von O und M_2, d. h. durch den Schnittpunkt der in den Berührungspunkten B_1 und B_2 an O gelegten Tangenten. Die durch K senkrecht zur Centrale M_1M_2 gehende Gerade ist also diese Potenzlinie. Da die Ähnlichkeitspolare PQ ebenfalls senkrecht zu M_1M_2 ist, so ist PQ der Potenzlinie parallel. Zieht man nun OL senkrecht zu ihr, sowie die Tangente KB_1P und verbindet O mit K, so ist LO parallel zu M_1Q, und da OK senkrecht zu der Berührungssehne B_1B_2 des Punktes K für den Kreis O und M_1P senkrecht auf B_1C steht, so ist M_1P parallel zu OK, also $\triangle M_1PQ \sim \triangle LOK$, folglich

$$\frac{OL}{M_1Q} = \frac{OK}{M_1P} .$$

Nun ist

$$\frac{OK}{M_1P} = \frac{OB_1}{M_1B_1} = \frac{\varrho}{r_1} ,$$

also

$$\frac{OL}{M_1Q} = \frac{\varrho}{r_1} .$$

Analog läßt sich der Satz beweisen: Werden zwei Kreise M_1, M_2 von einem dritten Kreise O ungleichartig berührt, so verhält sich die Entfernung des Mittelpunkts O von der Potenzlinie der Kreise M_1, M_2 zu der Entfernung des Mittelpunkts eines dieser Kreise von der innern Ähnlichkeitspolare desselben Kreises, wie der Radius von O zu dem Radius dieses Kreises.

Es mögen ferner drei Kreise M_1, M_2, M_3 von einem vierten Kreise O gleichartig berührt werden. Man konstruiere die Potenzlinie von M_1 und M_2 sowie die äußere Ähnlichkeitspolare dieser Kreise für M_1 und ziehe OL_1 senkrecht zur Potenzlinie, M_1Q_1 senkrecht zur Ähnlichkeitspolare. In gleicher Weise konstruiere man die Potenzlinie, die äußere Ähnlichkeitspolare und die Senkrechten OL_2 und M_1Q_2 für die Kreise M_1 und M_3. Der Schnittpunkt P der Potenzlinien ist der Potenzpunkt und der Schnittpunkt P_1 der Ähnlichkeitspolaren der Pol der äußern Ähnlichkeitsachse der Kreise M_1, M_2, M_3. Nun sind die Seiten des Vierecks $M_1Q_1P_1Q_2$ paarweis den Seiten des Vierecks OL_1PL_2 parallel, und es ist $M_1Q_1 : OL_1 = M_1Q_2 : OL_2 = r : \varrho$. Man kann ferner leicht zeigen, daß auch $M_1P_1 \parallel OP$ und $M_1P_1 : OP = r : \varrho$ ist. Hieraus folgt, daß P_1B_1P eine Gerade sein muß, oder der Satz: Werden drei Kreise von einem vierten gleichartig berührt, so liegt der Potenzpunkt dieser Kreise mit dem Pol ihrer äußern Ähnlichkeitsachse für irgend einen der Kreise mit dem Berührungspunkte dieses Kreises auf einer Geraden.

Analog läßt sich wieder der entsprechende Satz beweisen: Werden drei Kreise von einem vierten ungleichartig berührt, so liegt der Potenzpunkt der Kreise mit dem Pol einer ihrer innern Ähnlichkeitsachsen für einen dieser Kreise mit dem Berührungspunkt desselben Kreises auf einer Geraden. Die betreffende innere Ähnlichkeitsachse ist diejenige, die den äußern Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise enthält, die von dem vierten Kreise gleichartig berührt werden.

Da der Potenzpunkt P der Kreise M_1, M_2, M_3, der Berührungspunkt B_1 von M_1 mit dem vierten Kreise O und der Pol P_1 der betreffenden Ähnlichkeitsachse A_1A_2 zufolge der beiden vorhergehenden Sätze stets auf einer Geraden liegen, so gehen die Polaren dieser drei Punkte für den Kreis M_1 durch einen Punkt. Nun ist die Polare für B_1 die durch B_1 gehende gemeinschaftliche Tangente der Kreise M_1 und O und die Polare von P_1 die Ähnlichkeitsachse A_1A_2.

Der Schnittpunkt dieser beiden Polaren ist also zugleich ihr Schnittpunkt mit der Polare von P und man hat den Satz:

Werden drei Kreise von einem vierten berührt, und konstruiert man die drei Polaren des Potenzpunktes der Kreise in Beziehung auf diese, so schneidet jede dieser Polaren eine der vier Ähnlichkeitsachsen der drei Kreise in einem Punkte, der so beschaffen ist, daß eine von ihm an den zugehörigen Kreis gelegte Tangente diesen in seinem Berührungspunkt mit dem vierten Kreise trifft.

4. In allen vorstehenden Untersuchungen kann jeder der Kreise M_1, M_2, M_3 durch einen Punkt ersetzt werden, indem man sich denkt, daß der stetig abnehmende Radius dieses Kreises gleich Null geworden sei. In gleicher Weise kann man sich auch den Radius stetig zunehmend denken und ihn unendlich groß annehmen, wodurch der Kreis in eine Gerade übergeht.

Für einen Kreis oder eine Gerade und einen Punkt ist offenbar der Punkt selbst gleichzeitig äußerer und innerer Ähnlichkeitspunkt. Für einen Kreis und eine Gerade sind die Endpunkte des auf der Geraden senkrechten Durchmessers des Kreises die Ähnlichkeitspunkte.

Damit ist ein Mittel gegeben, das in § 42 Nr. 3 für die verschiedenen einzelnen Fälle gelöste Berührungsproblem des APPOLLONIUS allgemein zu lösen. Als der allgemeine Fall dieser Aufgabe kann für die Ebene der betrachtet werden, bei dem verlangt wird, einen Kreis zu konstruieren, der drei gegebene Kreise berührt. Läßt man einen oder mehrere dieser Kreise in Punkte oder Gerade übergehen, so erhält man die Auflösungen der besondern Fälle des allgemeinen Problems. Die Konstruktion des gesuchten Kreises ergibt sich wie folgt:

Man konstruiere den Potenzpunkt P der drei gegebenen Kreise M_1, M_2, M_3 und eine ihrer Ähnlichkeitsachsen A_1A_2, ferner die Polare von P für einen der gegebenen Kreise, z. B. M_1, und ziehe von dem Schnittpunkt dieser Polare mit der Ähnlichkeitsachse eine Tangente an diesen Kreis M_1. Der Berührungspunkt B_1 dieser Tangente ist zugleich der Berührungspunkt zwischen dem Kreise M_1 und dem gesuchten O, und der Mittelpunkt O ist der Schnittpunkt der durch B_1 und den Mittelpunkt M_1 gehenden Geraden mit der von P auf A_1A_2 gefällten Senkrechten. — Ist bei dieser Konstruktion die gewählte Ähnlichkeitsachse A_1A_2 die äußere, so berührt der gesuchte Kreis O die drei gegebenen gleichartig, ist dagegen A_1A_2 eine innere Ähnlichkeitsachse, so berührt O diejenigen der gegebenen Kreise gleichartig, deren äußerer Ähnlichkeitspunkt auf A_1A_2 liegt, den dritten aber ungleichartig. — Da man jede der vier Ähnlichkeitsachsen benutzen kann und dabei jedesmal von ihrem Schnittpunkt mit der Polare zwei Tangenten an M_1 möglich sein können, so kann die Anzahl der Kreise O, die der Aufgabe genügen, bis zu acht betragen.

Die Aufgabe erfordert daher eine Determination, in der nach den verschiedenen Fällen der gegenseitigen Lage und der Größe der gegebenen Kreise, die Zahl der möglichen Auflösungen festgestellt werden muß.

Drittes Buch.

Trigonometrie.

Neu bearbeitet von R. HENKE in Dresden.

Inhaltsverzeichnis.

		Seite
§ 1.	Begriff der Trigonometrie	417
§ 2.	Die trigonometrischen Funktionen eines spitzen Winkels	417
§ 3.	Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen eines spitzen Winkels	419
§ 4.	Grenzwerte der trigonometrischen Funktionen spitzer Winkel	421
§ 5.	Berechnung der trigonometrischen Funktionen einiger spitzer Winkel. Trigonometrische Tafeln	423
§ 6.	Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck	427
§ 7.	Das allgemeine Dreieck. Erweiterung des Begriffs der trigonometrischen Funktionen auf stumpfe Winkel	432
§ 8.	Beziehung des Dreiecks zum Umkreis	435
§ 9.	Goniometrische Formeln, die sich aus der Beziehung des Dreiecks zum Umkreis ergeben	443
§ 10.	Der allgemeine pythagoreische Lehrsatz. Der Cosinussatz	449
§ 11.	Beziehungen des Dreiecks zum Inkreise und einem Ankreise	458
§ 12.	Beziehungen des Dreiecks zu den Berührungskreisen und dem FEUERBACHschen Kreise	469
§ 13.	Goniometrie	476
§ 14.	Weitere Anwendungen der Trigonometrie	485

Trigonometrie.

§ 1. Begriff der Trigonometrie.

Die Trigonometrie im engern Sinne ist zunächst eine notwendige Ergänzung der Planimetrie, indem sie die allgemeine Aufgabe zu lösen lehrt, aus drei zur Bestimmung eines Dreiecks notwendigen und hinreichenden Stücken, andre durch Rechnung zu finden. Dabei sind unter Stücken des Dreiecks nicht nur die unmittelbaren Bestimmungsstücke: Seiten und Winkel, sondern auch mittelbare, das sind verschiedene Strecken, Flächen und Winkel am Dreieck, zu verstehen.

In der Planimetrie wird gezeigt, wie man derartige Aufgaben durch Konstruktion lösen kann; aber nur in wenigen Fällen kann man die gesuchten Stücke durch Rechnung bestimmen. Man kann z. B. aus zwei Winkeln eines Dreiecks den dritten; aus zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks die dritte; aus den drei Seiten eines Dreiecks den Inhalt, die Höhen, die Mittellinien, die Radien des Umkreises und der Berührungskreise berechnen. Dagegen ist es in der Planimetrie nicht möglich, in dem einfachen Falle, daß von einem Dreieck zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind, die dritte Seite durch Rechnung zu finden. Man weiß zwar, daß, wenn die zwei Seiten dieselben bleiben, die dritte desto größer sein muß, je größer der ihr gegenüberliegende Winkel wird, aber man weiß nicht, wie sich diese Seite mit dem Winkel ändert. Die Planimetrie lehrt keine Beziehung zwischen der Länge der Seite und der Größe des Winkels, die zur Rechnung verwendet werden könnte. Solche Beziehungen zu finden und zu benutzen, ist die Aufgabe der Trigonometrie.

Indem die trigonometrischen Beziehungen auf irgend welche planimetrische Figuren und räumliche Gebilde angewendet werden, ist die Trigonometrie im weitern Sinne ein notwendiges Hilfsmittel der Geometrie, um Eigenschaften von Raumgebilden zu ermitteln und Zusammenhänge aufzudecken, die ohne sie verborgen bleiben würden. Sogar losgelöst von geometrischen Beziehungen, wird die Trigonometrie in verschiedenen Zweigen der Algebra und Analysis angewendet.

§ 2. Die trigonometrischen Funktionen eines spitzen Winkels.

1. Die Gestalt eines rechtwinkligen Dreiecks ist bestimmt durch einen spitzen Winkel. Alle rechtwinkligen Dreiecke, die denselben spitzen Winkel enthalten, sind ähnlich. Dann haben in allen diesen rechtwinkligen Dreiecken die Verhältnisse entsprechender Seiten dieselben, in andern rechtwinkligen Dreiecken andre Werte. Die Seitenverhältnisse eines rechtwinkligen Dreiecks, das einen gewissen spitzen Winkel enthält, sind also von diesem Winkel abhängig.

Ist eine Größe von einer andern derart abhängig, daß sie denselben Wert annimmt, wenn die zweite den gleichen Wert erhält, daß sie sich aber

ändert, wenn die andre sich ändert, so nennt man die erste Größe eine Funktion der zweiten. Der Inhalt eines Quadrats z. B. ist eine Funktion der Seite; der Ausdruck $x^2 - 5x + 6$ ist eine Funktion der Zahl x; die Längenausdehnung eines Metallstabs ist eine Funktion der Temperaturerhöhung.

Die sechs Seitenverhältnisse eines rechtwinkligen Dreiecks, das einen gewissen spitzen Winkel enthält, heißen die trigonometrischen Funktionen dieses spitzen Winkels. Sie sind reelle, positive, im allgemeinen irrationale Zahlen. Jede von ihnen hat einen besondern Namen und eine unterscheidende Bezeichnung. Man nennt das Verhältnis

der dem Winkel gegenüberliegenden Kathete zur Hypotenuse den Sinus,
der ihm anliegenden Kathete zur Hypotenuse den Cosinus,
der ihm gegenüberliegenden Kathete zur anliegenden die Tangente *(tangens)*,
der ihm anliegenden Kathete zur gegenüberliegenden die Cotangente *(cotangens)*
der Hypotenuse zur anliegenden Kathete die Sekante *(secans)*,
der Hypotenuse zur gegenüberliegenden Kathete die Cosekante *(cosecans)*,
des spitzen Winkels.

Ist in dem rechtwinkligen Dreieck (Fig. 199) a die dem spitzen Winkel α gegenüberliegende, b die ihm anliegende Kathete und c die Hypotenuse, so ist mit Abkürzung der Namen der trigonometrischen Funktionen:

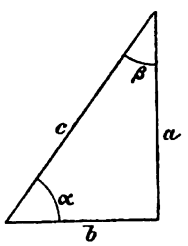


Fig. 199.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c},$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b}, \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a},$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b}, \qquad \csc\alpha = \frac{c}{a}.$$

2. In demselben rechtwinkligen Dreieck, das den spitzen Winkel α enthält, liegt auch der spitze Winkel $\beta = 90^0 - \alpha$, das Komplement von α. Die dem Winkel α gegenüberliegende Kathete ist für den Winkel β die anliegende und umgekehrt. Man erhält also die trigonometrischen Funktionen von β, indem man in denen von α die Katheten a und b miteinander vertauscht. Es ist somit

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \cos\alpha, \qquad \cos\beta = \frac{a}{c} = \sin\alpha,$$

$$\tan\beta = \frac{b}{a} = \cot\alpha, \qquad \cot\beta = \frac{a}{b} = \tan\alpha,$$

$$\sec\beta = \frac{c}{a} = \csc\alpha, \qquad \csc\beta = \frac{c}{b} = \sec\alpha.$$

Da $\cos\alpha = \sin\beta$ ist, erklärt sich die Bezeichnung Co-sinus als zusammengezogen aus complementi sinus und entsprechend die der übrigen Cofunktionen. Es gilt also der Satz: Wenn zwei spitze Winkel α und β Komplemente sind, also $\alpha + \beta = 90^0$ ist, so sind die Funktionen des einen gleich den Cofunktionen des andern und umgekehrt. Hieraus folgt:

$$\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha, \quad \tan(90^0 - \alpha) = \cot\alpha, \quad \text{u. s. w.}$$

$$\sin(45^0 + \varphi) = \cos(45^0 - \varphi), \quad \cos(45^0 + \varphi) = \sin(45^0 - \varphi),$$

$$\tan(45^0 + \varphi) = \cot(45^0 - \varphi), \quad \text{u. s. w.}$$

Auch sieht man, daß für den Winkel von 45^0 jede Funktion gleich der entsprechenden Cofunktion sein muß.

3. Ein rechtwinkliges Dreieck, das einen spitzen Winkel $\alpha = 30^0$ enthält, läßt sich als Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks ansehn, dessen Höhe die a anliegende Kathete ist (Fig. 200). Dann ist $a = \frac{1}{2}c$, mithin

$$\sin 30^0 = \tfrac{1}{2} \quad .$$

Diese Gleichung drückt kurz den Satz aus: In jedem rechtwinkligen Dreieck, das einen Winkel von 30^0 enthält, ist die diesem Winkel gegenüberliegende Kathete die Hälfte der Hypotenuse; oder dessen Umkehrung: Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck eine Kathete die Hälfte der Hypotenuse ist, so liegt dieser Kathete ein Winkel von 30^0 gegenüber. Da noch $b = \frac{1}{2}c\sqrt{3}$ ist und das rechtwinklige Dreieck auch das Komplement von 30^0 enthält, so hat man:

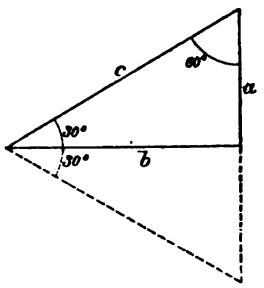


Fig. 200.

$$\sin 30^0 = \tfrac{1}{2} = \cos 60^0\,, \quad \cos 30^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \sin 60^0\,, \quad \tan 30^0 = \sqrt{\tfrac{1}{3}} = \cot 60^0\,,$$

$$\cot 30^0 = \sqrt{3} = \tan 60^0\,, \quad \sec 30^0 = 2\sqrt{\tfrac{1}{3}} = \csc 60^0\,, \quad \csc 30^0 = 2 = \sec 60^0 \quad .$$

Jedes rechtwinklige Dreieck, das den Winkel $\alpha = 45^0$ enthält, ist gleichschenklig. Daher ist $a = b$ und die Eigenschaft eines rechtwinkligen Dreiecks, das auch gleichschenklig ist, läßt sich durch die Gleichung ausdrücken:

$$\tan 45^0 = 1 = \cot 45^0 \quad .$$

Da noch $c = a\sqrt{2}$ ist, so erhält man auch

$$\sin 45^0 = \cos 45^0 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,, \qquad \sec 45^0 = \csc 45^0 = \sqrt{2} \quad .$$

§ 3. Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen eines spitzen Winkels.

1. Die Gestalt eines rechtwinkligen Dreiecks ist ebenso wie durch einen spitzen Winkel durch ein Seitenverhältnis bestimmt. Daraus folgt, daß durch eine Funktion eines spitzen Winkels die übrigen bestimmt sind. Daher muß es Beziehungen zwischen den sechs Funktionen geben, die dazu dienen, aus einer Funktion die übrigen fünf zu berechnen.

Man sieht sofort, daß immer zwei Funktionen des spitzen Winkels α reziprok sind; nämlich $\sin\alpha$ und $\csc\alpha$, $\cos\alpha$ und $\sec\alpha$, $\tan\alpha$ und $\cot\alpha$. Diese Beziehung läßt sich durch die Gleichungen ausdrücken:

$$1) \quad \begin{cases} \sin\alpha \cdot \csc\alpha = 1 \quad , \\ \cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1 \quad , \\ \tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1 \quad . \end{cases}$$

Mit Hilfe der Beziehung 1) kann man aus den drei ersten Funktionen die drei übrigen bestimmen; denn wenn

$$\sin\alpha = m\,, \quad \cos\alpha = n\,, \quad \tan\alpha = p$$

ist, so hat man

$$\cot\alpha = \frac{1}{p}\,, \qquad \sec\alpha = \frac{1}{n}\,, \qquad \csc\alpha = \frac{1}{m} \quad .$$

2. Weiter erhält man aus

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c}\,, \qquad \frac{b}{a} = \frac{b}{c} : \frac{a}{c}$$

die Beziehungen

$$2)\quad \begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \ ; \\ \tan\alpha \cdot \cos\alpha = \sin\alpha, \quad \cot\alpha \cdot \sin\alpha = \cos\alpha \ . \end{cases}$$

Ist also $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ bekannt, so erhält man aus 2) $\tan\alpha$; ebenso ergibt sich aus $\tan\alpha$ und $\cos\alpha$ zunächst $\sin\alpha$ oder aus $\cot\alpha$ und $\sin\alpha$ zunächst $\cos\alpha$. Die drei übrigen Funktionen erhält man dann aus 1).

3. Nach dem pythagoreischen Lehrsatz ist

$$a^2 + b^2 = c^2 \ .$$

Diese Gleichung gibt durch c^2 dividiert:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 \ ,$$

also

$$3)\qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \ ,$$

wobei $\sin^2\alpha$ für $(\sin\alpha)^2$ geschrieben ist; d. h. die Quadrate von Sinus und Cosinus eines spitzen Winkels ergänzen sich zu 1.

Ist also $\sin\alpha$ oder $\cos\alpha$ gegeben, so erhält man aus 3) zunächst

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}, \quad \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \ ;$$

dann aus 2) $\tan\alpha$ und aus 3) die übrigen drei Funktionen.

Ist z. B. $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ gegeben, so hat man

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}, \quad \cos\alpha = \frac{4}{5}, \quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{4} \ ,$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{4}{3}, \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{5}{4}, \quad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{5}{3} \ .$$

Ebenso erhält man aus

$$\cos\delta = \frac{p - q}{p + q} \ ,$$

$$\sin^2\delta = 1 - \cos^2\delta = \frac{4pq}{(p+q)^2}, \quad \sin\delta = \frac{2\sqrt{pq}}{p+q}; \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \frac{2\sqrt{pq}}{p-q} \ ,$$

$$\cot\delta = \frac{p-q}{2\sqrt{pq}}, \quad \sec\delta = \frac{p+q}{p-q}, \quad \csc\delta = \frac{p+q}{2\sqrt{pq}} \ .$$

Man kann also aus Sinus oder Cosinus eines spitzen Winkels die übrigen Funktionen finden.

4. Die Beziehungen 1), 2), 3) sind nicht ohne weiteres anwendbar, wenn $\tan\alpha$ oder $\cot\alpha$ gegeben ist und eine andre Funktion, die nicht der gegebenen reziprok ist, bestimmt werden soll. Dividiert man aber die Gleichung

$$a^2 + b^2 = c^2$$

noch durch b^2 und a^2, so erhält man

$$1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{c}{b}\right)^2, \quad 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \ ;$$

also

$$4)\qquad 1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha, \quad 1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha \ .$$

Diese Beziehungen 4) gestatten, aus $\tan\alpha$ oder $\cot\alpha$ direkt $\sec\alpha$ oder $\csc\alpha$ zu finden und dann mit Benutzung von 2) und 1) die übrigen Funktionen.

Ist z. B. $\tan\varepsilon = \frac{8}{15}$, so ergibt sich zunächst

$$\sec^2\varepsilon = 1 + \frac{64}{225} = \frac{289}{225}, \quad \sec\varepsilon = \frac{17}{15}, \quad \cos\varepsilon = \frac{15}{17}$$

und nun

$$\sin\varepsilon = \tan\varepsilon \cdot \cos\varepsilon = \frac{8}{17}, \quad \cot\varepsilon = \frac{15}{8}, \quad \csc\varepsilon = \frac{17}{8}.$$

Die Beziehungen 4) sind von 3) abhängig, weil beide aus dem pythagoreischen Lehrsatze hergeleitet sind. In der Tat kann man 4) direkt aus 3) herleiten, wenn man die Gleichung

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

durch $\cos^2\alpha$ und durch $\sin^2\alpha$ dividiert und die Beziehungen 2) und 1) benutzt.

Man bemerke, daß wenn Sinus oder Cosinus gegeben ist, zunächst die Beziehung 3), wenn dagegen Tangente oder Cotangente gegeben ist, zunächst die Beziehung 4) zur Anwendung kommt; niemals ist in einer Aufgabe von beiden Beziehungen Gebrauch zu machen.

Die Beziehungen 3) und 4) erfordern zur Bestimmung einer Funktion das Ausziehen einer Quadratwurzel. Ist daher auch die gegebene Funktion eine rationale Zahl, so werden doch im allgemeinen die übrigen Funktionen außer derjenigen, die der reziproke Wert der gegebenen ist, irrational sein.

Die Beziehungen 4) können auch dazu dienen, aus Sekante oder Cosekante zunächst die Tangente oder Cotangente zu finden. Doch wird man aus ihnen bequemer Cosinus oder Sinus als reziproke Werte bestimmen und sich dann der Beziehung 3) bedienen. Aus diesem Grunde pflegen die Funktionen Sekante und Cosekante überhaupt seltner gebraucht zu werden.

5. Die Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen können auch dazu dienen, eine Funktion durch irgend eine andre auszudrücken. So erhält man noch folgende oft benutzte Formeln:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha},$$

$$\cot\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}},$$

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}},$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}.$$

§ 4. Grenzwerte der trigonometrischen Funktionen spitzer Winkel.

1. Sinus und Cosinus eines spitzen Winkels sind als Verhältnisse der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks zur Hypotenuse, echte Brüche, also Zahlen zwischen 0 und 1. Hat man zwei rechtwinklige Dreiecke mit derselben Hypotenuse (Fig. 201), so ist in dem Dreieck mit dem größern spitzen Winkel φ die gegenüberliegende Kathete größer, die anliegende aber kleiner als in dem rechtwinkligen Dreieck mit dem kleinern spitzen Winkel ψ. Es ist also, da

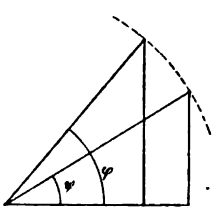


Fig. 201.

$$\varphi > \psi, \quad \sin\varphi > \sin\psi, \quad \cos\varphi < \cos\psi.$$

Denkt man sich den spitzen Winkel von ψ bis φ stetig zunehmend, indem der eine Endpunkt der Hypotenuse fest bleibt, der andre sich stetig auf einem Kreis-

bogen bewegt, so werden sich auch die Katheten stetig ändern und damit die Funktionen Sinus und Cosinus. Wächst also der Winkel stetig, so wird der Sinus ebenfalls stetig wachsen, der Cosinus dagegen stetig abnehmen.

Die spitzen Winkel liegen zwischen den Grenzen 0^0 und 90^0. Diese Grenzwerte selbst können in rechtwinkligen Dreiecken nicht vorkommen; sie haben also streng genommen keine trigonometrischen Funktionen. Es ist aber eine notwendige Erweiterung des Begriffs der trigonometrischen Funktionen, wenn man den Grenzwerten der spitzen Winkel die Grenzwerte der trigonometrischen Funktionen beilegt und also festsetzt, daß

$$\sin 0^0 = 0\,, \quad \sin 90^0 = 1\,; \quad \cos 0^0 = 1\,, \quad \cos 90^0 = 0$$

sein soll. Diese Grenzwerte genügen der Beziehung 3) in § 3; denn es ist:

$$\sin^2 0^0 + \cos^2 0^0 = 1\,, \quad \sin^2 90^0 + \cos^2 90^0 = 1\,.$$

2. Tangente und Cotangente eines spitzen Winkels können als Verhältnisse der beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks jeden Wert zwischen 0 und ∞ annehmen. Hat man zwei rechtwinklige Dreiecke (Fig. 202), in denen die den spitzen Winkeln φ und ψ anliegenden Katheten gleich sind, so wird dem größern spitzen Winkel φ die größere, dem kleinern ψ die kleinere Kathete gegenüberliegen. Mithin ist da

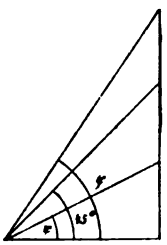


Fig. 202.

$$\varphi > \psi\,, \quad \tan\varphi > \tan\psi\,.$$

Denkt man sich den Winkel stetig wachsend, so wird auch die gegenüberliegende Kathete und damit die Tangente des spitzen Winkels stetig wachsen. Für die Grenzwerte der spitzen Winkel wird man also

$$\tan 0^0 = 0\,, \quad \tan 90^0 = \infty$$

zu setzen haben. Diese Grenzwerte genügen der Beziehung 2) in § 3, denn man hat

$$\tan 0^0 = \frac{\sin 0^0}{\cos 0^0} = \frac{0}{1} = 0\,,$$

$$\tan 90^0 = \frac{\sin 90^0}{\cos 90^0} = \frac{1}{0} = \infty\,.$$

Die Cotangente eines spitzen Winkels ist der reziproke Wert der Tangente: sie nimmt also stetig ab, wenn der Winkel stetig wächst. Es ist daher für

$$\varphi > \psi\,, \quad \cot\varphi < \cot\psi\,.$$

Als Grenzwerte der Cotangente hat man zu nehmen:

$$\cot 0^0 = \frac{1}{\tan 0^0} = \frac{1}{0} = \infty\,, \qquad \cot 90^0 = \frac{1}{\tan 90^0} = \frac{1}{\infty} = 0\,.$$

Die seltner gebrauchten trigonometrischen Funktionen Sekante und Cosekante sind als reziproke Werte von Cosinus und Sinus unechte Brüche, also Zahlen zwischen 1 und ∞. Die Sekante wächst, wenn der Winkel wächst, die Cosekante nimmt ab, wenn der Winkel wächst. Als Grenzwerte sind zu setzen:

$$\sec 0^0 = \frac{1}{\cos 0^0} = 1\,, \qquad \sec 90^0 = \frac{1}{\cos 90^0} = \infty\,;$$

$$\csc 0^0 = \frac{1}{\sin 0^0} = \infty\,, \qquad \csc 90^0 = \frac{1}{\sin 90^0} = 1\,.$$

Diese Festsetzungen genügen den Beziehungen 4) in § 3; denn man hat:

$$1 + \tan^2 0^0 = \sec^2 0^0\,, \quad 1 + \tan^2 90^0 = \sec^2 90^0\,;$$
$$1 + \cot^2 0^0 = \csc^2 0^0\,, \quad 1 + \cot^2 90^0 = \csc^2 90^0\,.$$

3. Die Zusammenstellung dieser Resultate ergibt den Satz:

Die $\begin{matrix}\text{Funktionen}\\ \text{Cofunktionen}\end{matrix}$ eines spitzen Winkels $\begin{matrix}\text{wachsen,}\\ \text{nehmen ab,}\end{matrix}$ wenn der Winkel wächst; daher haben

die $\begin{matrix}\text{Funktionen}\\ \text{Cofunktionen}\end{matrix}$ bei 0^0 ihren $\begin{matrix}\text{kleinsten,}\\ \text{größten,}\end{matrix}$ bei 90^0 ihren $\begin{matrix}\text{größten}\\ \text{kleinsten}\end{matrix}$ Wert.

§ 5. Berechnung der trigonometrischen Funktionen einiger spitzer Winkel. Trigonometrische Tafeln.

1. In § 2 Nr. 3 sind die trigonometrischen Funktionen der Winkel von 30^0, 45^0, 60^0 bestimmt worden. Rechtwinklige Dreiecke, die diese spitzen Winkel enthalten, sind planimetrisch leicht zu konstruieren. In gewissen einfachen Fällen kann man die Peripherie eines Kreises durch elementare Konstruktion in n gleiche Teile teilen (*Planimetrie* § 32 Nr. 2) und daher den Winkel $\frac{360^0}{n}$ als Centriwinkel des Kreises darstellen. Die Sehne des n-ten Teils der Kreisperipherie ist dann s_n die Seite des regelmäßigen Sehnen-n-Ecks. Zieht man in einem Bestimmungsdreieck (Fig. 203) die Höhe, so ist in einem der beiden kongruenten rechtwinkligen Dreiecke, in die das gleichschenklige Dreieck zerlegt wird, der spitze Winkel $\frac{180^0}{n}$ enthalten; die Hypotenuse ist der Radius r des Kreises und die dem Winkel gegenüberliegende Kathete ist $\frac{1}{2}s_n$. Da sich nun in allen den Fällen, wo die Konstruktion des Winkels $\frac{360^0}{n}$ elementar ausführbar ist, s_n durch r algebraisch ausdrücken läßt, so hat man

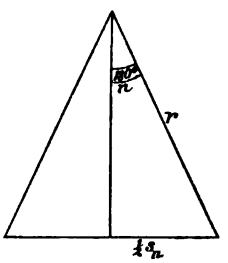


Fig. 203.

$$\sin\frac{180^0}{n} = \frac{\frac{1}{2}s_n}{r} = \frac{s_n}{2r} \quad .$$

In jedem solchen Falle erhält man also den Wert des Sinus eines gewissen Winkels. Aus dem Sinus lassen sich dann nach § 3 Nr. 3 die übrigen Funktionen berechnen.

Die einfachsten Konstruktionen ergeben sich für $n = 4$, $n = 6$, $n = 10$.

Für $n = 4$ erhält man:

$$\sin 45^0 = \frac{s_4}{2r} = \frac{r\sqrt{2}}{2r} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

in Übereinstimmung mit § 2 Nr. 3.

Für $n = 6$ ergibt sich:

$$\sin 30^0 = \frac{s_6}{2r} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2} \quad ,$$

wie ebenso schon gefunden wurde.

Für $n = 10$ ist

$$\sin 18^0 = \frac{s_{10}}{2r} = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) \quad ,$$

woraus sich weiter ergibt:

$$\cos 18^0 = \sqrt{1 - \sin^2 18^0} = \sqrt{1 - \tfrac{1}{16}(6 - 2\sqrt{5})} = \tfrac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \quad ,$$

$$\tan 18^0 = \frac{\sin 18^0}{\cos 18^0} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{20}}$$
$$= \sqrt{1-\tfrac{2}{5}\sqrt{5}} \quad ,$$

$$\cot 18^0 = \frac{1}{\tan 18^0} = \sqrt{\frac{5}{5-2\sqrt{5}}} = \sqrt{5+2\sqrt{5}} \quad .$$

2. Durch wiederholtes Halbieren kann man aus dem Winkel von 45^0 die Winkel von $22\frac{1}{2}^0$, $11\frac{1}{4}^0$, $5\frac{5}{8}^0$, ... konstruieren und nach Nr. 1 ihren Sinus berechnen. Z. B. für $n = 8$ erhält man:

$$\sin 22\tfrac{1}{2}^0 = \frac{s_8}{2r} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \quad ,$$

und daraus

$$\cos 22\tfrac{1}{2}^0 = \sqrt{1-\sin^2 22\tfrac{1}{2}^0} = \sqrt{1-\tfrac{1}{4}(2-\sqrt{2})} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad ,$$

$$\tan 22\tfrac{1}{2}^0 = \frac{\sin 22\frac{1}{2}^0}{\cos 22\frac{1}{2}^0} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1 \quad ,$$

$$\cot 22\tfrac{1}{2}^0 = \frac{1}{\tan 22\frac{1}{2}^0} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 \quad .$$

Durch Verdopplung des Winkels von 30^0 erhält man 60^0 und demnach

$$\sin 60^0 = \frac{s_8}{2r} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \cos 30^0 \quad .$$

Durch wiederholtes Halbieren kommt man von 30^0 auf 15^0, $7\frac{1}{2}^0$, $3\frac{3}{4}^0$, ... Z. B. für $n = 12$ ergibt sich:

$$\sin 15^0 = \frac{s_{12}}{2r} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} = \tfrac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

und hieraus immer auf dieselbe Weise:

$$\cos 15^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} = \tfrac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}), \quad \tan 15^0 = 2-\sqrt{3}, \quad \cot 15^0 = 2+\sqrt{3} \quad .$$

Das Doppelte von 18^0 ist 36^0; daher hat man für $n = 5$:

$$\sin 36^0 = \frac{s_5}{2r} = \tfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

und weiter:

$$\cos 36^0 = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1), \quad \tan 36^0 = \sqrt{5-2\sqrt{5}}, \quad \cot 36^0 = \sqrt{1+\tfrac{2}{5}\sqrt{5}} \quad .$$

Aus den trigonometrischen Funktionen der spitzen Winkel, die hier berechnet worden sind, ergeben sich auch die der Komplemente nach § 2 Nr. 2. So ist

$\sin 75^0 = \cos 15^0$, $\sin 72^0 = \cos 18^0$, $\sin 67\frac{1}{2}^0 = \cos 22\frac{1}{2}^0$, $\sin 54^0 = \cos 36^0$, u. s. w.

Die Werte dieser Funktionen sind bis auf $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$, $\tan 45^0 = 1$ sämtlich irrational. Berechnet man sie auf drei Dezimalen und nimmt die Funktionen der Komplemente und die Grenzwerte der Funktionen bei 0^0 und 90^0 hinzu, so erhält man die folgende kleine Tafel:

°	sin	cos	tan	cot	
0	0	1	0	∞	90
15	0,259	0,966	0,268	3,732	75
18	0,309	0,951	0,325	3,078	72
22½	0,383	0,924	0,414	2,414	67½
30	0,5	0,866	0,577	1,732	60
36	0,588	0,809	0,727	1,376	54
45	0,707	0,707	1	1	45
	cos	sin	cot	tan	°

3. Die notwendige Vorbedingung für die praktische Anwendung, die von den trigonometrischen Funktionen gemacht werden soll, ist das Vorhandensein von trigonometrischen Tafeln, das sind Tabellen, aus denen man für jeden spitzen Winkel die Werte seiner Funktionen aufschlagen kann, und aus denen man umgekehrt, zu dem Werte einer Funktion den zugehörigen spitzen Winkel entnehmen kann. Wie diese Tafeln hergestellt werden können, d. h. wie man zu einem beliebigen Winkel die im allgemeinen irrationalen Werte einer Funktion bis zu einer hinreichenden Genauigkeit durch Rechnung finden kann, ist an dieser Stelle nicht auseinanderzusetzen. Eine Methode ist in *Arithmetik und Algebra* § 37 Nr. 4 gezeigt. Es ist klar, daß solche trigonometrische Tafeln nach Art der kleinen Probe in Nr. 2 nur die spitzen Winkel bis 45° zu enthalten brauchen. Jede in ihr enthaltene Funktion eines spitzen Winkels unter 45° stellt zugleich die Cofunktion eines solchen über 45° dar und umgekehrt.

Trigonometrische Tafeln gibt es in großer Zahl. Sie sind gewöhnlich vereint mit den Logarithmentafeln (*Arithmetik und Algebra* § 15 Nr. 3) und geben der Bequemlichkeit für numerische Rechnung halber auch die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen. Die gebräuchlichen Tafeln unterscheiden sich in Bezug auf Ausdehnung, Zahl der Dezimalstellen, Größe des Intervalls der aufeinander folgenden Winkel, Art und Hilfsmittel der Interpolation. Da jedes Tabellenwerk mit einer Gebrauchsanweisung versehen ist, kann diese hier übergangen werden.

Im folgenden werden meist fünfstellige Tafeln vorausgesetzt, wie die von F. G. Gauss, Heger, Schloemilch. Für Schulzwecke wird allerdings die Genauigkeit vierstelliger Tafeln, wie sie in neuerer Zeit vielfach herausgegeben und empfohlen worden sind, völlig genügen; doch ist die Kenntnis der Einrichtung von fünf- oder mehrstelligen Tafeln für den Anfänger immerhin empfehlenswert. Vierstellige Tafeln, wie die von F. G. Gauss, in denen die Winkel von Minute zu Minute fortschreiten, sind zwar nicht viel weniger umfangreich als fünfstellige, haben aber den Vorteil, die bei langwierigen Rechnungen so lästige Interpolation fast gänzlich überflüssig zu machen. Bei vielen geometrischen und bei den meisten physikalischen Aufgaben werden mit Vorteil nicht nur die logarithmisch-trigonometrischen, sondern auch die gewöhnlich mit beigegebenen Tafeln verwendet, die die Funktionen selbst (mißbräuchlich als »natürliche« Zahlen der Funktionen bezeichnet) enthalten.

Die logarithmisch-trigonometrischen Tafeln enthalten gewöhnlich nur die Logarithmen von Sinus, Cosinus, Tangente und Cotangente spitzer Winkel; die Logarithmen von Sekante und Cosekante sind die dekadischen Ergänzungen derjenigen von Cosinus und Sinus. Die Logarithmen von Sinus und Cosinus, sowie von Tangente der Winkel unter 45° sind negativ; die negative Kennziffer -10 wird im folgenden, wie in den Tafeln selbst, weggelassen, wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist.

4. Hat man sich im Gebrauch der trigonometrischen Tafeln hinreichend geübt, so daß man zu jedem spitzen Winkel innerhalb der Genauigkeitsgrenze

der benutzten Tafel, eine Funktion oder deren Logarithmus und zu einer gegebenen Funktion oder deren Logarithmus den zugehörigen Winkel aufschlagen kann, so ist damit für jeden spitzen Winkel jede seiner Funktionen als bekannt vorauszusetzen und umgekehrt ist ein spitzer Winkel als bekannt vorauszusetzen, wenn eine seiner Funktionen gegeben ist. Einen spitzen Winkel bestimmen heißt hiernach, eine seiner Funktionen bestimmen. Sind z. B. zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks gegeben, so ist eine Funktion des einen in dem Dreieck liegenden spitzen Winkels zu berechnen und damit ist dieser Winkel selbst bestimmt, da man ihn aus der trigonometrischen Tafel bestimmen kann.

In den beiden folgenden Beispielen ist die übliche Bezeichnung der Seiten und Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks wie in § 2 vorausgesetzt und beide sind in dem für logarithmische Berechnungen (*Arithmetik und Algebra* § 16 Nr. 4) gelehrten Schema aufgeschrieben.

1.
$$c = 5\,, \quad a = 4$$
$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = 0{,}8\,, \quad \alpha = 53^0\,7'\,48''$$
$$\log\sin\alpha = 9{,}90\,309$$

2.
$$a = 48{,}189\,, \quad b = 37{,}592$$
$$\tan\alpha = \frac{a}{b}\,, \quad \alpha = 63^0\,2'\,35''$$
$$\log a = 2{,}68\,295$$
$$\log b = 2{,}57\,509$$
$$\log\tan\alpha = 0{,}10\,786\,.$$

Hat man einen spitzen Winkel zu berechnen, so legt man ihn in ein rechtwinkliges Dreieck. Gelingt es, zwei Seiten dieses Dreiecks zu bestimmen, so hat man eine Funktion des gesuchten Winkels und kann den Winkel aus der trigonometrischen Tafel bestimmen.

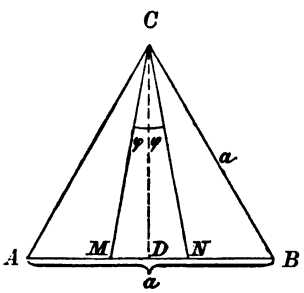


Fig. 204.

Z. B.: Die Seite $AB = a$ des gleichseitigen Dreiecks ABC (Fig. 204) wird in drei gleiche Teile $AM = MN = NB$ geteilt; in welche Teile wird der gegenüberliegende Winkel $ACB = 60^0$ durch MC und NC geteilt? Zieht man die Höhe CD, die mit CM oder CN den spitzen Winkel φ bildet, so liegt dieser in dem rechtwinkligen Dreieck MCD, dessen Katheten $CD = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$ und $MD = \frac{1}{6}a$ sind, folglich hat man:

$$\tan\varphi = \frac{\frac{1}{6}a}{\frac{1}{2}a\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1}{27}}\,, \quad \varphi = 10^0\,53'\,36''$$
$$\log\frac{1}{27} = 8{,}56\,864$$
$$\log\tan\varphi = 9{,}28\,432\,.$$

Der mittlere Teil ist also $\angle MCN = 2\varphi = 21^0\,47'\,12''$; jeder der beiden äußern $\angle ACM = \angle BCN = 30^0 - \varphi = 19^0\,6'\,24''$.

§ 6. Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck.

1. Ist von einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse c und ein spitzer Winkel α gegeben, so erhält man aus der Definition von Sinus und Cosinus:

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha\,, \quad \frac{b}{c} = \cos\alpha$$

die Katheten:

$$1) \qquad a = c\sin\alpha\,, \quad b = c\cos\alpha\,,$$

d. h. man findet eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, indem man die Hypotenuse mit dem Sinus des der Kathete gegenüberliegenden oder mit dem Cosinus des der Kathete anliegenden Winkels multipliziert.

Der Anfänger übe sich, auch an rechtwinkligen Dreiecken mit nicht schematischer Bezeichnung und von verschiedener Lage, den Satz einzuüben und aus Hypotenuse und einem spitzen Winkel die Katheten sofort hinzuschreiben. Z. B. in dem rechtwinkligen Dreieck (Fig. 205) mit der Hypotenuse m und dem spitzen Winkel δ sind die Katheten

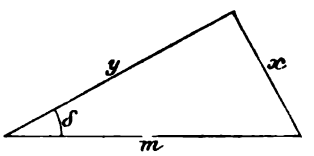


Fig. 205.

$$x = m\sin\delta\,, \quad y = m\cos\delta\,.$$

Hat man die Katheten nach 1) berechnet, so findet man den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks

$$F = \tfrac{1}{2}ab = \tfrac{1}{2}c^2\sin\alpha\cos\alpha\,.$$

Fällt man von der Spitze C des rechtwinkligen Dreiecks ABC (Fig. 206) die Höhe $CC' = h$, so wird die Hypotenuse $AB = c$ in die Abschnitte $BC' = a'$ und $AC' = b'$ geteilt. Es sind a' und b' die Projektionen der Katheten auf die Hypotenuse. Kennt man nun die Hypotenuse c und den spitzen Winkel α, so bildet h mit a ebenfalls den Winkel α und man hat

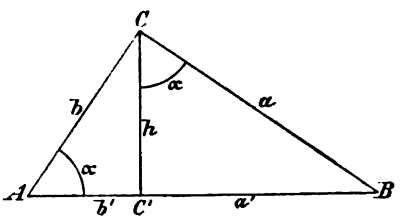


Fig. 206.

$$a' = a\sin\alpha = c\sin^2\alpha\,, \quad b' = b\cos\alpha = c\cos^2\alpha\,.$$

Die Summe der beiden Projektionen ist

$$a' + b' = c(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = c\,.$$

Weiter ist

$$h = a\cos\alpha = b\sin\alpha = c\sin\alpha\cos\alpha\,,$$

woraus sich der Flächeninhalt

$$F = \tfrac{1}{2}ch = \tfrac{1}{2}c^2\sin\alpha\cos\alpha$$

wie vorhin ergibt.

Beispiel:

$c = 355{,}50$, $\alpha = 38^0\,47'\,25''$; $\beta = 89^0\,59'\,60'' - 38^0\,47'\,25'' = 51^0\,12'\,35''$

$a = c\sin\alpha = 222{,}71$; $b = c\cos\alpha = 277{,}10$; $F = \tfrac{1}{2}ab = 30\,856$

$a' = a\sin\alpha = 139{,}52$; $b' = b\cos\alpha = 215{,}98$; $h = a\cos\alpha = b\sin\alpha = 173{,}59$

$\log c$	$= 2{,}55\,084$
$\log\sin\alpha$	$= 9{,}79\,690$
$\log\cos\alpha$	$= 9{,}89\,179$
$\log a$	$= 2{,}34\,774$
$\log b$	$= 2{,}44\,263$
$\log\frac{1}{2}$	$= 9{,}69\,897$
$\log F$	$= 4{,}48\,934$
$\log a'$	$= 2{,}14\,464$
$\log b'$	$= 2{,}33\,442$
$\log h$	$= 2{,}23\,953$.

Umgekehrt würde man, wenn a' und b' gegeben wären, die spitzen Winkel des rechtwinkligen Dreiecks berechnen können; es ist

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{a'}{c}}, \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{b'}{c}}, \quad c = a' + b', \quad \beta = 90^0 - \alpha \quad .$$

2. In dem Kreise um M mit dem Radius r (Fig. 207) sei die Sehne $AB = s$ gezogen, zu der der spitze Peripheriewinkel $APB = \varphi$ gehört. Zieht man durch ihren einen Endpunkt A den Durchmesser AC und verbindet C mit B, so erhält man das bei B rechtwinklige Dreieck ACB, in dem der spitze Winkel $ACB = \varphi$ ist. Nach 1) hat man also

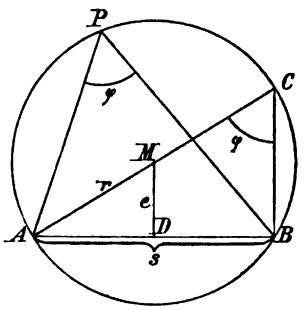


Fig. 207.

$$s = 2r\sin\varphi \quad ,$$

d. h. man findet die Sehne eines Kreises, indem man den Durchmesser mit dem Sinus des zur Sehne gehörigen spitzen Peripheriewinkels multipliziert.

Der spitze Peripheriewinkel ist gleich dem halben zur Sehne gehörigen Centriwinkel, den man erhält, wenn man von M das Lot MD auf die Sehne AB fällt. Dieses Lot $MD = \frac{1}{2}CB$ ist der Abstand e der Sehne vom Mittelpunkt und es ergibt sich

$$e = r\cos\varphi \quad .$$

Ist der zu dem spitzen Peripheriewinkel φ gehörige Bogen der n-te Teil der Peripherie, also $\varphi = \frac{180^0}{n}$, so ist die zugehörige Sehne s_n die Seite des regelmäßigen Sehnen-n-Ecks, also

$$s_n = 2r\sin\frac{180^0}{n} \quad .$$

Nach dieser Formel ist s_n in jedem Falle zu berechnen, auch wenn der Winkel $\frac{180^0}{n}$ nicht durch elementare Konstruktion zu bestimmen ist.

Z. B. ist für

$$r = 1, \quad s_7 = 2\sin\frac{180^0}{7} = 2\sin 25^0\,42'\,51'' = 0{,}8678 \quad .$$

Da für

$$r = 1, \quad \tfrac{1}{2}s_8 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}8660$$

ist, so kann man bis zu einer Genauigkeit von zwei Dezimalen $s_7 = \frac{1}{2}s_8$ setzen, wodurch eine für viele Fälle ausreichend genaue Näherungskonstruktion des in einen Kreis einzuschreibenden regelmäßigen Siebenecks gegeben ist.

Der Umfang des regelmäßigen Sehnen-n-Ecks ist

$$u_n = n s_n = 2nr\sin\frac{180^0}{n} \quad .$$

Z. B. erhält man für

$$r = 1, \quad n = 180, \quad \tfrac{1}{2}u_{180} = 180 \cdot \sin 1^0 = 3{,}1414 \quad ;$$
$$n = 360, \quad \tfrac{1}{2}u_{360} = 360 \cdot \sin \tfrac{1}{2}^0 = 3{,}1415 \quad :$$
$$n = 720, \quad \tfrac{1}{2}u_{720} = 720 \cdot \sin \tfrac{1}{4}^0 = 3{,}1416 \quad .$$

Die letzte Zahl ergibt auf vier Dezimalen genau den halben Umfang π des Kreises mit dem Radius 1.

Die Entfernung e der Sehne eines Kreises vom Mittelpunkt, ist in dem Falle, daß s die Seite eines regelmäßigen Sehnen-n-Ecks ist, der Radius ϱ des Inkreises, für den also die Formel gilt

$$\varrho = r\cos\frac{180^0}{n} .$$

3. Ist von einem rechtwinkligen Dreieck eine Kathete b und der ihr anliegende spitze Winkel α gegeben, so erhält man aus der Definition der Tangente und der Sekante:

$$\frac{a}{b} = \tan\alpha , \quad \frac{c}{b} = \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

die Kathete a und die Hypotenuse c, nämlich:

$$2) \qquad a = b\tan\alpha , \quad c = \frac{b}{\cos\alpha} .$$

Ist dagegen die Kathete a und der ihr gegenüberliegende spitze Winkel α gegeben, so ergibt die Definition von Cotangente und Cosekante

$$\frac{b}{a} = \cot\alpha , \quad \frac{c}{a} = \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

die Kathete b und die Hypotenuse c, nämlich:

$$3) \qquad b = a\cot\alpha , \quad c = \frac{a}{\sin\alpha} .$$

Kennt man von einem rechtwinkligen Dreieck (Fig. 206, S. 427) h und α, so hat man

$$a' = h\tan\alpha , \quad b' = h\cot\alpha , \quad c = a' + b' ;$$

$$a = \frac{h}{\cos\alpha} , \quad b = \frac{h}{\sin\alpha} .$$

Ist von demselben rechtwinkligen Dreieck der Inhalt F und ein spitzer Winkel α gegeben, so findet man aus den Gleichungen

$$ab = 2F , \quad \frac{a}{b} = \tan\alpha$$

durch Multiplikation und Division

$$a^2 = 2F\tan\alpha , \quad b^2 = 2F\cot\alpha ,$$

also

$$a = \sqrt{2F\tan\alpha} , \quad b = \sqrt{2F\cot\alpha} , \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} .$$

Bei der numerischen Berechnung von c bedient man sich mit Vorteil entweder der Gaussschen Hilfstafeln (*Arithmetik und Algebra* § 16 Nr. 5) oder ausführlicher Quadrattafeln, wie sie manchen Tabellenwerken beigegeben sind.

Man kann auch, um die Berechnung von $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ zu vermeiden, c aus a oder b berechnen, denn man hat

$$c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\cos\alpha} .$$

Beispiel:

$$F = 1733{,}4\,; \quad 2F = 3466{,}8\,; \quad \alpha = 57^0\,34'\,26''$$

$$a = \sqrt{2F\tan\alpha} = 73{,}873\,; \quad b = \sqrt{2F\cot\alpha} = 46{,}919\,; \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = 87{,}520$$

$$\begin{array}{rl} \log 2F = 3{,}53\,993 & \\ \log\tan\alpha = 0{,}19\,705 & \\ \hline \log a^2 = 3{,}73\,698 & a^2 = 5457{,}4 \\ \log b^2 = 3{,}34\,288 & b^2 = 2202{,}3 \\ \hline \log a = 1{,}86\,849 & c^2 = 7659{,}7 \\ \log b = 1{,}67\,144 & \end{array}$$

Ist in einem rechtwinkligen Dreieck (Fig. 206, S. 427) a' und α gegeben, so erhält man:

$$a = \frac{a'}{\sin\alpha}\,, \quad c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a'}{\sin^2\alpha}\,, \quad b = c\cos\alpha = a'\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\,;$$

$$h = a'\cot\alpha\,, \quad b' = h\cot\alpha = a'\cot^2\alpha\,.$$

Als Probe hat man:

$$a' + b' = a'(1 + \cot^2\alpha) = a'\csc^2\alpha = \frac{a'}{\sin^2\alpha} = c\,,$$

$$a'b' = a'^2\cot^2\alpha = h^2\,.$$

Beispiel:

$$a' = 144\,; \quad \alpha = 67^0\,22'\,48''$$

$$a = \frac{a'}{\sin\alpha} = 156\,; \quad c = \frac{a}{\sin\alpha} = 169 \text{ rund}\,; \quad b = c\cos\alpha = 65\,;$$

$$h = a'\cot\alpha = 60\,; \quad b' = h\cot\alpha = 25$$

$$\begin{array}{rl} \log a' = 2{,}15\,836 & \\ \log\sin\alpha = 9{,}96\,524 & \\ \log\cos\alpha = 9{,}58\,503 & \\ \log\cot\alpha = 9{,}61\,979 & \\ \hline \log a = 2{,}19\,312 & \\ \log c = 2{,}22\,788 & \\ \log b = 1{,}81\,291 & \\ \log h = 1{,}77\,815 & \\ \log b' = 1{,}39\,794 & \end{array}$$

4. Legt man im Punkte A eines Kreises um M (Fig. 208) mit dem Radius r eine Tangente und zieht durch M eine Sekante, die mit MA den spitzen Winkel φ bildet und die Tangente in P schneidet, so entsteht auf der Tangente der Abschnitt $AP = t$, während auf der Sekante der Abschnitt $MP = k$ hervorgebracht wird. Dann ist in dem rechtwinkligen Dreieck MPA nach 2):

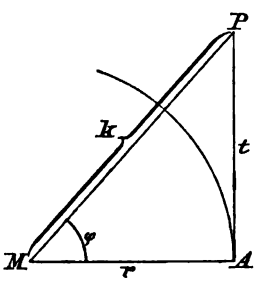


Fig. 208.

$$t = r\tan\varphi\,, \quad k = r\sec\varphi = \frac{r}{\cos\varphi}\,.$$

Hierdurch erklären sich die Funktionsbezeichnungen Tangente und Sekante.

Ist $\varphi = \frac{180^0}{n}$, so ist $t = \frac{1}{2}t_n$ die halbe Seite des dem Kreise umschriebenen regelmäßigen n-Ecks; es ist also

$$t_n = 2r\tan\frac{180^0}{n}$$

und der Umfang des regelmäßigen Tangenten-n-Ecks

$$t_n = 2\,n\,r\tan\frac{180^0}{n}\quad .$$

Z. B. für $r = 1$ und $n = 720$ würde man wie in Nr. 2

$$\tfrac{1}{2}\,t_{720} = 720\tan\tfrac{1}{4}^0 = 3{,}1416$$

erhalten, weil sich für den kleinen Winkel von $\frac{1}{4}^0$ die Logarithmen von Sinus und Tangente bis auf fünf Stellen nicht unterscheiden.

5. Ein gleichschenkliges Dreieck wird durch die Höhe in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Ist a die Basis (Fig. 209), b der Schenkel, h die Höhe, α der Winkel an der Spitze und β ein Basiswinkel, so hat jedes der beiden rechtwinkligen Dreiecke die Hypotenuse b, die Katheten $\frac{1}{2}a$ und h, während der Kathete $\frac{1}{2}a$ der spitze Winkel $\frac{1}{2}\alpha$, der Kathete h der spitze Winkel β gegenüberliegt. Da $\frac{1}{2}\alpha + \beta = 90^0$ ist, so sind die Funktionen von β die Cofunktionen von $\frac{1}{2}\alpha$ und umgekehrt. Es können demnach Berechnungen am gleichschenkligen Dreieck nach Nr. 1 und 3 ausgeführt werden.

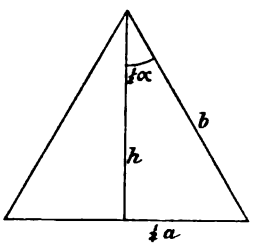


Fig. 209.

Ist z. B. a und α gegeben, so hat man

$$b = \frac{\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}\alpha} = \frac{a}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}\quad ,\qquad h = \tfrac{1}{2}a\cot\tfrac{1}{2}\alpha$$

und daraus den Inhalt des gleichschenkligen Dreiecks

$$F = \tfrac{1}{2}a\,h = \tfrac{1}{4}a^2\cot\tfrac{1}{2}\alpha\quad .$$

Ist $\alpha = \frac{360^0}{n}$, $\frac{1}{2}\alpha = \frac{180^0}{n}$, so ist das gleichschenklige Dreieck das Bestimmungsdreieck eines regelmäßigen n-Ecks. Die Basis ist die Seite s_n, der Schenkel der Radius r des Umkreises und die Höhe der Radius ϱ des Inkreises. Man erhält also

$$r = \frac{s_n}{2\sin\frac{180^0}{n}}\quad ,\qquad \varrho = \tfrac{1}{2}s_n\cot\frac{180^0}{n}$$

und den Inhalt des regelmäßigen n-Ecks

$$F_n = n\cdot\tfrac{1}{2}s_n\varrho = \tfrac{1}{4}n\,s_n^2\cot\frac{180^0}{n}\quad .$$

Ist der Umfang des Vielecks $u_n = n\,s_n$, so kann man auch schreiben:

$$F_n = \frac{1}{4n}u_n^2\cot\frac{180^0}{n}\quad .$$

Ein regelmäßiges m-Eck hat mit einem regelmäßigen n-Eck gleichen Inhalt und das m-Eck den Umfang u_m; wie groß ist der Umfang des n-Ecks? Die Gleichheit der Inhalte gibt die Gleichung

$$\frac{1}{m}u_m^2\cot\frac{180^0}{m} = \frac{1}{n}u_n^2\cot\frac{180^0}{n}\quad ,$$

woraus sich ergibt

$$u_n = u_m\sqrt{\frac{n}{m}\tan\frac{180^0}{n}\cot\frac{180^0}{m}}\quad .$$

Beispiel:

$m = 7$, $n = 11$, $\frac{180^0}{7} = 25^0\,42'\,51''$, $\frac{180^0}{11} = 16^0\,21'\,49''$, $u_m = 11{,}238$

$$u_n = u_m \sqrt[m]{\frac{n}{\tan\frac{180^0}{n}\cot\frac{180^0}{m}}} = 11 \text{ rund} .$$

$$\begin{aligned}
\log n &= 1{,}04\,139\\
-\log m &= 9{,}15\,490\\
\log\tan\frac{180^0}{n} &= 9{,}46\,779\\
\log\cot\frac{180^0}{m} &= 0{,}31\,734\\
&\overline{9{,}98\,142}\\
&\overline{9{,}99\,071}\\
\log u_m &= 1{,}05\,069\\
\log u_n &= 1{,}04\,140
\end{aligned}$$

Die Seite des regelmäßigen Elfecks muß also gleich 1 sein, wenn die des flächengleichen Siebenecks gleich 1,6054 ist.

§ 7. Das allgemeine Dreieck. Erweiterung des Begriffs der trigonometrischen Funktionen auf stumpfe Winkel.

1. Um an einem allgemeinen Dreieck Berechnungen auszuführen, wird man rechtwinklige Dreiecke herstellen, die man nach § 6 behandeln kann. Die Bezeichnung der Seiten und Winkel des Dreiecks ABC (Fig. 210) sei die übliche schematische. Zieht man die Höhe $CC' = h_c$ auf der Seite c, so wird das Dreieck unter der Voraussetzung, daß keiner der an c liegenden Winkel α und β stumpf ist, in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Dann erhält man nach § 6 aus der Definition der trigonometrischen Funktionen spitzer Winkel

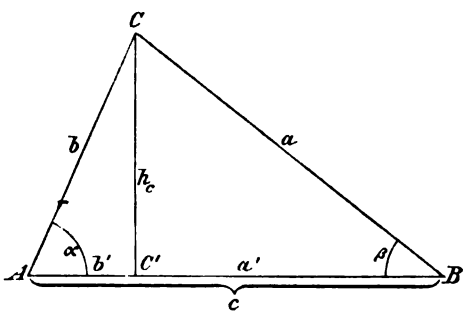


Fig. 210.

$$1) \qquad h_c = a\sin\beta = b\sin\alpha ,$$

woraus sich der Flächeninhalt

$$2) \qquad F = \tfrac{1}{2}\,a\,c\sin\beta = \tfrac{1}{2}\,b\,c\sin\alpha$$

ergibt. Die Seite c ist nun die Summe der Projektionen a' und b' der Seiten a und b auf diese Seite und man hat weiter:

$$a' = a\cos\beta , \quad b' = b\cos\beta , \quad a' + b' = c ,$$

also

$$3) \qquad c = a\cos\beta + b\cos\alpha .$$

Der Anfänger möge für ein spitzwinkliges Dreieck, in dem er die andern Höhen zieht, die entsprechenden Formeln für h_a und h_b, für F und für die Seiten a und b ableiten. Er wird dann erkennen, daß man sie aus den drei

Formeln durch Buchstabenvertauschung herleiten kann. Man achte darauf, daß auf der rechten Seite jeder Formel der durch die Höhe durchschnittene Winkel nicht vorkommt.

Ist dagegen in dem Dreieck ABC der eine an der Seite c liegende Winkel α stumpf (Fig. 211), so fällt die Höhe h_c außerhalb des Dreiecks; ihr Fußpunkt C' liegt auf der Verlängerung von BA über A hinaus und das Dreieck ABC ist die Differenz zweier rechtwinkliger Dreiecke. Von diesen beiden enthält aber CAC' den spitzen Winkel $CAC' = 180^0 - \alpha$, das Supplement des stumpfen Winkels α. Dann erhält man an Stelle von 1) und 2):

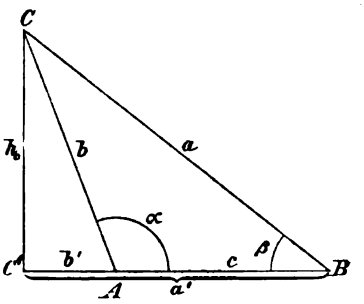


Fig. 211.

$$1^*) \qquad h_c = a\sin\beta = b\sin(180^0 - \alpha) \quad ,$$

$$2^*) \qquad F = \tfrac{1}{2}ac\sin\beta = \tfrac{1}{2}bc\sin(180^0 - \alpha) \quad .$$

Ferner ist

$$a' = a\cos\beta\,, \quad b' = b\cos(180^0 - \alpha) \quad ,$$

da aber hier

$$a' - b' = c$$

ist, so erhält man an Stelle von 3):

$$3^*) \qquad c = a\cos\beta - b\cos(180^0 - \alpha) \quad .$$

Es ist nun eine unerläßliche Forderung, Sätze der Trigonometrie allgemeingültig für spitz- wie für stumpfwinklige Dreiecke zu gestalten, also die Sätze 1), 2), 3) auch anwenden zu können auf ein stumpfwinkliges Dreieck. Dieser Forderung wird genügt, wenn man festsetzt, daß für einen stumpfen Winkel α

$$\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha)\,, \quad \cos\alpha = -\cos(180^0 - \alpha)$$

sein soll. Darin liegt eine Erweiterung des Begriffs von Sinus und Cosinus auf stumpfe Winkel, dergestalt, daß man definiert: Unter dem Sinus eines stumpfen Winkels soll der Sinus seines spitzen Supplements, unter dem Cosinus eines stumpfen Winkels soll der negative Cosinus seines spitzen Supplements verstanden werden.

Sind also φ und ψ Supplemente, ist also

$$\varphi + \psi = 180^0 \quad ,$$

wobei unentschieden bleiben kann, welcher von beiden spitz und welcher stumpf ist, so gilt

$$\sin\varphi = \sin\psi\,, \quad \cos\varphi = -\cos\psi \quad ,$$

d. h. wenn zwei Winkel Supplemente sind, so haben sie denselben Sinus; ihre Cosinus dagegen haben denselben absoluten Wert, aber entgegengesetzte Vorzeichen und zwar ist der Cosinus des spitzen Winkels positiv, des stumpfen negativ.

Wenn δ ein spitzer Winkel ist, so ist daher immer:

$$\sin(90^0 + \delta) = \sin(90^0 - \delta) = \cos\delta \quad ,$$
$$\cos(90^0 + \delta) = -\cos(90^0 - \delta) = -\sin\delta \quad .$$

Ferner folgt, daß, möge α ein spitzer oder ein stumpfer Winkel sein, immer ist:

$$\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha\,, \quad \cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha \quad .$$

Diese Festsetzung genügt der Beziehung 3) in § 3, denn es ist

$$\sin^2(180^0 - \alpha) + \cos^2(180^0 - \alpha) = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad .$$

Damit auch die Beziehungen 2) und 1) in § 3 für stumpfe Winkel bestehen bleiben, so hat man weiter festzusetzen, daß für einen stumpfen Winkel α sein soll:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin(180^0 - \alpha)}{-\cos(180^0 - \alpha)} = -\frac{\sin(180^0 - \alpha)}{\cos(180^0 - \alpha)} = -\tan(180^0 - \alpha) \ ,$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{-\tan(180^0 - \alpha)} = -\frac{1}{\tan(180^0 - \alpha)} = -\cot(180^0 - \alpha) \ .$$

Man hat also unter der Tangente oder Cotangente eines stumpfen Winkels zu verstehen die negative Tangente oder Cotangente seines spitzen Supplements.

Wenn demnach

$$\varphi + \psi = 180^0$$

ist, so wird

$$\tan\varphi = -\tan\psi \ , \quad \cot\varphi = -\cot\psi$$

sein müssen; d. h. wenn zwei Winkel Supplemente sind, so haben ihre Tangenten und Cotangenten denselben absoluten Wert, aber entgegengesetzte Vorzeichen und zwar sind diese Funktionen für den spitzen Winkel positiv, für den stumpfen negativ.

Die Erweiterung der Begriffe von Sekante und Cosekante kann ebenfalls durchgeführt werden, wenn man sie als die reziproken Werte von Cosinus und Sinus betrachtet.

2. Die Festsetzungen über die Funktionen stumpfer Winkel müssen auch noch gelten für den Grenzwert 180^0 der stumpfen Winkel, dessen Supplement 0^0 ist. Es muß also gesetzt werden

$$\sin 180^0 = \sin 0^0 = 0 \ , \quad \cos 180^0 = -\cos 0^0 = -1 \ .$$

Wenn ein stumpfer Winkel von 90^0 bis 180^0 wächst, so nimmt der Sinus von 1 ab bis 0, der Cosinus nimmt von 0 weiter ab bis -1. Der Sinus eines Dreieckswinkels liegt also zwischen 0 und 1, ist also immer ein positiver echter Bruch: der Cosinus eines Dreieckswinkels liegt zwischen -1 und $+1$, ist also ein positiver oder negativer echter Bruch.

Der Wert der Tangente ist bei 90^0 unendlich groß; wächst der Winkel über 90^0 hinaus, so wird die Tangente negativ, während ihr absoluter Wert abnimmt. Es ist anzunehmen, daß bei der Zahl ∞ ein stetiger Übergang von positiven zu negativen Zahlen gerade so stattfindet, wie bei der Zahl 0. Man muß daher der Zahl ∞ das Vorzeichen $+$ oder $-$ geben können, wie der Zahl 0. In der Tat, wenn man 90^0 als Endwert der spitzen Winkel auffaßt, so muß man $\tan 90^0 = +\infty$ setzen; betrachtet man dagegen 90^0 als Anfangswert der stumpfen Winkel, so hat man $\tan 90^0 = -\infty$ zu nehmen. Weiter ist nun

$$\tan 180^0 = -\tan 0^0 = 0 \ ;$$

die Tangente wächst also fortwährend, wenn der Winkel von 0 bis 180^0 wächst und kann bei einem Dreieckswinkel jede positive oder negative reelle Zahl sein.

Entsprechend hat man

$$\cot 180^0 = \frac{1}{\tan 180^0} = \frac{1}{0} = \infty$$

und findet, daß die Cotangente fortwährend abnimmt, wenn der Winkel von 0^0 bis 180^0 wächst. Auch sie kann jede positive oder negative reelle Zahl sein.

3. Nach dieser Erweiterung des Begriffs der trigonometrischen Funktionen auf irgend einen Winkel eines Dreiecks kommt jeder Funktion, mit Ausnahme des Sinus, ein positives oder negatives Vorzeichen zu. Daraus ist die höchst wichtige Folgerung zu ziehen, daß umgekehrt ein Dreieckswinkel durch seinen Sinus

im allgemeinen zweideutig bestimmt ist. Zu dem Werte des Sinus ergibt sich aus den Tafeln direkt ein spitzer Winkel; aber auch dessen stumpfes Supplement kann der Forderung genügen. Ist z. B. für den Winkel α eines Dreiecks gefunden worden

$$\sin\alpha = \tfrac{1}{2} \quad ,$$

so gibt es zwei Werte für α, die der Aufgabe genügen können, nämlich

$$\alpha_1 = 30^0 , \quad \alpha_2 = 180^0 - 30^0 = 150^0 \quad .$$

Durch den Cosinus, die Tangente oder Cotangente eines Dreieckswinkels ist dieser eindeutig bestimmt; z. B. wenn für einen solchen

$$\tan\alpha = -1$$

gefunden wäre, so kann nur

$$\alpha = 180^0 - 45^0 = 135^0$$

der Aufgabe genügen.

Weiter folgt nun aus der Beziehung 3) in § 3, daß bei einem Dreieckswinkel α immer zu setzen ist

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \quad ,$$

dagegen

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha} \quad .$$

4. Da für die drei Winkel α, β, γ die Beziehung gilt:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0 \quad ,$$

so ist die Summe zweier Dreieckswinkel das Supplement des dritten und man hat

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma , \quad \cos(\alpha+\beta) = -\cos\gamma \quad ,$$
$$\tan(\alpha+\beta) = -\tan\gamma , \quad \cot(\alpha+\beta) = -\cot\gamma \quad .$$

Dann ist aber auch

$$\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) + \tfrac{1}{2}\gamma = 90^0 \quad ,$$

d. h. die halbe Summe zweier Dreieckswinkel ist das Komplement der Hälfte des dritten und man erhält weiter

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \cos\tfrac{1}{2}\gamma , \quad \cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \sin\tfrac{1}{2}\gamma \quad ,$$
$$\tan\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \cot\tfrac{1}{2}\gamma , \quad \cot\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \tan\tfrac{1}{2}\gamma \quad .$$

§ 8. Beziehung des Dreiecks zum Umkreis.

1. Nachdem man den Begriff der trigonometrischen Funktionen auf stumpfe Winkel erweitert hat, kann man den Satz in § 6 Nr. 2 verallgemeinern. Zu einer Sehne eines Kreises gehören zwei Peripheriewinkel, die Supplemente sind. Da beide denselben Sinus haben, so kann man den Sehnensatz ausdrücken: Man findet die Sehne eines Kreises, indem man den Durchmesser mit dem Sinus des zur Sehne gehörigen Peripheriewinkels multipliziert.

Beschreibt man um ein Dreieck den Umkreis, dessen Radius r sei, so ist jede Seite eine Sehne des Kreises, und der der Seite gegenüberliegende Dreieckswinkel ist der zur Sehne gehörige Peripheriewinkel. Für jedes spitz- oder stumpfwinklige Dreieck gilt also

1) $$a = 2r\sin\alpha , \quad b = 2r\sin\beta , \quad c = 2r\sin\gamma \quad .$$

Daraus folgt

2) $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r \quad ,$$

d. h. jede Seite eines Dreiecks dividiert durch den Sinus des ihr gegenüberliegenden Winkels gibt dasselbe, nämlich den Durchmesser des Umkreises. Dieser wichtige Satz ist der Sinussatz und man kann aus ihm noch die Folgerung ziehen

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma \quad .$$

Die auf der Seite a stehende Höhe ist

$$h_a = b \sin\gamma$$

und mit Benutzung von 1)

$$3) \qquad h_a = 2r \sin\beta \sin\gamma \quad .$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ist

$$4) \qquad F = \tfrac{1}{2} a b \sin\gamma = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \quad .$$

Da auch

$$F = \tfrac{1}{2} c h_c$$

ist, so muß

$$a b \sin\gamma = c h_c, \quad a b = \frac{c}{\sin\gamma} h_c \quad ,$$

also

$$5) \qquad a b = 2r h_c$$

sein.

Setzt man in die Formel für den Inhalt:

$$F = \tfrac{1}{2} a b \sin\gamma$$

den sich aus 1) ergebenden Wert

$$\sin\gamma = \frac{c}{2r}$$

ein, so erhält man

$$6) \qquad F = \frac{a b c}{4r}, \quad r = \frac{a b c}{4F} \quad .$$

2. Die Formeln 1) in Nr. 1 geben die Lösung der Fundamentalaufgabe, die Seiten eines Dreiecks zu berechnen, wenn der Radius des Umkreises und die Winkel gegeben sind. Zur Berechnung eines Beispiels ist zu bemerken, daß nur zwei Winkel gegeben zu sein brauchen, da der dritte ohne Trigonometrie zu finden ist. Diesen dritten Winkel zu berechnen ist überhaupt nicht notwendig, wenn die Summe der beiden gegebenen Winkel spitz ist; dann ist der Sinus des dritten Winkels gleich dem Sinus der Summe der beiden gegebenen. Ist einer der gegebenen Winkel stumpf, so schreibt man ihn als Differenz von 180^0 und dem spitzen Supplement.

Beispiele:

1. $r = 85$; $\alpha = 28^0\,4'\,20''$, $\beta = 25^0\,3'\,27''$; $\alpha + \beta = 53^0\,7'\,47''$

$a = 2r\sin\alpha = 80$; $b = 2r\sin\beta = 72$; $c = 2r\sin\gamma = 136$

$\log 2r$	$= 2{,}23\,045$
$\log\sin\alpha$	$= 9{,}67\,264$
$\log\sin\beta$	$= 9{,}62\,688$
$\log\sin\gamma$	$= 9{,}90\,309$
$\log a$	$= 1{,}90\,309$
$\log b$	$= 1{,}85\,733$
$\log c$	$= 2{,}13\,354$

2. $r = 210{,}232$, $2r = 240{,}464$; $\alpha = 58^0\,6'\,38''$, $\beta = 61^0\,55'\,34''$:
$\alpha + \beta = 120^0\,2'\,12''$, $\gamma = 59^0\,57'\,48''$

$a = 2r\sin\alpha = 357$; $b = 2r\sin\beta = 371$; $c = 2r\sin\gamma = 364$

$\log 2r = 2{,}62\,373$
$\log\sin\alpha = 9{,}92\,894$
$\log\sin\beta = 9{,}94\,564$
$\log\sin\gamma = 9{,}93\,737$
$\log a = 2{,}55\,267$
$\log b = 2{,}56\,937$
$\log c = 2{,}56\,110$

3. $r = 23{,}873$, $2r = 47{,}746$; $\alpha = 128^0\,26'\,43'' = 180^0 - 51^0\,33'\,17''$:
$\beta = 36^0\,19'\,21''$, $\gamma = 15^0\,13'\,56''$

$a = 2r\sin\alpha = 37{,}395$; $b = 2r\sin\beta = 28{,}281$; $c = 2r\sin\gamma = 12{,}544$

$\log 2r = 1{,}67\,893$
$\log\sin\alpha = 9{,}89\,388$
$\log\sin\beta = 9{,}77\,256$
$\log\sin\gamma = 9{,}41\,951$
$\log a = 1{,}57\,281$
$\log b = 1{,}45\,149$
$\log c = 1{,}09\,844$

Kennt man von einem Dreieck eine Seite c und die Winkel, so ist nach 2) in Nr. 1 der Durchmesser $2r$ des Umkreises bestimmt, nämlich

$$2r = \frac{c}{\sin\gamma} \quad ,$$

womit die Aufgabe auf die vorige Fundamentalaufgabe zurückgeführt ist. Die beiden unbekannten Seiten erhält man nach 1) in Nr. 1:

$$a = 2r\sin\alpha = \frac{c}{\sin\gamma}\sin\alpha\,, \quad b = 2r\sin\beta = \frac{c}{\sin\gamma}\sin\beta \quad .$$

Der Anfänger übe sich, auch wenn a oder b die gegebene Seite ist, die Resultate für die unbekannten Seiten sofort hinzuschreiben. Bei einem Dreieck mit nicht schematischer Bezeichnung, in dem also nur zwei Winkel bezeichnet zu sein brauchen, ersetzt man den Sinus des nicht bezeichneten Winkels durch den Sinus der Summe der beiden andern. Z. B. in dem Dreieck (Fig. 212), worin die Seite m und die beiden ihr anliegenden Winkel δ und ε bekannt sind, ergeben sich die beiden andern Seiten:

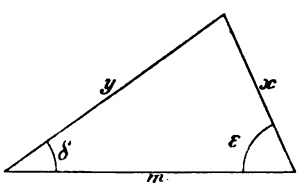


Fig. 212.

$$x = \frac{m}{\sin(\delta+\varepsilon)}\sin\delta\,, \quad y = \frac{m}{\sin(\delta+\varepsilon)}\sin\varepsilon \quad .$$

3. Aus Nr. 1 und 2 folgt, daß durch den Radius des Umkreises eines Dreiecks und einen Winkel die diesem gegenüberliegende Seite, und ebenso durch eine Seite und den ihr gegenüberliegenden Winkel der Radius des Umkreises eindeutig bestimmt ist. Dagegen ist durch den Radius des Umkreises und eine Seite der dieser gegenüberliegende Winkel im allgemeinen zweideutig bestimmt. Ist z. B. von einem Dreieck gegeben: Der Radius r und zwei Seiten $a > b$, wobei die selbstverständliche Bedingung erfüllt sein muß, daß

$a < 2r$ ist, so hat die Aufgabe zwei Lösungen, da der größern Seite a als Sehne des Umkreises ein spitzer oder stumpfer Peripheriewinkel zugehört. Trägt man in den Kreis mit dem Radius r (Fig. 213) die größere Seite $a = BC$ als Sehne ein und schlägt um C mit b einen Kreisbogen, so schneidet dieser den Umkreis in zwei Punkten A_1 und A_2, die symmetrisch zu den durch C gehenden Durchmesser liegen. Fällt A_1 auf den größern zur Sehne a gehörigen Bogen, so fällt A_2 auf den kleinern und es ist $\angle CA_1B = \alpha_1$ ein spitzer, $\angle CA_2B = \alpha_2$ das stumpfe Supplement von α_1. Die Rechnung ergibt:

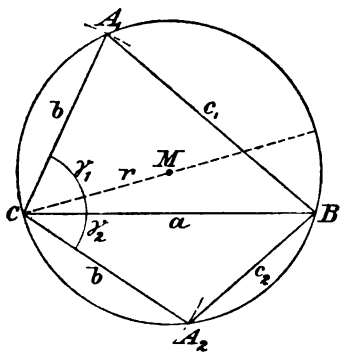


Fig. 213.

$$\sin\alpha = \frac{a}{2r} ,$$

wodurch α zweideutig bestimmt ist; der eine Winkel α_1 ist spitz, $\alpha_2 = 180^0 - \alpha_1$ stumpf. Ferner ist

$$\sin\beta = \frac{b}{2r}$$

und dadurch ist β eindeutig bestimmt, da der kleinern Seite im Dreieck nur ein spitzer Winkel gegenüberliegen kann. Dann hat man auch für den dritten Winkel zwei Werte:

$$\gamma_1 = 180^0 - \alpha_1 - \beta , \quad \gamma_2 = 180^0 - \alpha_2 - \beta = \alpha_1 - \beta$$

und daher für die dritte Seite:

$$c_1 = 2r\sin\gamma_1 = 2r\sin(\alpha_1 + \beta) , \quad c_2 = 2r\sin\gamma_2 = 2r\sin(\alpha_1 - \beta) .$$

Beispiel:

$$r = 65 , \quad a = 104 , \quad b = 32$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{2r} , \quad \alpha_1 = 53^0\,7'\,48'' , \quad \alpha_2 = 126^0\,52'\,12'' ;$$

$$\sin\beta = \frac{b}{2r} , \quad \beta = 14^0\,15'\,0'' ;$$

$$\alpha_1 + \beta = 67^0\,22'\,48'' , \quad \alpha_1 - \beta = 38^0\,52'\,48''$$

$$c_1 = 2r\sin(\alpha_1 + \beta) = 120 , \quad c_2 = 2r\sin(\alpha_1 - \beta) = 81{,}6$$

$\log a$	$= 2{,}01\,703$
$\log b$	$= 1{,}50\,515$
$\log 2r$	$= 2{,}11\,394$
$\log\sin\alpha$	$= 9{,}90\,309$
$\log\sin\beta$	$= 9{,}39\,121$
$\log\sin\gamma_1$	$= 9{,}96\,524$
$\log\sin\gamma_2$	$= 9{,}79\,775$
$\log c_1$	$= 2{,}07\,918$
$\log c_2$	$= 1{,}91\,169$

Man kann die dritte Seite c auch algebraisch durch die gegebenen Stücke r, a, b ausdrücken. Nach 3) in § 7 Nr. 1 erhält man

$$c_1 = a\cos\beta + b\cos\alpha_1 , \quad c_2 = a\cos\beta + b\cos\alpha_2 .$$

Nun ist aber

$$\cos\alpha_1 = \sqrt{1 - \sin^2\alpha_1} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4r^2}} ,$$

dagegen, weil α_2 stumpf ist

$$\cos\alpha_2 = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha_2} = -\sqrt{1 - \frac{a^2}{4r^2}}$$

und ferner

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{4r^2}} .$$

Damit hat man

$$c_{1,2} = a\sqrt{1 - \frac{b^2}{4r^2}} \pm b\sqrt{1 - \frac{a^2}{4r^2}} = \frac{a\sqrt{4r^2 - b^2} \pm b\sqrt{4r^2 - a^2}}{2r} .$$

Das obige Beispiel würde hierfür ergeben:

$$c_{1,2} = \frac{504 \pm 96}{5} , \quad c_1 = 120 , \quad c_2 = 81{,}6 .$$

4. Die Aufgabe, ein Dreieck zu berechnen aus zwei Seiten a und b und dem a gegenüberliegenden Winkel α, erfordert eine Determination (vgl. *Planimetrie* § 10 Nr. 4). Man hat zunächst

$$2r = \frac{a}{\sin\alpha} ,$$

womit die Aufgabe auf die vorige, wo r, a, b gegeben sind, zurückgeführt ist. Es ist also weiter

$$\sin\beta = \frac{b}{2r} = \frac{b\sin\alpha}{a} .$$

Die Aufgabe ist nur lösbar, da $\sin\beta \leqq 1$ sein muß, wenn $b < 2r$ oder $b\sin\alpha \leqq a$ ist. Im Falle $b = 2r$ wird das Dreieck rechtwinklig, da zu $\sin\beta = 1$, $\beta = 90^0$ gehört. Ist $b < 2r$ oder $b\sin\alpha < a$, so ist β durch seinen Sinus zweideutig bestimmt, wenn $b > a$, d. h. der gegebene Winkel der kleinern gegebenen Seite gegenüberliegt. In diesem Falle darf selbstverständlich α nur spitz sein. Ist $b\sin\alpha < a$, aber auch $b < a$, so ist die Aufgabe immer lösbar und eindeutig. Man kann also zusammenfassen: Liegt der gegebene Winkel der größern der beiden gegebenen Seiten gegenüber, so gibt es ein Dreieck; liegt er der kleinern gegenüber, so gibt es, falls die Aufgabe überhaupt lösbar ist, im allgemeinen zwei Dreiecke.

Beispiel:

$$a = 18\,754 , \quad b = 30\,476 , \quad \alpha = 26^0\,27'\,40''$$

$$2r = \frac{a}{\sin\alpha} , \quad \sin\beta = \frac{b}{2r} , \quad \beta_1 = 46^0\,23'\,40'' , \quad \beta_2 = 133^0\,36'\,20''$$

$$\alpha + \beta_1 = 72^0\,51'\,20'' , \quad \gamma_2 = 19^0\,56'\,0''$$

$$c_1 = 2r\sin\gamma_1 = 40\,217 , \quad c_2 = 2r\sin\gamma_2 = 14\,249$$

$\log a$	$= 4{,}27\,309$
$\log\sin\alpha$	$= 9{,}64\,894$
$\log 2r$	$= 4{,}62\,415$
$\log b$	$= 4{,}48\,395$
$\log\sin\beta$	$= 9{,}85\,980$
$\log\sin\gamma_1$	$= 9{,}98\,026$
$\log\sin\gamma_2$	$= 9{,}53\,266$
$\log c_1$	$= 4{,}60\,441$
$\log c_2$	$= 4{,}15\,681$

Algebraisch berechnet hat man, da allgemein

$$\cos\beta = \pm\sqrt{1 - \frac{b^2 \sin^2\alpha}{a^2}}$$

sein kann:

$$c_{1,2} = b\cos\alpha + a\cos\beta = b\cos\alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha} \quad .$$

5. Zieht man im Umkreis des Dreiecks ABC (Fig. 214) den zur Seite AB senkrechten Durchmesser C_1C_2, der AB in C_0 halbiert, so ist CC_1 die Halbierungslinie des Winkels $ACB = \gamma$ und es ist, vorausgesetzt, daß $a > b$ also auch $\alpha > \beta$, $\angle CC_1C_2 = \angle CAC_2 = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, (*Planimetrie*, § 43). Beschreibt man um C_1 mit $C_1A = C_1B$ einen Kreisbogen, der CB in D schneidet, so ist $CD = CA = b$, folglich $BD = a - b$. Fällt man von C_1 das Lot C_1E auf die Sehne DB, so wird diese in E halbiert; es ist also $BE = \frac{1}{2}(a - b)$ und $CE = a - \frac{1}{2}(a - b) = \frac{1}{2}(a + b)$. In dem rechtwinkligen Dreieck CC_1E ist $\angle CC_1E = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ als Komplement zu $\angle C_1CE = \frac{1}{2}\gamma$; da aber $\angle CC_1B = \alpha$ ist, so ist $\angle BC_1E = \alpha - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Drückt man in den beiden rechtwinkligen Dreiecken C_1CE und C_1BE die Kathete C_1E doppelt aus, so erhält man:

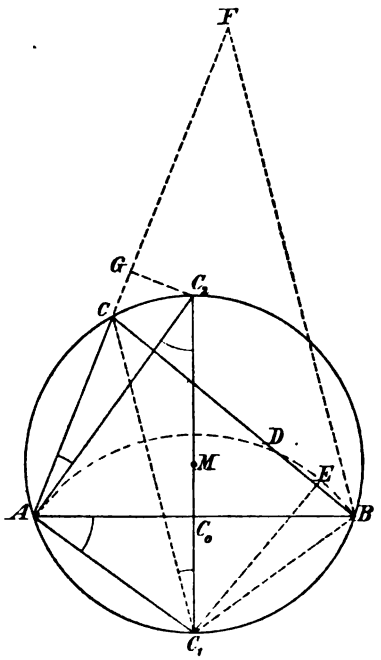


Fig. 214.

$$\tfrac{1}{2}(a + b)\cot\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = \tfrac{1}{2}(a - b)\cot\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \quad ,$$

wofür man schreiben kann

$$3) \qquad \frac{a + b}{a - b} = \frac{\tan\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\tan\frac{1}{2}(\alpha - \beta)} \quad .$$

Diese Formel drückt den Tangentensatz aus.

Verlängert man AC um CB bis F, so ist in dem gleichschenkligen Dreieck BCF der Winkel $CFB = \frac{1}{2}\gamma$, da auch $\angle AC_2C_1 = \frac{1}{2}\gamma$ ist, so liegt F auf dem um C_2 mit C_2A beschriebenen Kreise, der AB als Sehne hat. Fällt man von C_2 auf die Sehne AF dieses Kreises die Senkrechte C_2G, so ist $AG = \frac{1}{2}(a + b)$, mithin $CG = \frac{1}{2}(a + b) - b = \frac{1}{2}(a - b)$. Drückt man in den beiden rechtwinkligen Dreiecken AC_2G und AC_2C_0 die Hypotenuse C_2A doppelt aus, so erhält man

$$\frac{\frac{1}{2}(a + b)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \frac{\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$$

und tut man dasselbe mit der gemeinsamen Hypotenuse C_1B der beiden rechtwinkligen Dreiecke C_1BE und C_1BC_0, so ergibt sich:

$$\frac{\frac{1}{2}(a - b)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \frac{\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}\gamma} \quad .$$

Diese beiden Formeln kann man auch darstellen:

$$4) \qquad \frac{a + b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma} \quad , \qquad \frac{a - b}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos\frac{1}{2}\gamma} \quad ;$$

sie werden die Mollweideschen Formeln genannt.

In dem rechtwinkligen Dreieck AC_2G ist auch

$$\tfrac{1}{2}(a+b) = C_2A \cdot \cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

und in dem rechtwinkligen Dreieck C_1C_2A

$$C_2A = 2r\cos\tfrac{1}{2}\gamma \quad ,$$

folglich

$$5) \qquad \tfrac{1}{2}(a+b) = 2r\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\tfrac{1}{2}\gamma \quad .$$

Ebenso erhält man aus den rechtwinkligen Dreiecken C_1BE und C_1AC_2

$$\tfrac{1}{2}(a-b) = C_1B \cdot \sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta), \quad C_1B = C_1A = 2r\sin\tfrac{1}{2}\gamma \quad ,$$

mithin

$$6) \qquad \tfrac{1}{2}(a-b) = 2r\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\tfrac{1}{2}\gamma \quad .$$

6. Durch die Formeln in Nr. 5 lassen sich trigonometrische Aufgaben lösen, bei denen von einem Dreieck die Summe oder Differenz von Seiten oder Winkeln gegeben sind. Es ist jedoch für den Anfänger zweckmäßiger, nicht die fertigen Formeln direkt zu verwenden, sondern die Aufgabe zunächst durch Konstruktion zu lösen und dann die rechtwinkligen Dreiecke der Figur zu berechnen. Dies Verfahren möge an den beiden folgenden Aufgaben erläutert werden.

1. Von einem Dreieck sei gegeben: $\frac{1}{2}(a+b) = m$, c, γ, welche Aufgabe leicht in Worte zu fassen ist. Durch c und γ ist der Durchmesser des Umkreises eindeutig bestimmt. Man konstruiert zunächst aus der Kathete $\frac{1}{2}c$ und dem anliegenden Winkel $\frac{1}{2}\gamma$ das rechtwinklige Dreieck AC_1C_0 (Fig. 214) und dann das rechtwinklige Dreieck AC_1C_2, dessen Hypotenuse C_1C_2 der Durchmesser des Umkreises ist. Die Sehne AB ist die Seite c. Über AC_2 als Hypotenuse konstruiert man nun das rechtwinklige Dreieck AC_2G mit der Kathete $AG = m$ und erhält als Schnittpunkt von AG mit dem Umkreis die Spitze C und damit das Dreieck ABC. Es muß also $m < AC_2$ sein.

Zur Berechnung hat man aus dem rechtwinkligen Dreieck AC_2C_0:

$$AC_2 = \frac{\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$$

und aus dem rechtwinkligen Dreieck AC_2G:

$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{m}{AC_2} = \frac{m}{\frac{1}{2}c}\sin\tfrac{1}{2}\gamma \quad .$$

Die Aufgabe ist nur lösbar, wenn $m < AC_2$ oder $\frac{1}{2}c > m\sin\frac{1}{2}\gamma$ ist. Da nun $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = 90^0 - \frac{1}{2}\gamma$ bekannt ist und die Tafeln aus der vorstehenden Formel $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ liefern, so sind durch Addition und Subtraktion von $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ und $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ die Winkel α und β zu finden. Aus dem rechtwinkligen Dreieck AC_1C_0 hat man weiter

$$AC_1 = \frac{\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}\gamma} = BC_1$$

und aus dem rechtwinkligen Dreieck BC_1E

$$\tfrac{1}{2}(a-b) = BC_1 \cdot \sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta = \frac{\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}\gamma}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) \quad .$$

Somit sind durch $\frac{1}{2}(a+b) = m$ und $\frac{1}{2}(a-b)$ die Seiten a und b zu finden. Eine Probe für die Richtigkeit der numerischen Rechnung würde die Berechnung der Seiten nach dem Sinussatze:

$$a = \frac{c}{\sin\gamma}\sin\alpha, \quad b = \frac{c}{\sin\gamma}\sin\beta$$

ergeben

Beispiel:

$m = 53{,}93\,;\ c = 80{,}30\,;\ \gamma = 76^0 18' 52''\,,\ \frac{1}{2}\gamma = 38^0 9' 26''\,,\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta) = 51^0 50' 34''$

$$AC_2 = \frac{\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}\gamma}\,;\quad BC_1 = \frac{\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}\gamma}\,;\quad \cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{m}{AC_2}\,,\quad \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = 33^0 55' 0''\,,$$

$$\alpha = 85^0 45' 34''\,,\quad \beta = 17^0 55' 34''$$

$$\tfrac{1}{2}(a-b) = BC_1 \cdot \sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = 28{,}49\,,\quad a = 82{,}42\,,\quad b = 25{,}44$$

$$\begin{aligned}
\log\tfrac{1}{2}c &= 1{,}60\,369\\
\log\sin\tfrac{1}{2}\gamma &= 9{,}79\,086\\
\log\cos\tfrac{1}{2}\gamma &= 9{,}89\,560\\
\log m &= 1{,}73\,183\\
\log AC_2 &= 1{,}81\,283\\
\log\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) &= 9{,}91\,900\\
\log\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) &= 9{,}74\,662\\
\log BC_1 &= 1{,}70\,809\\
\log\tfrac{1}{2}(a-b) &= 1{,}45\,471\,.
\end{aligned}$$

Probe:

$$a = \frac{c}{\sin\gamma}\sin\alpha = 82{,}42\,;\quad b = \frac{c}{\sin\gamma}\sin\beta = 25{,}44$$

$$\begin{aligned}
\log c &= 1{,}90\,472\\
\log\sin\gamma &= 9{,}98\,749\\
\log\frac{c}{\sin\gamma} &= 1{,}91\,723\\
\log\sin\alpha &= 9{,}99\,881\\
\log\sin\beta &= 9{,}48\,825\\
\log a &= 1{,}91\,604\\
\log b &= 1{,}40\,548
\end{aligned}$$

2. Von einem Dreieck sei gegeben: $\frac{1}{2}(a-b) = d$, c, $\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \delta$. Durch d und δ ist zunächst das rechtwinklige Dreieck BC_1E (Fig. 214 S. 440) bestimmt und durch $BC_1 = AC_1$ und $\frac{1}{2}c$ das rechtwinklige Dreieck AC_1C_0; daraus das rechtwinklige Dreieck AC_1C_2 und damit der Umkreis. Trägt man an C_1C_2 in C_1 den Winkel δ an, so ist die Spitze C und damit das Dreieck ABC gefunden.

Zur Berechnung findet man zunächst aus dem rechtwinkligen Dreieck BC_1E

$$BC_1 = \frac{d}{\sin\delta} = AC_1\,,\quad C_1E = d\cot\delta$$

und aus dem rechtwinkligen Dreieck AC_1C_0

$$\cos\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\frac{1}{2}c}{AC_1} = \frac{\frac{1}{2}c}{d}\sin\delta$$

und aus dem rechtwinkligen Dreieck C_1CE

$$\tfrac{1}{2}(a+b) = C_1E \cdot \cot\tfrac{1}{2}\gamma = d\cot\tfrac{1}{2}\gamma\cot\delta\,.$$

Die Aufgabe ist nur lösbar, wenn $d > \frac{1}{2}c\sin\delta$ ist.

Beispiel:

$$d = 12\,; \quad c = 40\,; \quad \delta = 28^0\,30'\,24''$$

$$AC_1 = \frac{d}{\sin\delta}\,; \quad C_1E = d\cot\delta\,; \quad \cos\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\frac{1}{2}c}{AC_1}\,, \quad \tfrac{1}{2}\gamma = 37^0\,18'\,12''$$

$$\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = 52^0\,41'\,48'', \quad \alpha = 81^0\,12'\,12'', \quad \beta = 24^0\,11'\,24''$$

$$\tfrac{1}{2}(\alpha+b) = C_1E\cdot\cot\tfrac{1}{2}\gamma = 29 \text{ rund}\,, \quad a = 41\,, \quad b = 17\,.$$

$\log d =$	1,07 918
$\log \sin\delta =$	9,67 876
$\log \cot\delta =$	0,26 512
$\log \frac{1}{2}c =$	1,30 103
$\log AC_1 =$	1,40 042
$\log \cos\frac{1}{2}\gamma =$	9,90 061
$\log \cot\frac{1}{2}\gamma =$	0,11 811
$\log C_1E =$	1,34 430
$\log \frac{1}{2}(\alpha+b) =$	1,46 241 .

Auf dieselbe Weise, wie diese beiden, lassen sich auch die Aufgaben lösen, wenn gegeben sind:

$\frac{1}{2}(a-b)$, c, γ: $\frac{1}{2}(a+b)$, c, $\frac{1}{2}(a-\beta)$; r, $\frac{1}{2}(a+b)$, γ oder $\frac{1}{2}(a-\beta)$;
r, $\frac{1}{2}(a-b)$, γ oder $\frac{1}{2}(a-\beta)$.

§ 9. Goniometrische Formeln, die sich aus der Beziehung des Dreiecks zum Umkreis ergeben.

1. Zieht man im Umkreise des Dreiecks ABC den zu AB senkrechten Durchmesser C_1C_2 (Fig. 215), der AB in C_0 halbiert und verbindet A mit C_1, C_2 und mit dem Mittelpunkt M des Umkreises, so ist, γ als spitz vorausgesetzt, in dem rechtwinkligen Dreieck AMC_0, $\angle AMC_0 = \gamma$ und

$$\tfrac{1}{2}c = r\sin\gamma\,.$$

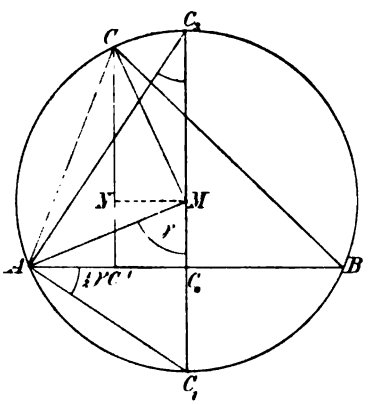


Fig. 215.

Andrerseits hat man in den rechtwinkligen Dreiecken AC_1C_0 und AC_1C_2, $\angle C_1AC_0 = \angle AC_2C_1 = \frac{1}{2}\gamma$ und

$$\tfrac{1}{2}c = AC_1\cdot\cos\tfrac{1}{2}\gamma = 2r\sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}\gamma\,.$$

Ist γ stumpf, so liegt in dem rechtwinkligen Dreieck AMC_0 das spitze Supplement von γ, während auch dann $\angle C_1AC_0 = \angle AC_2C_1 = \frac{1}{2}\gamma$ ist: es ändert sich daher an den beiden Formeln nichts. Vergleicht man aber beide Werte von $\frac{1}{2}c$, so erhält man die Formel:

$$1) \qquad \sin\gamma = 2\sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}\gamma\,,$$

in der eine Länge nicht mehr vorkommt; sie muß daher für jeden beliebigen spitzen oder stumpfen Winkel γ gelten. Eine solche Formel heißt daher eine goniometrische.

Diese Formel 1) lehrt aus Sinus und Cosinus des halben Winkels den Sinus des ganzen zu finden unter der Voraussetzung, daß der halbe Winkel spitz ist.

In dem rechtwinkligen Dreieck AMC_0 ist weiter, wenn γ spitz ist:

$$MC_0 = r\cos\gamma \quad ,$$

mithin

$$C_1C_0 = r - MC_0 = r - r\cos\gamma\,, \quad C_2C_0 = r + MC_0 = r + r\cos\gamma \quad .$$

Ist γ stumpf, so erhält man ebenso:

$$C_1C_0 = r + MC_0 = r + r\cos(180^0 - \gamma) = r - r\cos\gamma \quad ,$$

$$C_2C_0 = r - MC_0 = r - r\cos(180^0 - \gamma) = r + r\cos\gamma \quad .$$

Nun sind aber C_1C_0 und C_2C_0 die Abschnitte der Höhe AC_0 des rechtwinkligen Dreiecks AC_1C_2 auf der Hypotenuse $C_1C_2 = 2r$, daher (§ 6 Nr. 1)

$$C_1C_0 = 2r\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma\,, \quad C_2C_0 = 2r\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma \quad .$$

Durch Vergleichung erhält man die goniometrischen Formeln

$$2) \qquad 1 - \cos\gamma = 2\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma\,, \quad 1 + \cos\gamma = 2\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma \quad .$$

Ferner ist für einen spitzen Winkel γ:

$$MC_0 = \tfrac{1}{2}(C_2C_0 - C_1C_0)$$

oder

$$r\cos\gamma = \tfrac{1}{2}(2r\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma - 2r\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma) \quad :$$

für einen stumpfen Winkel γ:

$$MC_0 = \tfrac{1}{2}(C_1C_0 - C_2C_0)$$

oder

$$r\cos(180^0 - \gamma) = -r\cos\gamma = \tfrac{1}{2}(2r\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma - 2r\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma) \quad .$$

In beiden Fällen erhält man die goniometrische Formel

$$3) \qquad \cos\gamma = \cos^2\tfrac{1}{2}\gamma - \sin^2\tfrac{1}{2}\gamma \quad ,$$

die sich auch durch Subtraktion der Formeln 2) ergibt.

Setzt man $\frac{1}{2}\gamma = \varphi$ also $\gamma = 2\varphi$, wobei φ ein spitzer Winkel ist, so erhält man 1) und 3) in der Form

$$4) \qquad \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$5) \qquad \cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \quad ,$$

in der sie gestatten aus Sinus und Cosinus eines spitzen Winkels den Sinus und Cosinus des doppelten Winkels zu finden. Die Formel 5) kann man wegen der Beziehung $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ noch schreiben:

$$\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 = 1 - 2\sin^2\varphi \quad .$$

Die Formeln 2) lehren umgekehrt, aus dem Cosinus eines spitzen oder stumpfen Winkels γ den Sinus und Cosinus des halben Winkels zu bestimmen, nämlich

$$6) \qquad \sin\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos\gamma)}\,, \quad \cos\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + \cos\gamma)} \quad ,$$

wobei die Quadratwurzel in $\cos\frac{1}{2}\gamma$ positiv zu nehmen ist, da $\frac{1}{2}\gamma$ jedenfalls spitz sein muß.

Die Division der Formeln 6) gibt

$$7) \qquad \tan\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{1 - \cos\gamma}{1 + \cos\gamma}}\,, \quad \cot\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{1 + \cos\gamma}{1 - \cos\gamma}} \quad .$$

Dividiert man die Formel 1) durch 2), so erhält man noch

$$8) \qquad \tan\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\sin\gamma}{1 + \cos\gamma}\,, \quad \cot\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\sin\gamma}{1 - \cos\gamma} \quad .$$

Durch Addition und Subtraktion der Formeln 6) erhält man:

$$\cos\tfrac{1}{2}\gamma + \sin\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\cos\gamma)} + \sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\cos\gamma)} \quad ,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\gamma - \sin\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\cos\gamma)} - \sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\cos\gamma)} \quad .$$

Quadriert man die rechten Seiten der beiden Gleichungen und zieht wieder die Quadratwurzel, so erhält man

$$\cos\tfrac{1}{2}\gamma + \sin\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{1+\sin\gamma} \quad ,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\gamma - \sin\tfrac{1}{2}\gamma = \pm\sqrt{1-\sin\gamma} \quad .$$

In der letzten Formel gilt das positive Vorzeichen, wenn γ spitz, also $\frac{1}{2}\gamma < 45^0$ und $\cos\frac{1}{2}\gamma > \sin\frac{1}{2}\gamma$ ist. Setzt man $\gamma < 90^0$ voraus, so hat man durch Addition und Subtraktion

$$\cos\tfrac{1}{2}\gamma = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\gamma} + \sqrt{1-\sin\gamma}\right) \quad ,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\gamma} - \sqrt{1-\sin\gamma}\right) \quad .$$

In Fig. 215 S. 443 kann man noch aus den rechtwinkligen Dreiecken AMC_0, AC_1C_0 und AC_2C_0 folgern:

$$MC_0 = \tfrac{1}{2}c\cot\gamma$$

und

$$MC_0 = \tfrac{1}{2}(C_2C_0 - C_1C_0) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}c\cot\tfrac{1}{2}\gamma - \tfrac{1}{2}c\tan\tfrac{1}{2}\gamma\right) \quad ,$$

so daß man durch Gleichsetzung die goniometrische Formel erhält:

$$9) \qquad \cot\gamma = \tfrac{1}{2}\left(\cot\tfrac{1}{2}\gamma - \tan\tfrac{1}{2}\gamma\right) \quad ,$$

die ihre Gültigkeit behält, wenn γ stumpf ist und die sich auch durch Division von 3) durch 1) ergeben würde. Für $\frac{1}{2}\gamma = \varphi$ nimmt sie die Form an

$$10) \qquad \cot 2\varphi = \tfrac{1}{2}\left(\cot\varphi - \tan\varphi\right) \quad ,$$

worin φ spitz sein muß. Auch diese Formel kann man durch Division von 5) durch 4) herstellen. Es folgt aus ihr noch

$$11) \qquad \tan 2\varphi = \frac{2}{\cot\varphi - \tan\varphi} = \frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi} \quad .$$

2. Drückt man in der Formel 3) in § 7 Nr. 1

$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$$

die drei Seiten des Dreiecks durch den Durchmesser $2r$ des Umkreises aus, so erhält man nach Kürzung mit $2r$ die trigonometrische Beziehung

$$12) \qquad \sin\gamma = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

zwischen den drei Winkeln eines Dreiecks. Aus ihr geht eine goniometrische Formel hervor, wenn man nach § 7 Nr. 4 $\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta)$ setzt, nämlich:

$$13) \qquad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad .$$

Diese Summenformel gilt für beliebige Winkel α und β unter der Voraussetzung, daß $\alpha+\beta < 180^0$ ist und drückt den Sinus der Summe dieser Winkel durch Sinus und Cosinus der einzelnen Winkel aus.

Wendet man 12) auf $\sin\beta$ an mit der gehörigen Buchstabenvertauschung, so ist

$$\sin\beta = \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma \quad ,$$

mithin

$$\sin\alpha\cos\gamma = \sin\beta - \cos\alpha\sin\gamma = \sin\beta - (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\cos\alpha$$
$$= (1-\cos^2\alpha)\sin\beta - \sin\alpha\cos\alpha\cos\beta \quad .$$

Da $1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$ ist, so läßt sich die Gleichung durch $\sin\alpha$ kürzen und ergibt

$$14) \qquad \cos\gamma = \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta$$

oder, da $\cos\gamma = -\cos(\alpha + \beta)$ ist:

$$15) \qquad \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

als entsprechende Formel für den Cosinus der Summe zweier Winkel α und β, die Geltung hat für $\alpha + \beta < 180^0$.

Zieht man im Dreieck ABC (Fig. 215 S. 443) die Höhe CC' auf AB und verbindet C mit M, so ist $\angle MCC' = \alpha - \beta$ (*Planimetrie* § 43 Nr. 1). Eine Parallele durch M zu AB läßt das rechtwinklige Dreieck MCN entstehen, in dem die $\alpha - \beta$ gegenüberliegende Kathete $MN = C'C_0$ ist. Man hat also

$$C'C_0 = r\sin(\alpha - \beta) \quad ;$$

andrerseits ist

$$C'C_0 = \tfrac{1}{2}(BC' - AC') = \tfrac{1}{2}(a\cos\beta - b\cos\alpha) = r(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) \quad .$$

Durch Vergleichung dieser beiden Werte entsteht die goniometrische Formel:

$$16) \qquad \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \quad .$$

Ebenso ist in dem rechtwinkligen Dreieck MCN die $\alpha - \beta$ anliegende Kathete

$$CN = r\cos(\alpha - \beta)$$

und ebenso

$$CN = CC' - MC_0 = 2r\sin\alpha\sin\beta - r\cos\gamma \quad ,$$

wobei $CC' = h_c$ nach § 8 Nr. 1, 3) berechnet worden ist. Setzt man die beiden Werte von CN einander gleich und beachtet 14), so erhält man

$$17) \qquad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad .$$

Die Formeln 16) und 17) lassen sich auch aus den Formeln 13) und 15) herleiten, wenn man $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$ setzt, und nun die Summenformeln anwendet. Man erhält dadurch die beiden Gleichungen

$$\sin\alpha = \sin(\alpha - \beta)\cos\beta + \cos(\alpha - \beta)\sin\beta \quad ,$$

$$\cos\alpha = \cos(\alpha - \beta)\cos\beta - \sin(\alpha - \beta)\sin\beta \quad ,$$

aus denen man als Unbekannte $\sin(\alpha - \beta)$ und $\cos(\alpha - \beta)$ berechnen kann.

Die Formeln 13), 15), 16), 17) lassen sich in die beiden zusammenfassen:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \quad ,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \quad .$$

Sie gelten unter der Bedingung, daß $\alpha + \beta < 180^0$ und daß nach Fig. 115 S. 443, $\alpha > \beta$ vorausgesetzt werden muß. Man sieht leicht, daß diese Bedingung unwesentlich ist bei den Formeln für $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha - \beta)$, die sich nicht ändern, wenn man α und β vertauscht. Dagegen muß sie aufrecht erhalten werden bei der Formel für $\sin(\alpha - \beta)$, denn durch Vertauschung von α und β würde sich ergeben:

$$\sin(\beta - \alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \cos\alpha\sin\beta = -\sin(\alpha - \beta) \quad .$$

Man kann aber auch hier die Bedingung fallen lassen, wenn man festsetzt, daß, wenn $\alpha - \beta = \varphi$ ist

$$18) \qquad \sin(-\varphi) = -\sin\varphi \quad ;$$

d. h. der Sinus eines negativen Winkels gleich dem negativen Sinus des absolut gleichen positiven Winkels sein soll. In Fig. 215 S. 443

ist das negative Vorzeichen des Winkels damit begründet, daß im Falle $\alpha < \beta$ also $a < b$, der Winkel MCC' durch Drehung von MC in entgegengesetzter Richtung hervorgebracht wird. Dann fällt $C'C_0$ nicht nach links von C_0 sondern nach rechts und es würde gegen den vorigen Fall

$$C'C_0 = r\sin(\beta - \alpha) = \tfrac{1}{2}(b\cos\alpha - a\cos\beta)$$

zu nehmen sein, wodurch sich

$$\sin(\beta - \alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha$$

ergeben würde. Beide Formeln sagen mit der obigen Definition des Sinus eines negativen Winkels dasselbe aus.

Dagegen ist

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha = \cos(\alpha - \beta) \quad ,$$

also

$$19) \qquad \cos(-\varphi) = \cos\varphi \quad ,$$

d. h. zwei absolut gleiche Winkel mit entgegengesetzten Vorzeichen haben denselben Cosinus.

Ändert also ein Winkel sein Vorzeichen, so ändert auch der Sinus das Vorzeichen, der Cosinus aber nicht.

3. Die goniometrischen Formeln in Nr. 2 gelten also für Winkel α und β, wie sie in einem Dreieck vorkommen können. Sie genügen auch der Beziehung 3) in § 3; denn es ist:

$$\begin{aligned}\sin^2(\alpha \pm \beta) + \cos^2(\alpha \pm \beta) &= \sin^2\alpha\cos^2\beta \pm 2\sin\alpha\cos\beta\cdot\cos\alpha\sin\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta \\ &\quad + \cos^2\alpha\cos^2\beta \mp 2\cos\alpha\cos\beta\cdot\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta \\ &= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\beta + \cos^2\beta) = 1 \quad .\end{aligned}$$

Man könnte daher $\cos(\alpha \pm \beta)$ aus $\sin(\alpha \pm \beta)$ oder umgekehrt algebraisch berechnen. Ferner ist auch, wenn man $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ schreibt, mit Berücksichtigung von 18) und 19):

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin[\alpha+(-\beta)] = \sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos[\alpha+(-\beta)] = \cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

In der Tat ergeben sich dadurch die Formeln 16) und 17). So kann man aus der Formel für $\sin(\alpha + \beta)$ die übrigen für $\sin(\alpha - \beta)$ und $\cos(\alpha \pm \beta)$ algebraisch ableiten. Damit ist nochmals bewiesen, daß der Geltungsbereich für alle vier Summenformeln, wie man sie allgemein bezeichnen kann, derselbe ist.

Diese Formeln können zunächst dazu dienen, Sinus und Cosinus von Winkeln zu berechnen, die man als Summe oder Differenz von Winkeln darstellen kann, deren Funktionen man schon kennt. Man würde damit ein Mittel finden, die kleine Tafel in § 5 Nr. 2 sehr erheblich zu erweitern. Z. B.

$$\begin{aligned}\sin 48^0 &= \sin(30^0 + 18^0) = \sin 30^0\cos 18^0 + \cos 30^0\sin 18^0 \\ &= \tfrac{1}{8}\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{15} + \sqrt{3}\right) = 0{,}743 \quad ; \\ \cos 48^0 &= \cos(30^0 + 18^0) = \cos 30^0\cos 18^0 - \sin 30^0\sin 18^0 \\ &= \tfrac{1}{8}\left(\sqrt{30 + 2\sqrt{15}} - \sqrt{5} + 1\right) = 0{,}669 \quad : \\ \sin 12^0 &= \sin(30^0 - 18^0) = \sin 30^0\cos 18^0 - \cos 30^0\sin 18^0 \\ &= \tfrac{1}{8}\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15} - \sqrt{3}\right) = 0{,}208 \quad : \\ \cos 12^0 &= \cos(30^0 - 18^0) = \cos 30^0\cos 18^0 + \sin 30^0\sin 18^0 \\ &= \tfrac{1}{8}\left(\sqrt{30 + 2\sqrt{15}} + \sqrt{5} - 1\right) = 0{,}978 \quad .\end{aligned}$$

Ferner lassen sich aus den Summenformeln innerhalb ihres Geltungsbereichs weitere goniometrische Formeln algebraisch ableiten. So erhält man:

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta} \quad ;$$

dividiert man Zähler und Nenner des letzten Bruchs durch $\cos\alpha\cos\beta$, so ergibt sich

$$20) \qquad \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \quad .$$

Sind α, β, γ die Winkel eines Dreiecks, so ist $\tan(\alpha + \beta) = -\tan\gamma$, folglich nach 20):

$$-\tan\gamma = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \quad ,$$

oder wenn man den Nenner aus der Gleichung beseitigt, so erhält man die bemerkenswerte trigonometrische Beziehung

$$21) \qquad \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma \quad ;$$

d. h. die Summe der Tangenten der Winkel eines Dreiecks ist gleich ihrem Produkt. Das einfachste Beispiel ist: $\tan\alpha = 1$, $\tan\beta = 2$, $\tan\gamma = 3$; $\alpha = 45°$, $\beta = 63°\,26'\,6''$, $\gamma = 71°\,33'\,54''$.

Setzt man in den Formeln für $\sin(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$ den Winkel $\beta = \alpha$, so erhält man die Formeln 4) und 5) für Sinus und Cosinus eines doppelten Winkels. Tut man dasselbe mit $\tan(\alpha + \beta)$, so erhält man noch die Formel 11) für die Tangente des doppelten Winkels.

Als Anwendung der Summenformeln hat man noch:

$$\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \pm \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \quad ,$$

$$\cot\beta \pm \cot\alpha = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} \pm \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha\sin\beta} \quad ,$$

von welchen Formeln auch die Umkehrungen bemerkenswert sind.

Durch Addition und Subtraktion von:

$$\sin(\varphi + \psi) = \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi \quad ,$$
$$\sin(\varphi - \psi) = \sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi$$

erhält man

$$\sin(\varphi + \psi) + \sin(\varphi - \psi) = 2\sin\varphi\cos\psi \quad ,$$
$$\sin(\varphi + \psi) - \sin(\varphi - \psi) = 2\cos\varphi\sin\psi \quad .$$

Auch von diesen Formeln wird die gemeinsame Umkehrung

$$22) \qquad \sin\varphi\cos\psi = \tfrac{1}{2}\left[\sin(\varphi + \psi) + \sin(\varphi - \psi)\right]$$

häufig angewendet. Setzt man aber

$$\varphi + \psi = \alpha \,, \quad \varphi - \psi = \beta \quad ,$$
$$\varphi = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \,, \quad \psi = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \quad ,$$

so ergeben sich die neuen goniometrischen Formeln:

$$23) \qquad \begin{cases} \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \\ \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \end{cases} .$$

Diese lassen sich auch aus den trigonometrischen Formeln 5) und 6) in § 8 Nr. 5 ableiten, wenn man in ihnen

$$a = 2r\sin\alpha\,,\quad b = 2r\sin\beta\,,\quad \cos\tfrac{1}{2}\gamma = \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,,\quad \sin\tfrac{1}{2}\gamma = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

setzt.

Ebenso entsteht durch Addition und Subtraktion der Formeln

$$\cos(\varphi-\psi) = \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\quad,$$
$$\cos(\varphi+\psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi$$

die weitern

$$\cos(\varphi-\psi) + \cos(\varphi+\psi) = 2\cos\varphi\cos\psi\quad,$$
$$\cos(\varphi-\psi) - \cos(\varphi+\psi) = 2\sin\varphi\sin\psi$$

und deren Umkehrungen:

$$24)\qquad \begin{cases} \cos\varphi\cos\psi = \tfrac{1}{2}[\cos(\varphi-\psi)+\cos(\varphi+\psi)]\quad,\\ \sin\varphi\sin\psi = \tfrac{1}{2}[\cos(\varphi-\psi)-\cos(\varphi+\psi)] \end{cases}$$

oder mit derselben Substitution wie vorhin:

$$25)\qquad \begin{cases} \cos\beta+\cos\alpha = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\quad,\\ \cos\beta-\cos\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\quad. \end{cases}$$

Durch Multiplikation der Formeln 23) und 25) ergibt sich noch

$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\quad,$$
$$\cos^2\beta - \cos^2\alpha = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\quad.$$

Anwendung von den Formeln 23) und 25) wird gemacht, wenn es sich bei Umformungen darum handelt, die Summe oder Differenz der Sinus oder Cosinus zweier Winkel in ein Produkt zu verwandeln, wodurch gelegentlich eine Vereinfachung von Formeln erzielt werden kann. Z. B. läßt sich umformen:

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)}{2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)}\quad;$$

$$\sin(30^0+\varphi)+\sin(30^0-\varphi) = 2\sin 30^0\cos\varphi = \cos\varphi\quad,$$

daher

$$\sin(30^0+\varphi) = \cos\varphi - \sin(30^0-\varphi)\quad.$$

§ 10. Der allgemeine pythagoreische Lehrsatz. Der Cosinussatz.

1. Zieht man in dem Dreieck ABC (Fig. 216) die Höhe $AA' = h_a$, so ist in dem rechtwinkligen Dreieck ACA'

$$h_a = b\sin\gamma\,,\quad CA' = b' = b\cos\gamma\quad,$$

folglich die Projektion c' von c auf a:

$$c' = a - b' = a - b\cos\gamma\quad.$$

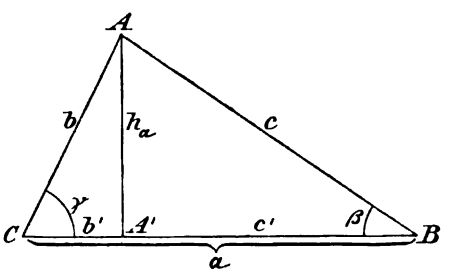


Fig. 216.

Die Gleichungen für h_a und c' gelten nach § 7 Nr. 1 auch, wenn γ stumpf ist. Nun ist nach dem pythagoreischen Lehrsatz im rechtwinkligen Dreieck ABA':

$$c^2 = c'^2 + h_a^2 = (a - b\cos\gamma)^2 + b^2\sin^2\gamma = a^2 + b^2(\cos^2\gamma+\sin^2\gamma) - 2ab\cos\gamma$$

oder

$$1)\qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\quad.$$

Zu dieser Formel können durch Buchstabenvertauschung noch zwei andre für a^2 und b^2 gefügt werden. Der darin ausgedrückte Satz kann als der allgemeine pythagoreische Lehrsatz bezeichnet werden, da er in dem besondern Falle $\gamma = 90^0$, also $\cos\gamma = 0$ in den pythagoreischen Lehrsatz übergeht. Er gibt die Lösung der Fundamentalaufgabe, aus zwei Seiten eines Dreiecks und dem eingeschlossenen Winkel die dritte Seite zu berechnen. Aus a, b und γ findet man nämlich

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} \quad .$$

Ist z. B. $\gamma = 60^0$, $\cos\gamma = \frac{1}{2}$, so wird

$$c = \sqrt{a^2 - ab + b^2} \quad .$$

Bei einem numerischen Beispiel hat man, abgesehen von ganz einfachen Fällen, das dritte Glied unter der Quadratwurzel logarithmisch zu berechnen. Ist der Winkel nur auf Minuten genau gegeben, so genügen meist vierstellige Tafeln. Zur Berechnung von a^2, b^2 und c aus c^2 bedient man sich zweckmäßig der Quadrattafeln. Den Logarithmus des Radikanden könnte man auch durch die Gausschen Hilfstafeln finden.

Beispiele:

1. $a = 6\,,\quad b = 7\,,\quad \gamma = 63^0\,29'\,43''$

$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} = 6{,}893$

$\log 2ab = 1{,}92\,428$
$\log\cos\gamma = 9{,}64\,960$
$\log 2ab\cos\gamma = 1{,}57\,388$

$a^2 + b^2 = 85$
$2ab\cos\gamma = 37{,}487$
$c^2 = 47{,}513$

2. $a = 34{,}52\,,\quad b = 67{,}18\,,\quad \gamma = 57^0\,34'$

$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} = 56{,}73$

$\log 2 = 0{,}3010$
$\log a = 1{,}5381$
$\log b = 1{,}8272$
$\log\cos\gamma = 9{,}7294$
$\log 2ab\cos\gamma = 3{,}3957$

$a^2 = 1192$
$b^2 = 4513$
5705
$2ab\cos\gamma = 2487$
$c^2 = 3218$

Ist γ stumpf, also $\cos\gamma$ negativ, so hat $\cos\gamma$ keinen reellen Logarithmus (*Arithmetik und Algebra* § 15 Nr. 1); da es sich aber nur um den absoluten Wert des Cosinus handelt, so kann man setzen:

$$-2ab\cos\gamma = 2ab(-\cos\gamma) \quad ;$$

nun ist $-\cos\gamma = \cos(180^0 - \gamma)$. Man schlägt also $\log\cos(180^0 - \gamma)$ auf, schreibt aber dafür $\log(-\cos\gamma)$ und erhält dann $\log(-2ab\cos\gamma)$; die dazu aufgeschlagene Zahl $-2ab\cos\gamma$ hat man zu $a^2 + b^2$ zu addieren.

Beispiel:

$a = 235{,}21\,,\quad b = 227{,}08\,,\quad \gamma = 135^0\,18'\,25'' = 180^0 - 44^0\,41'\,35''$

$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} = 427{,}59$

$\log 2 = 0{,}30\,103$
$\log a = 2{,}37\,146$
$\log b = 2{,}35\,618$
$\log(-\cos\gamma) = 9{,}85\,180$
$\log(-2ab\cos\gamma) = 4{,}88\,047$

$a^2 = 55\,329$
$b^2 = 51\,565$
$-2ab\cos\gamma = 75\,940$
$c^2 = 182\,834$

2. Aus dem rechtwinkligen Dreieck ABA' (Fig. 216 S. 449) erhält man weiter

$$2) \qquad \tan\beta = \frac{h_a}{c'} = \frac{b\sin\gamma}{a - b\cos\gamma} \quad .$$

Hierdurch ist aus den Seiten a, b und dem eingeschlossenen Winkel γ einer der nicht gegebenen Winkel bestimmt. Bei einem Beispiel, zu dem für a und b vielstellige unbequeme Zahlen gegeben sind, kann man, um c zu finden, zunächst einen der andern Winkel berechnen und dann erst die gesuchte Seite nach dem Sinussatze bestimmen. Mit Hilfe von β würde man nunmehr

$$c = \frac{b}{\sin\beta}\sin\gamma = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta}$$

erhalten. Ist γ stumpf, so ist die bezügliche Bemerkung in Nr. 1 zu beachten. Das Beispiel 2 in Nr. 1 würde sich dann folgendermaßen berechnen lassen:

$a = 253{,}21\,, \quad b = 227{,}08\,, \quad \gamma = 135^0\,18'25'' = 180^0 - 44^0\,41'35''$

$\tan\beta = \dfrac{b\sin\gamma}{a - b\cos\gamma}\,, \quad \beta = 21^0\,55'58''; \quad c = \dfrac{b\sin\gamma}{\sin\beta} = 427{,}58$

$\log b = 2{,}35\,618$	
$\log(-\cos\gamma) = 9{,}85\,180$	
$\log\sin\gamma = 9{,}84\,715$	$a = 235{,}21$
$\log(-b\cos\gamma) = 2{,}20\,798$	$-b\cos\gamma = 161{,}43$
$\log(a - b\cos\gamma) = 2{,}59\,839$	$a - b\cos\gamma = 396{,}64$
$\log b\sin\gamma = 2{,}20\,333$	
$\log\tan\beta = 9{,}60\,494$	
$\log\sin\beta = 9{,}87\,231$	
$\log c = 2{,}63\,102$	

Wenn $a > b\cos\gamma$, d. h. $a > c'$ (Fig. 216 S. 449) ist, so ist $a - b\cos\gamma > 0$, $\tan\beta > 0$ also β spitz. Dieser Fall tritt immer ein, wenn γ stumpf ist, wie in dem vorstehenden Beispiel. Ist $a < b\cos\gamma$, d. h. $a < c'$, so ist $a - b\cos\gamma < 0$, $\tan\beta < 0$ also β stumpf. Für die numerische Rechnung hat man in diesem Fall Formel 2) geschrieben zu denken:

$$-\tan\beta = \frac{b\sin\gamma}{b\cos\gamma - a} \quad .$$

Die Tafeln geben dann zu $\log(-\tan\beta)$ das spitze Supplement von β.

Beispiel:

$a = 4448\,, \quad b = 9921\,, \quad \gamma = 45^0\,17'29''$

$\tan\beta = \dfrac{b\sin\gamma}{a - b\cos\gamma}\,, \quad \beta = 180^0 - 70^0\,12'23'' = 109^0\,47'37''$

$\log b = 3{,}99\,656$	
$\log\cos\gamma = 9{,}84\,727$	
$\log\sin\gamma = 9{,}85\,168$	$a = 4448$
$\log b\cos\gamma = 3{,}84\,383$	$b\cos\gamma = 6979{,}6$
$\log(b\cos\gamma - a) = 3{,}40\,442$	$b\cos\gamma - a = 2531{,}6$
$\log b\sin\gamma = 3{,}84\,824$	
$\log(-\tan\beta) = 0{,}44\,382$	

In dem besondern Falle, daß $a = b\cos\gamma$ ist, wird $a - b\cos\gamma = 0$, $\tan\beta = \infty$ also $\beta = 90^0$; das Dreieck wird rechtwinklig: b ist die Hypotenuse und die Kathete $a = b\cos\gamma$.

3. Aus der Formel 1) des allgemeinen pythagoreischen Lehrsatzes ergibt sich

$$3) \qquad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,a\,b}$$

und entsprechende Formeln erhält man für $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ durch Buchstabenvertauschung. Diese Formeln enthalten den Cosinussatz. Er gibt die Cosinus der Dreieckswinkel algebraisch und in rationaler Form durch die Seiten ausgedrückt. Je nachdem

$$a^2 + b^2 \gtrless c^2$$

ist, wird

$$\cos\gamma \gtrless 0\,, \quad \gamma \lesseqgtr 90^0\,.$$

In einem numerischen Beispiel aus den drei Seiten die Winkel nach dem Cosinussatz zu berechnen, ist nur dann zu empfehlen, wenn für die Seiten bequeme Zahlwerte gegeben sind. Haben die Werte für a, b, c einen gemeinsamen Faktor, so kann man ihn weglassen, da Dreiecke mit denselben Seitenverhältnissen ähnlich sind, also gleiche Winkel haben. Ebenso könnte man die drei Seiten mit demselben Faktor multiplizieren. Hat man alle drei Winkel berechnet, so muß man darauf gefaßt sein, daß die Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma$ nicht vollkommen genau gleich 180^0 wird.

Beispiel:

$$a = 13\,, \quad b = 14\,, \quad c = 15$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} = \frac{39}{65}\,, & \alpha &= 53^0\ 7'49'' \\ \cos\beta &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c} = \frac{33}{65}\,, & \beta &= 59^0\,29'23'' \\ \cos\gamma &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,a\,b} = \frac{25}{65}\,, & \gamma &= 67^0\,22'48'' \end{aligned}\right\} \quad \alpha + \beta + \gamma = 180^0\,0'0''$$

$$\begin{aligned} \log 39 &= 1{,}59\,106 \\ \log 33 &= 1{,}51\,851 \\ \log 25 &= 1{,}39\,794 \\ \log 65 &= 1{,}81\,291 \\ \hline \log\cos\alpha &= 9{,}77\,815 \\ \log\cos\beta &= 9{,}70\,560 \\ \log\cos\gamma &= 9{,}58\,503 \end{aligned}$$

Ist F der Flächeninhalt des Dreiecks, so würde

$$\sin\gamma = \frac{2\,F}{a\,b}$$

sein. Dividiert man 3) durch diese Formel, so erhält man

$$\cot\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4\,F}$$

und entsprechend

$$\cot\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4\,F}\,, \quad \cot\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4\,F}\,.$$

Addiert man diese drei Gleichungen, so erhält man die Beziehung

$$4) \qquad \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\,F}\,.$$

Nach § 8 Nr. 1, 4) ist aber

$$F = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \quad ;$$

folglich hat man

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 8r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma (\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma) \\ &= 8r^2 (\cos\alpha \sin\beta \sin\gamma + \sin\alpha \cos\beta \sin\gamma + \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma) \quad . \end{aligned}$$

Fügt man in dem Klammerausdruck noch die Glieder

$$-\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma + \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$$

hinzu, so kann man ihn schreiben

$$\begin{aligned} &-\cos\alpha (\cos\beta \cos\gamma - \sin\beta \sin\gamma) + \sin\alpha (\sin\beta \cos\gamma + \cos\beta \sin\gamma) + \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \\ &= -\cos\alpha \cos(\beta + \gamma) + \sin\alpha \sin(\beta + \gamma) + \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \\ &= -\cos(\alpha + \beta + \gamma) + \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \quad . \end{aligned}$$

Nun ist aber $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, also $\cos(\alpha + \beta + \gamma) = -1$; mithin erhält man

5) $$a^2 + b^2 + c^2 = 8r^2 (1 + \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma) \quad .$$

Drückt man auch a, b, c durch $2r$ und die Winkel aus, so ist

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4r^2 (\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma) \quad ,$$

so daß man durch Vergleichung die trigonometrische Beziehung:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 (1 + \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma)$$

und daraus noch die weitere:

6) $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$$

erhält.

4. Man kann den allgemeinen pythagoreischen Lehrsatz in folgende beiden Formen bringen:

$$\begin{aligned} c^2 &= (a + b)^2 - 2ab - 2ab \cos\gamma = (a + b)^2 - 2ab (1 + \cos\gamma) \quad , \\ c^2 &= (a - b)^2 + 2ab - 2ab \cos\gamma = (a - b)^2 + 2ab (1 - \cos\gamma) \quad . \end{aligned}$$

Nun gelten nach § 9 Nr. 1 die goniometrischen Formeln

$$1 + \cos\gamma = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2}\gamma \, , \quad 1 - \cos\gamma = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma \quad ,$$

womit man erhält:

7) $$\begin{cases} c^2 = (a + b)^2 - 4ab \cos^2 \tfrac{1}{2}\gamma \quad , \\ c^2 = (a - b)^2 + 4ab \sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma \quad . \end{cases}$$

Daraus findet man

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{(a + b)^2 - c^2}{4ab} = \frac{(a + b + c)(a + b - c)}{4ab} \quad ,$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{c^2 - (a - b)^2}{4ab} = \frac{(-a + b + c)(a - b + c)}{4ab} \quad .$$

Bedient man sich der Abkürzung

$$a + b + c = 2s \quad ,$$

so erhält man einfacher:

8) $$\cos \tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{s(s - c)}{ab}} \, , \quad \sin \tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)}{ab}}$$

und durch Division

9) $$\tan \tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)}{s(s - c)}} \quad .$$

Eine dieser drei Formeln würde sich im allgemeinen besser zur Berechnung der Winkel aus den drei Seiten bei einem numerischen Beispiel eignen als der Cosinussatz.

Bildet man das doppelte Produkt der Formeln 8), so erhält man, wenn man die goniometrische Formel 1) in § 9 Nr. 1 beachtet:

$$\sin\gamma = \frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad .$$

Da der Inhalt des Dreiecks

$$F = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma$$

ist, so ergibt sich nach Einsetzung von $\sin\gamma$:

$$10) \qquad F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad ,$$

die HERONische Dreiecksformel (*Planimetrie* § 28 Nr. 3), eine der wichtigsten in der Geometrie, die den Inhalt des Dreiecks aus den drei Seiten finden lehrt. Ist der Inhalt F zunächst aus den drei Seiten berechnet, so würde aus der Formel

$$\sin\gamma = \frac{2F}{ab}$$

der Winkel γ, jedoch im allgemeinen zweideutig, bestimmt sein. Ebenso kann man nach der Formel (§ 8 Nr. 1, 6))

$$r = \frac{abc}{4F}$$

nunmehr den Radius des Umkreises des Dreiecks aus den drei Seiten berechnen.

Die Formeln 7) finden Anwendung zur algebraischen Berechnung der Seiten eines Dreiecks bei Aufgaben, wo ein Winkel und Summe oder Differenz oder Produkt zweier Seiten, der Radius des Umkreises, der Flächeninhalt gegeben sind.

Z. B. um die Seiten eines Dreiecks aus γ, $\frac{1}{2}(a+b) = m$, F zu finden, hat man

$$ab = \frac{2F}{\sin\gamma} = \frac{F}{\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma}$$

und damit

$$(a-b)^2 = 4(m^2 - ab) = 4\left(m^2 - \frac{2F}{\sin\gamma}\right) \quad ,$$

also unter der Voraussetzung $a > b$, die immer statthaft ist

$$\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} = m \pm \sqrt{m^2 - \frac{2F}{\sin\gamma}} \quad .$$

Ferner erhält man aus 7)

$$c^2 = 4m^2 - \frac{4F}{\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma}\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma = 4(m^2 - F\cot\tfrac{1}{2}\gamma) \quad .$$

Da der allgemeine pythagoreische Lehrsatz eine Beziehung zwischen den drei Seiten eines Dreiecks und einem Winkel gibt, so kann er auch dazu dienen, wenn zwei Seiten und der einer von beiden gegenüberliegende Winkel gegeben sind, die dritte Seite algebraisch zu berechnen.

Ist z. B. a, b und α bekannt (§ 8 Nr. 4), so gibt die Formel

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

eine quadratische Gleichung für c, deren Normalform

$$c^2 - 2bc\cos\alpha - a^2 + b^2 = 0$$

und deren Wurzeln

$$c = b\cos\alpha \pm \sqrt{b^2\cos^2\alpha + a^2 - b^2} = b\cos\alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha}$$

sind. Die beiden Wurzeln sind reell, wenn die Diskriminante positiv oder Null wird. Das erste tritt immer ein, wenn $a > b$ ist, denn dann ist erst recht $a > b\sin\alpha$; der absolute Wert der Quadratwurzel ist aber, wie die erste Schreibweise zeigt größer als $b\cos\alpha$. Daher ist für $a > b$ das negative Vorzeichen der Quadratwurzel nicht zu gebrauchen und die Aufgabe ist eindeutig. Ist $a < b$, aber $a > b\sin\alpha$, so ist der absolute Wert der Quadratwurzel kleiner als $b\cos\alpha$, beide Wurzeln sind brauchbar: die Aufgabe ist zweideutig. In dem besondern Falle $a = b\sin\alpha$ wird das Dreieck rechtwinklig mit b als Hypotenuse. Ist $a < b$ und $a < b\sin\alpha$, so ist die Aufgabe unlösbar. Man erhält also durch Diskussion der Wurzeln der quadratischen Gleichung dieselbe Determination der Aufgabe wie in § 8 Nr. 4.

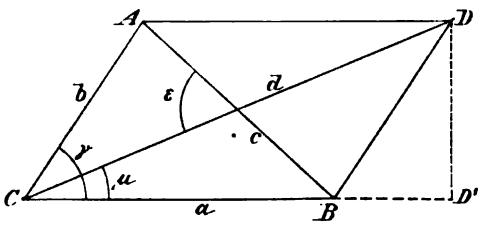


Fig. 217.

5. Ergänzt man das Dreieck ACB zu dem Parallelogramm $ACBD$ (Fig. 217) mit den anstoßenden Seiten a, b und dem eingeschlossenen Winkel γ, so ist die diesen Winkel durchschneidende Diagonale $CD = d$ die dritte Seite des Dreiecks CBD, das die Seiten a, b und den eingeschlossenen Winkel $CBD = 180^0 - \gamma$ hat; folglich ist

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^0 - \gamma)} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma} \quad .$$

Für den Winkel $BCD = \mu$, den d mit a bildet, erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck BDD', das durch die Höhe DD' auf a gebildet wird:

$$\tan\mu = \frac{b\sin\gamma}{a + b\cos\gamma} \quad .$$

In dem Dreieck ABC ist nach dem allgemeinen pythagoreischen Lehrsatze

$$2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2 \quad ,$$

also wird

$$d = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} \quad .$$

Die beiden Diagonalen des Parallelogramms halbieren einander in M, also ist

$$CM = \tfrac{1}{2}d = m_c$$

die zur Seite c gehörige Mittellinie des Dreiecks ABC, für die sich ergibt:

$$m_c = \tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} \quad .$$

Fällt man im Dreieck ABC die Höhe $CC' = h_c$, so erhält man aus den rechtwinkligen Dreiecken ACC' und BCC', wenn ε der Winkel ist, den die Diagonalen des Parallelogramms miteinander bilden

$$\cot\varepsilon = \frac{\frac{1}{2}c - b\cos\alpha}{h_c} = \frac{a\cos\beta - \frac{1}{2}c}{h_c} \quad ,$$

oder da

$$\frac{b\cos\alpha}{h_c} = \cot\alpha \, , \quad \frac{a\cos\beta}{h_c} = \cot\beta$$

ist:

$$\cot\varepsilon = \frac{c}{2h_c} - \cot\alpha \, , \quad \cot\varepsilon = \cot\beta - \frac{c}{2h_c} \quad .$$

Addiert man die beiden Ausdrücke für $\cot\varepsilon$ und dividiert die Summe durch 2, so erhält man:

$$\cot\varepsilon = \tfrac{1}{2}(\cot\beta - \cot\alpha) \quad .$$

Dabei ist, wenn $\angle AMC = \varepsilon$ betrachtet und $a > b$ also $\cot\beta > \cot\alpha$ vorausgesetzt wird, ε spitz. Nach Nr. 2, Formel 2) ist nun

$$\cot\beta = \frac{a - b\cos\gamma}{b\sin\gamma}, \quad \cot\alpha = \frac{b - a\cos\gamma}{b\sin\gamma} \quad ;$$

folglich, wenn F der Inhalt des Dreiecks ABC ist:

$$\cot\varepsilon = \frac{a^2 - b^2}{2ab\sin\gamma} = \frac{a^2 - b^2}{4F} \quad .$$

Bei einem Rhombus ist $a = b$, $\cot\varepsilon = 0$, d. h. die Diagonalen stehen aufeinander senkrecht oder im gleichschenkligen Dreieck ist die Mittellinie der Grundlinie, die Höhe des Dreiecks.

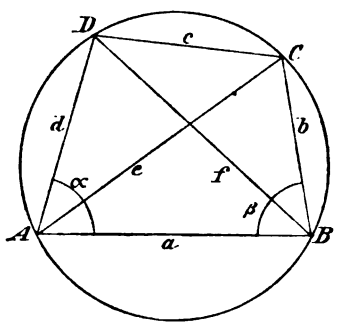


Fig. 218.

6. In einem Kreis vom Radius r sei das Viereck $ABCD$ (Fig. 218) eingeschrieben. Die Seiten seien $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$; die an den Ecken A und B liegenden Winkel α und β, also die an C und D liegenden die Supplemente von α und β. Die Diagonalen seien $AC = e$, $BD = f$. Drückt man in den beiden Dreiecken ABD und BCD nach dem allgemeinen pythagoreischen Lehrsatz f^2 doppelt aus, so ergibt sich die Gleichung

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha \quad ,$$

aus der

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}$$

folgt. Durch Vertauschung der Buchstaben würde man ebenso erhalten:

$$\cos\beta = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)} \quad .$$

Es sind also die Winkel des Sehnenvierecks durch dessen vier Seiten bestimmt. Wenn man $\cos\alpha$ zu 1 addiert und von 1 subtrahiert, so erhält man

$$1 + \cos\alpha = \frac{2ad + 2bc + a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} = \frac{(a + d)^2 - (b - c)^2}{2(ad + bc)}$$

$$= \frac{(a - b + c + d)(a + b - c + d)}{2(ad + bc)} \quad ,$$

$$1 - \cos\alpha = \frac{2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2}{2(ad + bc)} = \frac{(b + c)^2 - (a - d)^2}{2(ad + bc)}$$

$$= \frac{(-a + b + c + d)(a + b + c - d)}{2(ad + bc)} \quad .$$

Bedient man sich der Abkürzung

$$a + b + c + d = 2s \quad ,$$

so wird

$$-a + b + c + d = 2(s - a), \quad a - b + c + d = 2(s - b), \quad a + b - c + d = 2(s - c),$$
$$a + b + c - d = 2(s - d)$$

und man erhält

$$1 + \cos\alpha = \frac{2(s-b)(s-c)}{ad+bc}, \quad 1 - \cos\alpha = \frac{2(s-a)(s-d)}{ad+bc} .$$

Nach der goniometrischen Formel 7) in § 9 Nr. 1 findet man hieraus

$$\tan\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{(s-b)(s-c)}} ,$$

wozu man durch Buchstabenvertauschung noch fügen kann:

$$\tan\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{(s-c)(s-d)}} .$$

Damit hat man logarithmisch bequeme Formeln zur Berechnung der Winkel eines Sehnenvierecks aus den vier Seiten. Ebenso erhält man:

$$\sin\alpha = \sqrt{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)} = \frac{2}{ad+bc}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} .$$

Nun ist der Inhalt F des Sehnenvierecks die Summe der Inhalte der beiden Dreiecke ABD und BCD, also:

$$F = \tfrac{1}{2}ad\sin\alpha + \tfrac{1}{2}bc\sin\alpha = \tfrac{1}{2}(ad+bc)\sin\alpha .$$

Setzt man hierin den Wert von $\sin\alpha$ ein, so ergibt sich die Formel für den Flächeninhalt eines Sehnenvierecks, ausgedrückt durch die vier Seiten:

$$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} .$$

Für $d = 0$ geht diese in die Heronische Dreiecksformel über.

Aus den beiden Gleichungen für das Quadrat der Diagonale f:

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha , \quad f^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha$$

erhält man durch Elimination von $\cos\alpha$:

$$(ad+bc)f^2 = bc(a^2+d^2) + ad(b^2+c^2) = ab(ac+bd) + cd(bd+ac)$$
$$= (ab+cd)(ac+bd)$$

und daraus:

$$f = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}} .$$

Durch Buchstabenvertauschung erhält man dazu:

$$e = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}} .$$

Die Multiplikation beider Formeln ergibt:

$$ef = ac + bd ,$$

den ptolomäischen Lehrsatz (*Planimetrie* § 29 Nr. 3). Durch Division erhält man:

$$\frac{e}{f} = \frac{ad+bc}{ab+cd} .$$

Aus f läßt sich auch der Radius des Umkreises bestimmen; es ist nämlich

$$r = \frac{f}{2\sin\alpha} , \qquad \sin\alpha = \frac{2F}{ad+bc} ,$$

mithin

$$r = \frac{(ad+bc)f}{4F} .$$

oder nach Einsetzung des Wertes von f

$$r = \frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4F} .$$

Auch diese Formel ergibt für $d = 0$ die entsprechende für das Dreieck (§ 8 Nr. 1, 6)).

§ 11. Beziehungen des Dreiecks zum Inkreise und einem Ankreise.

1. Die Halbierungslinien der Winkel des Dreiecks ABC (Fig. 219) schneiden sich in O, dem Mittelpunkt des Inkreises. Die von O auf die Seiten gefällten Senkrechten sind gleich dem Radius $OO' = \varrho$ des Inkreises, und deren Fußpunkte sind die Berührungspunkte des Inkreises auf den drei Seiten. Die Abschnitte, die diese Berührungspunkte auf den Seiten hervorbringen, sind paarweis gleich: die beiden an A anliegenden sind

$$\tfrac{1}{2}(b+c-a) = s-a ,$$

wenn $a+b+c = 2s$ gesetzt wird und die an B und C anliegenden entsprechend $s-b$ und $s-c$ (vgl. *Planimetrie* § 28 Nr. 3). Durch AO, BO, CO wird das Dreieck ABC in drei Dreiecke zerlegt, von denen jedes eine Seite als Grundlinie und ϱ als Höhe hat. Ist also F der Inhalt des Dreiecks, so muß

$$F = \tfrac{1}{2}a\varrho + \tfrac{1}{2}b\varrho + \tfrac{1}{2}c\varrho$$
$$= \tfrac{1}{2}(a+b+c)\varrho$$

oder

$$1) \qquad F = s\varrho$$

sein. Nach der Heronischen Dreiecksformel ist aber

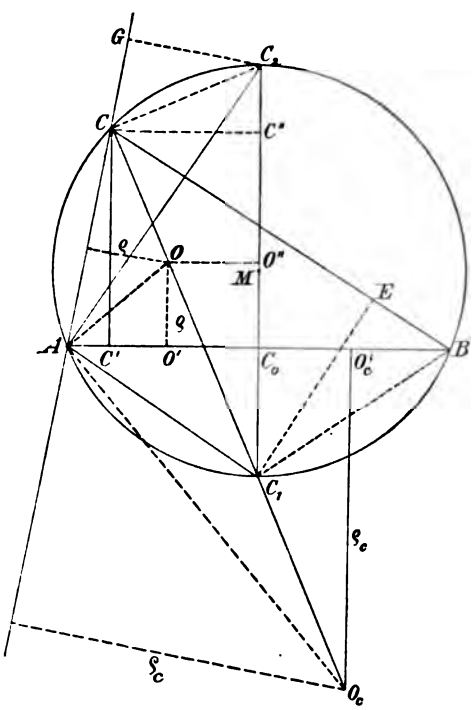


Fig. 219.

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} ,$$

also ist

$$2) \qquad \varrho = \frac{F}{s} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} .$$

Nun erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck AOO':

$$3) \qquad \tan\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\varrho}{s-a}$$

und entsprechend

$$\tan\tfrac{1}{2}\beta = \frac{\varrho}{s-b} , \qquad \tan\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\varrho}{s-c} .$$

Mit dem Werte von ϱ aus 2) erhält man also

$$\tan\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{1}{s-c}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

übereinstimmend mit Formel 9) in § 10 Nr. 4.

Die Formeln 2) und 3) geben die für numerische Rechnung bequemste Methode, aus den drei Seiten eines Dreiecks die Winkel unabhängig voneinander zu finden. Man bestimme womöglich, d. h. wenn es die Tafeldifferenzen zulassen, die halben Winkel mit etwas größerer Genauigkeit als man für die ganzen Winkel erhalten will; z. B. bei fünfstelligen Tafeln bis auf Zehntelsekunden genau. Bei der Multiplikation mit 2 werden dann die ganzen Winkel bis auf Sekunden schärfer bestimmt werden können durch Berücksichtigung der Zehntel. Die Summe der ganzen Winkel wird nicht immer genau 180^0 geben können.

Beispiele: 1. (§ 10 Nr. 3):

$a = 13$, $b = 14$, $c = 15$: $2s = 42$, $s = 21$, $s-a = 8$, $s-b = 7$, $s-c = 6$.

$F = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$; $\varrho = \frac{F}{s} = 4$

$\tan\frac{1}{2}\alpha = \frac{\varrho}{s-a} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\alpha = 26^0\,33'\,54{,}4''$, $\alpha = 53^0\,7'\,49''$

$\tan\frac{1}{2}\beta = \frac{\varrho}{s-b} = \frac{4}{7}$, $\frac{1}{2}\beta = 29^0\,44'\,41{,}4''$, $\beta = 59^0\,29'\,23''$

$\tan\frac{1}{2}\gamma = \frac{\varrho}{s-c} = \frac{4}{6}$, $\frac{1}{2}\gamma = 33^0\,41'\,24{,}5''$, $\gamma = 67^0\,22'\,49''$

$\log 4 =$	0,60 206
$\log 7 =$	0,84 510
$\log 6 =$	0,77 915
$\log\tan\frac{1}{2}\alpha =$	9,69 897
$\log\tan\frac{1}{2}\beta =$	9,75 696
$\log\tan\frac{1}{2}\gamma =$	9,82 391

$\alpha + \beta + \gamma = 180^0\,0'\,1''$

2. $a = 106{,}89$, $b = 82{,}68$, $c = 47{,}29$; $2s = 236{,}86$, $s = 118{,}43$, $s-a = 11{,}54$, $s-b = 35{,}75$, $s-c = 71{,}14$

$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$; $\varrho = \frac{F}{s}$

$\tan\frac{1}{2}\alpha = \frac{\varrho}{s-a}$, $\frac{1}{2}\alpha = 53^0\,45'\,23{,}0''$, $\alpha = 107^0\,30'\,46''$

$\tan\frac{1}{2}\beta = \frac{\varrho}{s-b}$, $\frac{1}{2}\beta = 23^0\,45'\,56{,}5''$, $\beta = 47^0\,31'\,53''$

$\tan\frac{1}{2}\gamma = \frac{\varrho}{s-c}$, $\frac{1}{2}\gamma = 12^0\,28'\,40{,}0''$, $\gamma = 24^0\,57'\,20''$

$\log s =$	2,07 346
$\log(s-a) =$	1,06 221
$\log(s-b) =$	1,55 328
$\log(s-c) =$	1,85 211
$\log F^2 =$	6,54 106
$\log F =$	3,27 053
$\log\varrho =$	1,19 707
$\log\tan\frac{1}{2}\alpha =$	0,13 486
$\log\tan\frac{1}{2}\beta =$	9,64 379
$\log\tan\frac{1}{2}\gamma =$	9,34 496

$\alpha + \beta + \gamma = 179^0\,59'\,59''$

2. Aus den rechtwinkligen Dreiecken AOO' und BOO' erhält man

$$s - a = \varrho \cot \tfrac{1}{2}\alpha , \quad s - b = \varrho \cot \tfrac{1}{2}\beta ,$$

also

$$4) \qquad c = (s - a) + (s - b) = \varrho (\cot \tfrac{1}{2}\alpha + \cot \tfrac{1}{2}\beta) .$$

Wendet man dagegen auf das Dreieck ABO den Sinussatz an, so ist

$$c = \frac{AO}{\sin \frac{1}{2}\beta} \sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

und da

$$AO = \frac{\varrho}{\sin \frac{1}{2}\alpha} , \quad \sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = \cos \tfrac{1}{2}\gamma$$

ist, so folgt

$$5) \qquad c = \varrho \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta} .$$

Die Identität der Formeln 4) und 5) beweist man durch Anwendung einer goniometrischen Formel in § 9 Nr. 3, wonach man erhält:

$$\cot \tfrac{1}{2}\alpha + \cot \tfrac{1}{2}\beta = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta} = \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta} .$$

Da nun, wenn r der Radius des Umkreises ist

$$c = 2r \sin \gamma = 4r \sin \tfrac{1}{2}\gamma \cos \tfrac{1}{2}\gamma$$

gesetzt werden kann, so erhält man durch Vergleichung mit 5):

$$6) \qquad \varrho = 4r \sin \tfrac{1}{2}\alpha \sin \tfrac{1}{2}\beta \sin \tfrac{1}{2}\gamma .$$

Der Inhalt des Dreiecks ABC läßt sich auch zusammensetzen aus den sechs rechtwinkligen Dreiecken, von denen zwei die Hypotenuse AO und die Kathete ϱ haben: diese beiden haben zusammen den Inhalt

$$(s - a)\varrho = \varrho^2 \cot \tfrac{1}{2}\alpha ,$$

so daß der Inhalt des ganzen Dreiecks wird:

$$7) \qquad F = (s - a)\varrho + (s - b)\varrho + (s - c)\varrho = \varrho^2 (\cot \tfrac{1}{2}\alpha + \cot \tfrac{1}{2}\beta + \cot \tfrac{1}{2}\gamma) .$$

Wenn man die Heronische Dreiecksformel quadriert, so ist

$$F^2 = s(s - a)(s - b)(s - c) = s\varrho^3 \cot \tfrac{1}{2}\alpha \cot \tfrac{1}{2}\beta \cot \tfrac{1}{2}\gamma :$$

dividiert man diese Gleichung durch $F = s\varrho$, so wird

$$8) \qquad F = \varrho^2 \cot \tfrac{1}{2}\alpha \cot \tfrac{1}{2}\beta \cot \tfrac{1}{2}\gamma .$$

Die Vergleichung von 7) und 8) gibt die bemerkenswerte Beziehung zwischen den Winkeln eines Dreiecks

$$\cot \tfrac{1}{2}\alpha + \cot \tfrac{1}{2}\beta + \cot \tfrac{1}{2}\gamma = \cot \tfrac{1}{2}\alpha \cot \tfrac{1}{2}\beta \cot \tfrac{1}{2}\gamma .$$

Multipliziert man sie mit $\tan \frac{1}{2}\alpha \tan \frac{1}{2}\beta \tan \frac{1}{2}\gamma$, so nimmt sie die Gestalt an:

$$\tan \tfrac{1}{2}\alpha \tan \tfrac{1}{2}\beta + \tan \tfrac{1}{2}\alpha \tan \tfrac{1}{2}\gamma + \tan \tfrac{1}{2}\beta \tan \tfrac{1}{2}\gamma = 1 .$$

Ersetzt man in der Formel 4) in § 8 Nr. 1 für den Flächeninhalt:

$$F = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

die Sinus der Winkel durch Sinus und Cosinus der halben Winkel, so kann man schreiben

$$F = 16 r^2 \sin \tfrac{1}{2}\alpha \cos \tfrac{1}{2}\alpha \sin \tfrac{1}{2}\beta \cos \tfrac{1}{2}\beta \sin \tfrac{1}{2}\gamma \cos \tfrac{1}{2}\gamma .$$

Dividiert man diese Gleichung durch 6), so entsteht

$$9) \qquad \frac{F}{\varrho} = s = 4r \cos\tfrac{1}{2}\alpha \cos\tfrac{1}{2}\beta \cos\tfrac{1}{2}\gamma \quad .$$

Nun ist aber

$$s = \tfrac{1}{2}(a + b + c) = r(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) \quad ;$$

durch Vergleichung mit 9) erhält man die trigonometrische Beziehung zwischen den Winkeln des Dreiecks

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4 \cos\tfrac{1}{2}\alpha \cos\tfrac{1}{2}\beta \cos\tfrac{1}{2}\gamma \quad .$$

3. Halbiert man die Außenwinkel des Dreiecks ABC (Fig. 219 S. 458) bei A und B, so schneiden sich die Halbierungslinien mit der des Winkels γ in O_c, dem Mittelpunkt des Ankreises der Seite c. Die von O_c auf die Seiten gefällten Senkrechten sind gleich dem Radius ϱ_c dieses Ankreises und die Fußpunkte der Senkrechten sind seine Berührungspunkte auf den Seiten. Der Berührungspunkt O'_c auf c teilt diese Seite so, daß $AO'_c = BO' = s - b$ und $BO'_c = AO' = s - a$ ist. Da die an A und B anliegenden äußern Abschnitte der Seiten a und b wieder $s - b$ und $s - a$ sind, so sind die von C gerechneten Abschnitte dieser Seiten beide gleich s (vgl. *Planimetrie* § 43 Nr. 3). Den Inhalt des Dreiecks wird man erhalten, wenn man von der Summe der Dreiecke AO_cC und BO_cC das Dreieck AO_cB subtrahiert: es ist demnach

$$F = \tfrac{1}{2}a\varrho_c + \tfrac{1}{2}b\varrho_c - \tfrac{1}{2}c\varrho_c = \tfrac{1}{2}(a + b - c)\varrho_c$$

oder

$$10) \qquad F = (s - c)\varrho_c$$

und

$$11) \qquad \varrho_c = \frac{F}{s - c} = \sqrt{\frac{s(s - a)(s - b)}{s - c}} \quad .$$

Aus einem der rechtwinkligen Dreiecke mit der Hypotenuse CO_c und dem Winkel $\frac{1}{2}\gamma$ folgt

$$12) \qquad \tan\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\varrho_c}{s} \quad .$$

Da ferner $\angle AO_cO'_c = \frac{1}{2}\alpha$ ist, weil die Schenkel beider Winkel aufeinander senkrecht stehen und aus demselben Grunde $\angle BO_cO'_c = \frac{1}{2}\beta$ ist, so hat man

$$13) \qquad \cot\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\varrho_c}{s - b}, \quad \cot\tfrac{1}{2}\beta = \frac{\varrho_c}{s - a} \quad .$$

Die entsprechenden Formeln für die Radien ϱ_a und ϱ_b der Ankreise der Seiten a und b kann man durch Buchstabenvertauschung leicht bilden.

Aus 12) und 13), oder direkt aus rechtwinkligen Dreiecken der Figur folgt

$$s = \varrho_c \cot\tfrac{1}{2}\gamma, \quad s - b = \varrho_c \tan\tfrac{1}{2}\alpha, \quad s - a = \varrho_c \tan\tfrac{1}{2}\beta \quad ,$$

so daß man berechnen kann:

$$14) \qquad \begin{cases} c = (s - b) + (s - a) = \varrho_c(\tan\tfrac{1}{2}\alpha + \tan\tfrac{1}{2}\beta) \\ a = s - (s - a) = \varrho_c(\cot\tfrac{1}{2}\gamma - \tan\tfrac{1}{2}\beta) \\ b = s - (s - b) = \varrho_c(\cot\tfrac{1}{2}\gamma - \tan\tfrac{1}{2}\alpha) \end{cases}$$

Eine andre Formel für c erhält man, wenn man auf das Dreieck AO_cB den Sinussatz anwendet. Es ist dann

$$c = \frac{AO_c}{\cos\tfrac{1}{2}\beta} \sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

und da

$$AO_c = \frac{\varrho_c}{\cos\frac{1}{2}\alpha}, \quad \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \cos\tfrac{1}{2}\gamma$$

ist, so ergibt sich

$$15) \qquad c = \varrho_c \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta} \quad .$$

Die Identität dieses Ausdrucks für c mit dem in 14) läßt sich durch Umformung mit Hilfe goniometrischer Formeln beweisen (vgl. Nr. 2). Durch den Radius des Umkreises ausgedrückt ist

$$c = 2r\sin\gamma = 4r\sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}\gamma \quad .$$

Setzt man diesen Ausdruck für c mit dem in 15) gleich, so erhält man die Formel:

$$16) \qquad \varrho_c = 4r\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma \quad ,$$

und wenn man die Gleichung

$$F = 16r^2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}\gamma$$

durch 16) dividiert, so folgt

$$\frac{F}{\varrho_c} = s - c = 4r\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma \quad .$$

Es ist aber

$$s - c = \tfrac{1}{2}(a+b-c) = r(\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma) \quad ;$$

mithin erhält man:

$$\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma \quad .$$

Aus 16) und 6) erhält man noch durch Division die Beziehung:

$$17) \qquad \varrho_c = \varrho\cot\tfrac{1}{2}\alpha\cot\tfrac{1}{2}\beta \quad .$$

4. Beschreibt man um das Dreieck ABC den Umkreis (Fig. 219 S. 458), dessen Mittelpunkt M ist, so geht dieser durch den Halbierungspunkt C_1 von OO_c und C_1 ist der eine Endpunkt des zu AB senkrechten Durchmessers C_1C_2, der AB in C_0 halbiert (vgl. § 8 Nr. 5). Weiter ist $OC_1 = O_cC_1 = AC_1 = BC_1$ (vgl. *Planimetrie* § 43 Nr. 1). Nun hat man aus rechtwinkligen Dreiecken:

$$CO = \frac{\varrho}{\sin\frac{1}{2}\gamma}, \quad CO_c = \frac{\varrho_c}{\sin\frac{1}{2}\gamma} \quad .$$

und aus dem rechtwinkligen Dreieck AC_1C_2, in dem $\angle AC_2C_1 = \frac{1}{2}\gamma$ ist:

$$AC_1 = BC_1 = 2r\sin\tfrac{1}{2}\gamma = OC_1 = O_cC_1 \quad ;$$

durch Multiplikation erhält man daher

$$CO \cdot OC_1 = 2r\varrho, \quad CO_c \cdot O_cC_1 = 2r\varrho_c \quad .$$

Es ist nun $CO \cdot OC_1$ der absolute Wert der Potenz von O in Bezug auf den Umkreis und $CO_c \cdot O_cC_1$ die Potenz von O_c in Bezug auf diesen (vgl. *Planimetrie* § 29 Nr. 1). Mithin ist

$$CO \cdot OC_1 = r^2 - MO^2, \quad CO_c \cdot O_cC_1 = MO_c^2 - r^2 \quad :$$

es sind also die Entfernungen des Mittelpunkts des Umkreises von den Mittelpunkten des Inkreises und des Ankreises der Seite c:

$$18) \qquad MO = \sqrt{r^2 - 2r\varrho}, \quad MO_c = \sqrt{r^2 + 2r\varrho_c} \quad .$$

Da C_1 der Mittelpunkt von OO_c ist, so findet man, daß $C_1C_0 = \frac{1}{2}(\varrho_c - \varrho)$ sein muß. C_1C_0 ist aber in dem rechtwinkligen Dreieck AC_1C_2 der eine durch

die Höhe AC_0 auf der Hypotenuse $C_1C_2 = 2r$ gebildete Abschnitt und daher

$$19) \qquad C_1C_0 = \tfrac{1}{2}(\varrho_c - \varrho) = 2r\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma \quad .$$

Fällt man von C_1 die Senkrechte C_1E auf CB, so ist nach § 8 Nr. 5 der Winkel $BC_1E = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ und fällt man von O die Senkrechte OO'' auf C_1C_2, so ist $C_1O'' = \frac{1}{2}(\varrho_c + \varrho)$ und $\angle\, OC_1O'' = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Daher ist $\triangle\, C_1BE \sim \triangle\, C_1OO''$ also auch $C_1E = C_1O'' = \frac{1}{2}(\varrho_c + \varrho)$. Daraus folgt:

$$20) \qquad \tfrac{1}{2}(\varrho_c + \varrho) = BC_1 \cdot \cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = 2r\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\sin\tfrac{1}{2}\gamma$$

und da ferner

$$\tfrac{1}{2}c = AC_1 \cdot \cos\tfrac{1}{2}\gamma = BC_1 \cdot \cos\tfrac{1}{2}\gamma$$

ist, so hat man durch Division

$$21) \qquad \varrho_c + \varrho = c \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos\frac{1}{2}\gamma} \quad .$$

Weiter ist nach § 8 Nr. 5, $CE = \frac{1}{2}(a + b)$, $BE = \frac{1}{2}(a - b)$, also in den rechtwinkligen Dreiecken C_1CE und C_1BE wenn man den Faktor $\frac{1}{2}$ beiderseits wegläßt

$$22) \qquad \varrho_c + \varrho = (a + b)\tan\tfrac{1}{2}\gamma = (a - b)\cot\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \quad .$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck AC_1C_0 erhält man noch

$$23) \qquad \varrho_c - \varrho = c\tan\tfrac{1}{2}\gamma \quad .$$

Verbindet man A mit M, so ist $\angle\, AMC_0 = \gamma$, folglich

$$24) \qquad \cos\gamma = \frac{r - \frac{1}{2}(\varrho_c - \varrho)}{r} \quad ,$$

woraus

$$1 - \cos\gamma = \frac{\frac{1}{2}(\varrho_c - \varrho)}{r} = 2\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma$$

folgen würde in Übereinstimmung mit 19). Formel 24) lehrt aber, daß je nachdem

$$\tfrac{1}{2}(\varrho_c - \varrho) \lessgtr r, \quad \gamma \lessgtr 90^0$$

sein wird.

Fällt man C die Senkrechte CC'' auf C_1C_2, so ist $C_0C'' = CC' = h_c$ und das rechtwinklige Dreieck C_1CC_2 liefert die Beziehung

$$25) \qquad \tfrac{1}{2}(\varrho_c - \varrho) + h_c = 2r\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \quad .$$

Vergleicht man den Wert

$$h_c = 2r\sin\alpha\sin\beta = 8r\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\beta$$

mit den Werten von ϱ und ϱ_c in 6) und 16), so findet man

$$26) \qquad h_c = 2\varrho\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\gamma} = 2\varrho_c\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\gamma} \quad .$$

5. Die, namentlich in Nr. 4, ermittelten Beziehungen zwischen Stücken eines Dreiecks, geben die Möglichkeit, eine große Zahl trigonometrischer Aufgaben zu lösen. Es ist auch hier zu raten, das Dreieck zunächst aus den Bestimmungsstücken zu konstruieren und dann die etwa gesuchten Stücke aus rechtwinkligen Dreiecken der Figur zu berechnen.

Ist von einem Dreieck der Umkreis gegeben, von dem ein Durchmesser C_1C_2 beliebig angenommen werden kann, so ist durch $C_1C_0 = \frac{1}{2}(\varrho_c - \varrho) = q$ die Seite c und der Winkel γ eindeutig bestimmt. Aus dem rechtwinkligen Dreieck C_1AC_2 hat man

$$\tfrac{1}{2}c = \sqrt{q(2r - q)}$$

und da nach 19)

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{q}{2r}} = \frac{q}{\sqrt{2rq}} \quad .$$

oder nach 24)

$$\cos\gamma = \frac{r-q}{r} \quad .$$

Zur Bestimmung des Dreiecks muß nun außer r und q noch ein drittes Stück gegeben sein. Das Verfahren der Lösung soll dann an den folgenden Beispielen gezeigt werden.

1. Ist $\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \delta$ als drittes Stück bekannt, so hat man δ an C_1C_2 in C_1 anzutragen, um die Spitze C des Dreiecks zu erhalten. Aus $\frac{1}{2}\gamma$ und δ können sofort die Winkel bestimmt und da r gegeben ist, die Seiten berechnet werden. Zur algebraischen Berechnung der Seiten a und b hat man zunächst

$$AC_2 = \sqrt{2r(2r-q)}, \quad AC_1 = OC_1 = \sqrt{2rq} \quad .$$

Fällt man von C_2 die Senkrechte C_2G auf AC, so ist nach § 8 Nr. 5 $AG = \frac{1}{2}(a+b)$; also findet man weiter:

$$\tfrac{1}{2}(a+b) = AC_2 \cdot \cos\delta = \sqrt{2r(2r-q)} \cdot \cos\delta \quad ,$$

$$\tfrac{1}{2}(a-b) = OC_1 \cdot \sin\delta = \sqrt{2rq} \cdot \sin\delta \quad ;$$

$$\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} = \sqrt{2r(2r-q)} \cdot \cos\delta \pm \sqrt{2rq}\sin\delta \quad .$$

Ferner ist

$$C_1O'' = q + \varrho = \varrho_c - q = OC_1 \cdot \cos\delta = \sqrt{2rq} \cdot \cos\delta \quad :$$

$$\varrho = \sqrt{2rq} \cdot \cos\delta - q, \quad \varrho_c = \sqrt{2rq} \cdot \cos\delta + q \quad .$$

Aus

$$C_1C'' = q + h = 2r\cos^2\delta \quad ,$$

wobei h für h_c geschrieben worden ist, ergibt sich

$$h = 2r\cos^2\delta - q$$

und daher der Inhalt

$$F = \tfrac{1}{2}ch = (2r\cos^2\delta - q)\sqrt{q(2r-q)} \quad .$$

2. Ist $\frac{1}{2}(a-b) = d$ gegeben, so trägt man d von C_0 aus auf C_0A bis O' auf, errichtet in O' die Senkrechte zu AB, die man durch den um C_1 mit C_1A geschlagenen Kreisbogen in O schneidet. C_1O gibt C als Schnittpunkt mit dem Umkreis. Zu numerischer Berechnung hat man hier:

$$\sin\delta = \frac{d}{OC_1} = \frac{d}{\sqrt{2rq}}$$

und damit die Winkel und Seiten. Will man a und b algebraisch berechnen, so findet sich aus den ähnlichen Dreiecken AC_2G von C_1OO'':

$$\frac{\frac{1}{2}(a+b)}{\sqrt{2r(2r-q)}} = \frac{\sqrt{2rq-d^2}}{\sqrt{2rq}}$$

und daraus

$$\tfrac{1}{2}(a+b) = \sqrt{\frac{2r-q}{q}}(2rq - d^2) \quad ;$$

$$\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{2r-q}{q}}(2rq-d^2) \pm d \quad .$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck C_1CC_2 ergibt sich ferner

$$C_2C'' = 2r\sin^2\delta = 2r\cdot\frac{d^2}{2rq} = \frac{d^2}{q} \quad ,$$

mithin

$$h = 2r - q - C_2C'' = 2r - q - \frac{d^2}{q}$$

und damit der Inhalt

$$F = \tfrac{1}{2}ch = (2rq - q^2 - d^2)\sqrt{\frac{2r-q}{q}} \quad .$$

3. Ist außer r und q noch h gegeben, so ist die Konstruktion des Dreiecks sehr leicht. Aus

$$q + h = 2r\cos^2\delta$$

findet man hier

$$\cos\delta = \sqrt{\frac{q+h}{2r}}$$

und damit wieder Winkel und Seiten. Algebraisch berechnet hat man:

$$\tfrac{1}{2}(a+b) = AC_2\cdot\cos\delta = \sqrt{(q+h)(2r-q)}$$

und

$$d = \sqrt{q(2r-q-h)} \quad ,$$

also die Seiten

$$\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} = \sqrt{(q+h)(2r-q)} \pm \sqrt{q(2r-q-h)} \quad .$$

Nach *Planimetrie* § 43 Nr. 3 Formel 3) ist

$$h = 2\varrho + \frac{\varrho^2}{q} = \frac{(q+\varrho)^2 - q^2}{q} \quad ;$$

daraus findet man

$$\varrho = \sqrt{q(q+h)} - q$$

und

$$\varrho_c = 2q + \varrho = \sqrt{q(q+h)} + q \quad .$$

Umgekehrt ist durch γ und c oder q der Umkreis des Dreiecks bestimmt und wenn noch ein drittes Stück gegeben ist, läßt sich die Aufgabe auf eine der vorher behandelten Aufgaben zurückführen. Ist c, γ und ϱ gegeben, so ist die Konstruktion sehr einfach. Zur Rechnung hat man:

$$2r = \frac{c}{\sin\gamma} \quad , \quad q = \tfrac{1}{2}c\tan\tfrac{1}{2}\gamma \quad , \quad q+\varrho = \tfrac{1}{2}c\tan\tfrac{1}{2}\gamma + \varrho \quad , \quad \sqrt{2rq} = \frac{\tfrac{1}{2}c}{\cos\tfrac{1}{2}\gamma}$$

und nun

$$\cos\delta = \frac{q+\varrho}{\sqrt{2rq}} = \frac{\tfrac{1}{2}c\tan\tfrac{1}{2}\gamma + \varrho}{\tfrac{1}{2}c}\cos\tfrac{1}{2}\gamma = \sin\tfrac{1}{2}\gamma + \frac{2\varrho}{c}\cos\tfrac{1}{2}\gamma \quad .$$

Zu algebraischer Rechnung bedient man sich der Beziehungen:

$$\tfrac{1}{2}(a+b) = (q+\varrho)\cot\tfrac{1}{2}\gamma = \tfrac{1}{2}c + \varrho\cot\tfrac{1}{2}\gamma$$

und

$$d = \tfrac{1}{2}(a-b) = \sqrt{2rq - (q+\varrho)^2} = \sqrt{\frac{\tfrac{1}{4}c^2}{\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma} - (\tfrac{1}{2}c\tan\tfrac{1}{2}\gamma + \varrho)^2}$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{4}c^2 - c\varrho\tan\tfrac{1}{2}\gamma - \varrho^2} \quad ,$$

woraus folgt:

$$\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}c + \varrho\cot\tfrac{1}{2}\gamma \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}c^2 - c\varrho\tan\tfrac{1}{2}\gamma - \varrho^2} \quad .$$

Außerdem würde sich noch ergeben:

$$h = 2\varrho + \frac{\varrho^2}{q} = \varrho + \frac{2\varrho^2}{c}\cot\tfrac{1}{2}\gamma \quad ,$$

so daß man den Flächeninhalt

$$F = \varrho(c + \varrho\cot\tfrac{1}{2}\gamma)$$

in rationaler Form erhält. Er würde übrigens auch aus $F = s\varrho = \frac{1}{2}(a + b + c)\varrho$ gefunden werden können.

Wenn von einem Dreieck r und c gegeben sind, so ist q und damit γ im allgemeinen zweideutig bestimmt. Der Durchmesser C_1C_2 wird durch c in zwei Abschnitte geteilt, die beide als q angenommen werden können. Dem Werte $q_1 < r$ entspricht ein spitzwinkliges, dem Werte $q_2 > r$ ein stumpfwinkliges Dreieck. Aus dem rechtwinkligen Dreieck AMC_0 ergibt sich

$$\sin\gamma = \frac{\frac{1}{2}c}{r}, \quad q = r \mp \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}c^2}, \quad \cos\gamma = \pm\frac{\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}c^2}}{r} \quad .$$

Damit lassen sich Aufgaben lösen, bei denen außer r und c gegeben ist: d; δ; h; ϱ: ϱ_c u. s. w.

6. Ist also der Umkreis eines Dreiecks gegeben, so läßt sich in vielen Fällen mit Hilfe zweier andrer Stücke das Dreieck konstruieren und die rechtwinkligen Dreiecke der Figur benutzt man dann zur Rechnung. Besondere Aufmerksamkeit verdienen die Fälle, in denen das Dreieck zweideutig bestimmt ist. Eine solche Aufgabe erhält man z. B. wenn r, h_c und $\frac{1}{2}(a - b) = d$ gegeben ist. Aus der Beziehung in Nr. 5

$$h = 2r - q - \frac{d^2}{q} \quad ,$$

wobei wieder h für h_c geschrieben ist und worin (Fig. 219 S. 458)

$$C_1C_0 = q = \tfrac{1}{2}(\varrho_c - \varrho), \quad C_2C'' = \frac{d^2}{q}$$

ist, erhält man

$$q + \frac{d^2}{q} = 2r - h$$

und da man auch

$$q \cdot \frac{d^2}{q} = d^2$$

kennt, so kann man q und $d^2 : q$ konstruieren. Trägt man (Fig. 220) auf dem beliebigen Durchmesser C_1C_2 des gegebenen Umkreises von C_2 aus h ab, schlägt über $2r - h$ als Durchmesser den Halbkreis und zieht in der Entfernung d zu C_1C_2 die Parallele, die den Halbkreis in zwei Punkten schneidet, so ist jede der beiden durch diese Punkte zu C_1C_2 senkrecht gezogenen Sehnen die Seite $AB = c$, durch die $2r - h$ in die beiden Teile q und $d^2 : q$ geteilt wird. Die weitere Konstruktion ist leicht. Die Aufgabe ist nur lösbar, wenn $d < \frac{1}{2}(2r - h)$ ist und ist dann jedenfalls zweideutig. In dem besondern Falle $d = \frac{1}{2}(2r - h)$ erhält man ein bei A rechtwinkliges Dreieck.

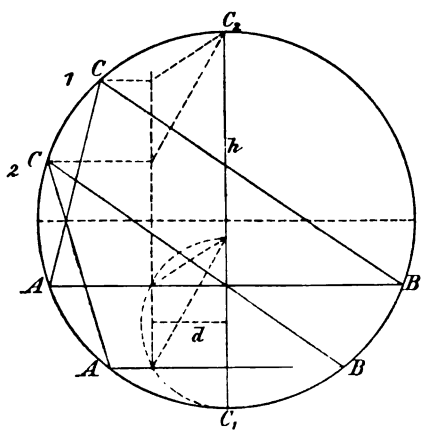


Fig. 220.

Die Berechnung der Seiten a und b kann hier ohne Rücksicht auf die Konstruktion aus der Beziehung 5) in § 8 Nr. 1

$$ab = 2rh$$

und dem gegebenen:

$$d = \tfrac{1}{2}(a - b)$$

erfolgen; man erhält sofort

$$\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} = \sqrt{2rh + d^2} \pm d \quad .$$

Beide Dreiecke haben also dieselben Seiten a und b. Die Winkel sind aus

$$\sin\alpha = \frac{a}{2r}, \quad \sin\beta = \frac{b}{2r}$$

bestimmt, und zwar α zweideutig, β eindeutig. Die Winkel α_1 und α_2 der beiden Dreiecke sind also Supplemente; der Winkel β ist in beiden derselbe, daher müssen die Seiten b beider Dreiecke parallel sein. Die Seiten a sind gleich weit vom Mittelpunkte entfernt, schneiden sich also auf dem zu C_1C_2 senkrechten Durchmesser.

Der Winkel γ und die Seite c ist nun auch zu berechnen, und zwar ist

$$\gamma_1 = 180^0 - \alpha_1 - \beta = \alpha_2 - \beta, \quad \gamma_2 = 180^0 - \alpha_2 - \beta = \alpha_1 - \beta \quad ,$$
$$c_1 = 2r\sin(\alpha_2 - \beta), \quad c_2 = 2r\sin(\alpha_1 - \beta) \quad .$$

Die algebraische Berechnung von c erfordert die Auflösung der beiden Gleichungen, die den Weg zur Konstruktion gezeigt haben:

$$q + \frac{d^2}{q} = 2r - h, \quad q \cdot \frac{d^2}{q} = d^2 \quad ;$$

aus ihnen folgt zunächst

$$q - \frac{d^2}{q} = \pm w, \quad w = \sqrt{(2r - h)^2 - 4d^2}$$

und daraus

$$q = \tfrac{1}{2}(2r - h \pm w), \quad 2r - q = \tfrac{1}{2}(2r + h \mp w) \quad .$$

Damit erhält man

$$c = 2\sqrt{q(2r - q)} = \sqrt{(2r - h \pm w)(2r + h \mp w)} \quad .$$

Sind von einem Dreieck r und ϱ oder ϱ_c gegeben, so erhält man nach 18) in Nr. 4 die Entfernungen MO oder MO_c, die man als mittlere Proportionalen konstruieren kann. Damit erhält man einen Ort für O oder O_c. Mit einem dritten Bestimmungsstück läßt sich dann das Dreieck konstruieren.

Ist z. B. r, ϱ und $\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \delta$ gegeben, so trägt man auf dem beliebigen Durchmesser C_1C_2 des Umkreises mit dem Mittelpunkte M, von C_2 aus 2ϱ auf (Fig. 221), schlägt über C_2M den Halbkreis und errichtet im Endpunkte von 2ϱ die Senkrechte zu C_1C_2, die den Halbkreis schneidet. Die Verbindungslinie dieses Schnittpunktes mit M gibt $MO = e = \sqrt{r(r - 2\varrho)}$. Trägt man nun in C_1 an C_1C_2 den Winkel δ an, so wird der andre Schenkel C_1C von dem um M mit e geschlagenen Kreisbogen zweimal geschnitten.

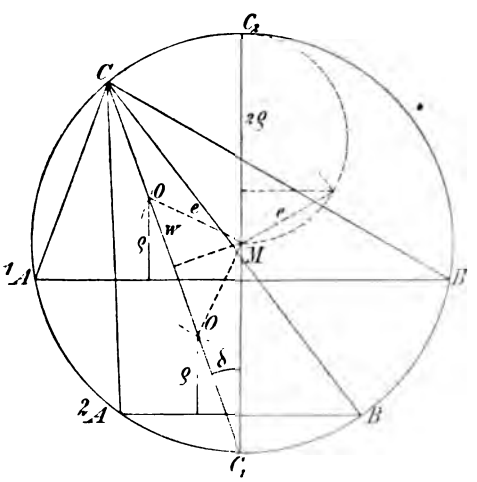


Fig. 221.

Jeder Schnittpunkt ist O und da man ϱ kennt, ist die weitere Konstruktion einfach. Fällt man von O die Senkrechte auf C_1C, so findet man aus rechtwinkligen Dreiecken

$$OC_1 = \sqrt{2rq} = r\cos\delta \pm w \quad ,$$

wobei

$$w = \sqrt{e^2 - r^2\sin^2\delta} = \sqrt{r^2\cos^2\delta - 2r\varrho}$$

ist. Nun hat man weiter

$$q + \varrho = \sqrt{2rq}\cdot\cos\delta = (r\cos\delta \pm w)\cos\delta \quad ,$$
$$q = (r\cos\delta \pm w)\cos\delta - \varrho$$

und damit

$$\cos\gamma = \frac{r-q}{r} = \frac{r + \varrho - (r\cos\delta \pm w)\cos\delta}{r} \quad .$$

Da man $\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \delta$ kennt, so sind die Winkel und aus r die Seiten zu finden. Zur algebraischen Berechnung würde man zunächst haben:

$$d = \tfrac{1}{2}(a - b) = \sqrt{2rq}\cdot\sin\delta = (r\cos\delta \pm w)\sin\delta$$

und

$$\tfrac{1}{2}(a+b) = AC_2\cdot\cos\delta = \sqrt{2r(2r-q)}\cdot\cos\delta = \sqrt{2r[2r + \varrho - (r\cos\delta \pm w)\cos\delta]}\cdot\cos\delta,$$

also

$$a = \sqrt{2r[2r + \varrho - (r\cos\delta \pm w)\cos\delta]}\cdot\cos\delta + (r\cos\delta \pm w)\sin\delta \quad ,$$
$$b = \sqrt{2r[2r + \varrho - (r\cos\delta \pm w)\cos\delta]}\cdot\cos\delta - (r\cos\delta \pm w)\sin\delta \quad ;$$

endlich ist

$$\tfrac{1}{2}c = \sqrt{q(2r-q)} = \sqrt{[(r\cos\delta \pm w)\cos\delta - \varrho][2r + \varrho - (r\cos\delta \pm w)\cos\delta]} \quad .$$

Beispiel:

$$r = 65\,, \quad \varrho = 28\,, \quad \delta = 19^0\,26'\,24'' \quad .$$

Die Resultate der logarithmischen Rechnung sind:

$$w = \sqrt{r^2\cos^2\delta - 2r\varrho} = \sqrt{117} = 10{,}817 \quad ;$$
$$r\cos\delta + w = 72{,}111\,, \quad r\cos\delta - w = 50{,}447 \quad .$$

$q_1 + \varrho = (r\cos\delta + w)\cos\delta = 68$; $q_1 = 40$ $\quad$ $q_2 + \varrho = (r\cos\delta - w)\cos\delta = 47{,}6$; $q_2 = 19{,}6$

$\cos\gamma_1 = \frac{r - q_1}{r} = \frac{5}{13}$, $\gamma_1 = 67^0\,22'\,48''$ $\quad$ $\cos\gamma_2 = \frac{r - q_2}{r} = \frac{45{,}4}{65}$, $\gamma_2 = 45^0\,41'\,42''$

$a_1 = 75^0\,45'\,0''$ $\quad$ $a_2 = 86^0\,35'\,33''$

$\beta_1 = 36^0\,52'\,12''$ $\quad$ $\beta_2 = 47^0\,42'\,45''$

$\frac{1}{2}(a_1 - b_1) = (r\cos\delta + w)\sin\delta = 24$ $\quad$ $\frac{1}{2}(a_2 - b_2) = (r\cos\delta - w)\sin\delta = 16{,}8$

$\frac{1}{2}(a_1 + b_1) = \sqrt{2r(2r - q_1)}\cdot\cos\delta = 102$; $\quad$ $\frac{1}{2}(a_2 + b_2) = \sqrt{2r(2r - q_2)}\cdot\cos\delta = 112{,}97$:

$a_1 = 126\,, \quad b_1 = 78$; $\quad$ $a_2 = 129{,}77\,, \quad b_2 = 96{,}17$;

$c_1 = 2\sqrt{q_1(2r - q_1)} = 120$. $\quad$ $c_2 = 2\sqrt{q_2(2r - q_2)} = 93{,}045$.

Probe:

$a_1 = 2r\sin\alpha_1 = 126$ $\quad$ $a_2 = 2r\sin\alpha_2 = 129{,}77$

$b_1 = 2r\sin\beta_1 = 78$ $\quad$ $b_2 = 2r\sin\beta_2 = 96{,}17$.

In ähnlicher Weise würde die Aufgabe: r, ϱ, $\frac{1}{2}(a - b) = d$ zu behandeln sein.

Viele andre Anfgaben lassen sich mit Hilfe von Fig. 219 (S. 458) konstruieren und berechnen. Z. B. ist durch c, ϱ, $\frac{1}{2}(a - b) = d$ das Dreieck AC_0O bestimmt. Die Mittelsenkrechte zu AO gibt dann als Schnittpunkt mit der in C_0 zu AC_0 errichteten Senkrechten den Punkt C_1: damit ist das rechtwinklige Dreieck AC_1C_2 zu konstruieren und man hat wieder C_1C_2, den Durchmesser des

Umkreises. Bei der Berechnung sind die an Fig. 219 vorkommenden Längen Hilfsgrößen. Da

$$OC_1^2 = AC_1^2$$

oder

$$(q + \varrho)^2 + d^2 = \tfrac{1}{4}c^2 + q^2$$

ist, so finden sich zunächst

$$q = \frac{\frac{1}{4}c^2 - d^2 - \varrho^2}{2\varrho}, \quad q + \varrho = \frac{\frac{1}{4}c^2 - d^2 + \varrho^2}{2\varrho}$$

und nun

$$\tan\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{q}{\frac{1}{2}c} = \frac{\frac{1}{4}c^2 - d^2 - \varrho^2}{c\varrho}, \quad \cot\delta = \frac{q+\varrho}{d} = \frac{\frac{1}{4}c^2 - d^2 + \varrho^2}{2d\varrho};$$

endlich noch

$$\tfrac{1}{2}(a+b) = \tfrac{1}{2}c \cdot \frac{q+\varrho}{q} = \tfrac{1}{2}c \cdot \frac{\frac{1}{4}c^2 - d^2 + \varrho^2}{\frac{1}{4}c^2 - d^2 - \varrho^2},$$

und damit die Seiten a und b.

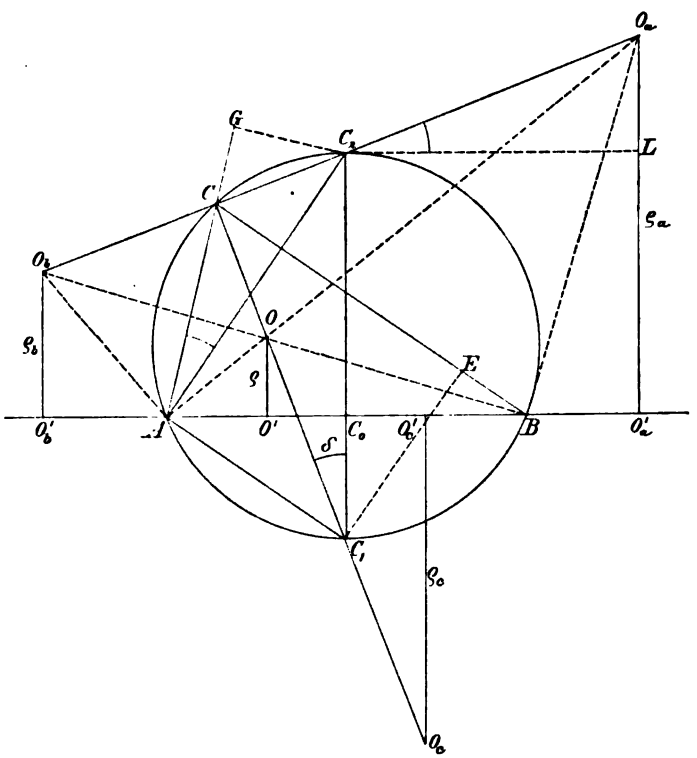


Fig. 222.

§ 12. Beziehungen des Dreiecks zu den Berührungskreisen und dem FEUERBACHschen Kreise.

1. Beschreibt man um das Dreieck ABC den Umkreis (Fig. 222) und zieht den zu AB senkrechten Durchmesser C_1C_2, der AB in C_0 halbiert, so liegt auf CC_1, der Halbierungslinie des Winkels γ, der Mittelpunkt O des Inkreises so, daß $OC_1 = AC_1 = BC_1$ ist. Die Senkrechte, die man von O auf AB fällt, gibt den Berührungspunkt O' des Inkreises auf AB. Zu O' symmetrisch in Bezug auf C_0 liegt der Berührungspunkt O_c' des Ankreises der Seite c, dessen Mittel-

punkt O_c ist. C_1C_2 ist nun die Halbierungslinie des Außenwinkels bei C, daher schneiden AO und BO diese Halbierungslinie in O_a und O_b den Mittelpunkten der Ankreise der Seiten a und b. Die Senkrechten O_aO_a' und O_bO_b' sind die Radien ϱ_a und ϱ_b dieser Ankreise und O_a' und O_b' deren Berührungspunkte auf der Verlängerung von AB. Dann ist $O'C_0 = O_c'C_0 = \frac{1}{2}(a - b)$; $AO_b' = BO_a' = s - c$, also $O_a'C_0 = O_b'C_0 = s - c + \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}(a + b)$ und $AO_a' = BO_b' = s - c + c = s$. Ferner ist $O'O_a' = O_c'O_b' = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(a - b) = a$ und $O'O_b' = O_c'O_a' = \frac{1}{2}(a + b) - \frac{1}{2}(a - b) = b$. In den rechtwinkligen Dreiecken O_aBO_a' und O_bAO_b' ist $\angle BO_aO_a' = \frac{1}{2}\beta$ und $\angle AO_bO_b' = \frac{1}{2}\alpha$: folglich ist

$$\varrho_a = s\tan\tfrac{1}{2}\alpha = (s - c)\cot\tfrac{1}{2}\beta \quad ,$$

$$\varrho_b = s\tan\tfrac{1}{2}\beta = (s - c)\cot\tfrac{1}{2}\alpha \quad .$$

Da C_0 die Strecke $O_a'O_b'$ halbiert, so ist in dem rechtwinkligen Trapez $O_a'O_b'O_bO_a$ die Mittelparallele

$$1) \qquad C_0C_2 = \tfrac{1}{2}(\varrho_a + \varrho_b) = 2r\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma$$

und da (§ 11 Nr. 4, 19))

$$C_1O_0 = \tfrac{1}{2}(\varrho_c - \varrho) = 2r\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma$$

ist, so muß

$$\tfrac{1}{2}(\varrho_a + \varrho_b) + \tfrac{1}{2}(\varrho_c - \varrho) = 2r$$

also

$$2) \qquad \varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = 4r$$

sein. Setzt man $\frac{1}{2}(\varrho_a - \varrho) = q_a$, $\frac{1}{2}(\varrho_b - \varrho) = q_b$, $\frac{1}{2}(\varrho_c - \varrho) = q_c$, wobei also $q_c = C_1C_0$ ist und die geometrische Bedeutung von q_a und q_b entsprechend leicht gefunden werden kann, so folgt aus 2)

$$3) \qquad q_a + q_b + q_c = 2r - \varrho \quad .$$

Nun ist aber nach 24) in § 11 Nr. 4

$$q_c = r - r\cos\gamma$$

und ebenso

$$q_a = r - r\cos\alpha \, , \quad q_b = r - r\cos\beta \quad ,$$

so daß man aus 3) erhält:

$$r\cos\alpha + r\cos\beta + r\cos\gamma = r + \varrho$$

oder

$$4) \qquad \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + \frac{\varrho}{r}$$

und nach Formel 6) in § 11 Nr. 2

$$5) \qquad \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma \quad .$$

Nach Formel 17) in § 11 Nr. 3 ist

$$\varrho_c = \varrho\cot\tfrac{1}{2}\alpha\cot\tfrac{1}{2}\beta \quad ,$$

und entsprechend

$$\varrho_a = \varrho\cot\tfrac{1}{2}\beta\cot\tfrac{1}{2}\gamma \, , \qquad \varrho_b = \varrho\cot\tfrac{1}{2}\alpha\cot\tfrac{1}{2}\gamma \quad .$$

Die Addition dieser drei Gleichungen ergibt

$$\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c = \varrho(\cot\tfrac{1}{2}\alpha\cot\tfrac{1}{2}\beta + \cot\tfrac{1}{2}\alpha\cot\tfrac{1}{2}\gamma + \cot\tfrac{1}{2}\beta\cot\tfrac{1}{2}\gamma)$$

und daraus folgt nach 2)

$$6) \qquad \cot\tfrac{1}{2}\alpha\cot\tfrac{1}{2}\beta + \cot\tfrac{1}{2}\alpha\cot\tfrac{1}{2}\gamma + \cot\tfrac{1}{2}\beta\cot\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{4r + \varrho}{\varrho} \quad .$$

Die Dreiecke O_aAO_b und O_aBO_b sind bei A und B rechtwinklig und da C_2 der Mittelpunkt ihrer gemeinsamen Hypotenuse O_aO_b ist, so erhält man:

$$C_2O_a = C_2O_b = C_2A = C_2B = 2r\cos\tfrac{1}{2}\gamma \quad .$$

Zieht man durch C_2 die Parallele zu AB, die $O_aO'_a$ in L schneidet, so ist $\angle O_aC_2L = \angle C_2C_1C = \angle C_2AC = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ und $O_aL = \frac{1}{2}(\varrho_a - \varrho_b)$; folglich hat man aus dem rechtwinkligen Dreieck O_aC_2L:

$$7) \qquad \tfrac{1}{2}(\varrho_a - \varrho_b) = C_2O_a \sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = 2r \sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\cos\tfrac{1}{2}\gamma$$

und da $C_2L = C_0O'_a = \frac{1}{2}(a + b)$ ist:

$$8) \qquad \tfrac{1}{2}(\varrho_a - \varrho_b) = \tfrac{1}{2}(a + b)\tan\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \quad .$$

Fällt man von C_2 die Senkrechte C_2G auf AC, so ist $AG = \frac{1}{2}(a + b) = C_2L$ und $\angle C_2AG = \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \angle O_aC_2L$, folglich ist $\triangle C_2AG \cong \triangle O_aC_2L$, also $C_2G = O_aL = \frac{1}{2}(\varrho_a - \varrho_b)$. In dem rechtwinkligen Dreieck C_2CG ist aber $CG = \frac{1}{2}(a - b)$ und $\angle CC_2G = \angle AC_2C_1 = \frac{1}{2}\gamma$; so daß sich ergibt:

$$9) \qquad \tfrac{1}{2}(\varrho_a - \varrho_b) = \tfrac{1}{2}(a - b)\cot\tfrac{1}{2}\gamma \quad .$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck $O_aAO'_a$ hat man noch

$$AO'_a = s = AO_a \cdot \cos\tfrac{1}{2}\alpha$$

und aus dem rechtwinkligen Dreieck AO_aO_b, in dem $\angle AO_aO_b = \frac{1}{2}\beta$ ist, findet man

$$AO_a = O_aO_b \cdot \cos\tfrac{1}{2}\beta = 4r\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma \quad ,$$

mithin

$$s = 4r\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma$$

in Übereinstimmung mit Formel 9) in § 11 Nr. 2.

Da

$$r\cos\alpha = r - q_a, \qquad r\cos\beta = r - q_b$$

ist, erhält man durch Addition und Subtraktion

$$r\cos\beta + r\cos\alpha = 2r - (q_a + q_b) = q_c + \varrho = \tfrac{1}{2}(\varrho_c + \varrho)$$

$$r\cos\beta - r\cos\alpha = q_a - q_b = \tfrac{1}{2}(\varrho_a - \varrho) - \tfrac{1}{2}(\varrho_b - \varrho) = \tfrac{1}{2}(\varrho_a - \varrho_b) \quad .$$

Nun ist aber nach Formel 20) in § 11 Nr. 4

$$\tfrac{1}{2}(\varrho_c + \varrho) = 2r\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\sin\tfrac{1}{2}\gamma = 2r\cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

und nach 7)

$$\tfrac{1}{2}(\varrho_a - \varrho_b) = 2r\sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\cos\tfrac{1}{2}\gamma = 2r\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \quad ,$$

womit man die goniometrischen Beziehungen

$$\cos\beta + \cos\alpha = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \quad ,$$

$$\cos\beta - \cos\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

entsprechend den Formeln 25) in § 9 Nr. 3 erhält.

2. Durch die in Nr. 1 aufgestellten Beziehungen ist wieder die Möglichkeit gegeben, eine große Zahl von Aufgaben zu lösen. Auch hier wird es zweckmäßig sein, an der Hand von Fig. 222 (S. 469) das Dreieck zunächst durch Konstruktion herzustellen und dann aus den rechtwinkligen Dreiecken der Figur die gesuchten Stücke zu berechnen. Man sieht sofort, daß durch r und $\frac{1}{2}(\varrho_a + \varrho_b)$ die Seite c und der Winkel γ eindeutig bestimmt ist; ebenso ist durch $\frac{1}{2}(\varrho_a + \varrho_b)$ und $\frac{1}{2}(a + b)$ der Winkel $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, durch $\frac{1}{2}(\varrho_a - \varrho_b)$ und $\frac{1}{2}(a - b)$ der Winkel γ bestimmt. Das einzuschlagende Verfahren ist aus den folgenden Beispielen zu erkennen.

1. Von einem Dreieck sei gegeben: $\frac{1}{2}(a + b) = m$, $\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = d$, $\frac{1}{2}(\varrho_a + \varrho_b) = u$. Durch m und d ist das rechtwinklige Dreieck AC_2G und durch AC_2 und u das rechtwinklige Dreieck AC_2C_0 und damit der Umkreis und ABC selbst zu finden.

Die Rechnung ergibt zunächst:

$$AC_2 = \frac{m}{\cos\delta}, \qquad \cos\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{u}{AC_2} = \frac{u}{m}\cos\delta, \qquad \tfrac{1}{2}c = u\tan\tfrac{1}{2}\gamma \quad ;$$

ferner ist

$$C_2G = m\tan\delta, \qquad \tfrac{1}{2}(a-b) = C_2G\tan\tfrac{1}{2}\gamma = m\tan\tfrac{1}{2}\gamma\tan\delta \quad ;$$

endlich auch

$$2r = \frac{AC_2^2}{u} = \frac{m^2}{u\cos^2\delta} \quad .$$

Die algebraische Berechnung der Seiten ist ebenfalls aus rechtwinkligen Dreiecken zu machen. Man findet noch, da

$$C_2G = \tfrac{1}{2}(\varrho_a - \varrho_b)$$

ist:

$$\left.\begin{matrix}\varrho_a\\ \varrho_b\end{matrix}\right\} = u \pm m\tan\delta \quad .$$

Sehr ähnlich würde die Lösung sein, wenn gegeben wäre: $\frac{1}{2}(a+b) = m$, c, $\frac{1}{2}(\varrho_a - \varrho_b) = v$.

2. Ist von einem Dreieck bekannt: $\frac{1}{2}(a-b) = d$, c, $\frac{1}{2}(\varrho_a - \varrho_b) = v$, so hat man aus dem rechtwinkligen Dreieck CC_2G

$$\tan\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{d}{v} \quad ;$$

mithin kann man aus $\frac{1}{2}\gamma$ und c das rechtwinklige Dreieck AC_1C_0 und damit den Umkreis konstruieren. Da d gegeben ist, so findet man O und durch C_1O die Spitze C. Zur Rechnung hat man weiter

$$OC_1 = AC_1 = \frac{\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}\gamma}, \qquad \sin\delta = \frac{d}{AC_1} = \frac{d}{\frac{1}{2}c}\cos\tfrac{1}{2}\gamma, \qquad \tfrac{1}{2}(a+b) = v\cot\delta \quad .$$

Ferner ist

$$\frac{\frac{1}{2}(\varrho_a + \varrho_b)}{\frac{1}{2}c} = \frac{v}{d}$$

also

$$\tfrac{1}{2}(\varrho_a + \varrho_b) = \frac{\frac{1}{2}cv}{d}$$

und

$$\left.\begin{matrix}\varrho_a\\ \varrho_b\end{matrix}\right\} = \frac{\frac{1}{2}c \pm d}{d}v \quad .$$

3. Von dem Dreieck ABC ist gegeben: $\frac{1}{2}(a+b) = m$, γ, ϱ_a. Verbindet man in Fig. 222 (S. 469) O_a mit C_1, so ist in dem rechtwinkligen Dreieck O_aC_1C:

$$O_aC_1^2 = CC_1^2 + O_aC^2$$

und fällt man von O_a die Senkrechte auf BC, die die Länge ϱ_a hat und mit O_aC den Winkel γ bildet, so ist

$$O_aC = \frac{\varrho_a}{\cos\frac{1}{2}\gamma} \quad .$$

In dem rechtwinkligen Dreieck CC_1E aber ist

$$CC_1 = \frac{m}{\cos\frac{1}{2}\gamma} \quad ;$$

folglich

$$O_aC_1^2 = \frac{m^2 + \varrho_a^2}{\cos^2\frac{1}{2}\gamma} = \frac{O_aC_0^2}{\cos^2\frac{1}{2}\gamma}, \qquad O_aC_1 = \frac{O_aC_0}{\cos\frac{1}{2}\gamma} \quad .$$

Nun ist aus m und ϱ_a das rechtwinklige Dreieck $O_aC_0O_a'$ bestimmt, also auch dessen Hypotenuse O_aC_0. Trägt man an diese $\frac{1}{2}\gamma$ an und errichtet in C_0 auf O_aC_0 die Senkrechte, so erhält man O_aC_1. Mit O_aC_1 beschreibt man um O_a einen Kreisbogen, der die in C_0 zu C_0O_a' errichtete Senkrechte in C_1 schneidet. Aus $C_0C_1 = \frac{1}{2}(\varrho_c - \varrho)$ und $\frac{1}{2}\gamma$ ist nun $\frac{1}{2}c$ und der Durchmesser C_1C_2 des Umkreises bestimmt. Fällt man von C_1 die Senkrechte auf O_aC_2, so erhält man die Spitze C des Dreiecks. Zur Rechnung erhält man zunächst:

$$O_aC_1 = \frac{\sqrt{m^2 + \varrho_a^2}}{\cos\frac{1}{2}\gamma}$$

und wenn man $\frac{1}{2}(\varrho_c - \varrho) = q$, $\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \delta$ setzt:

$$q + \varrho_a = \sqrt{O_aC_1^2 - m^2} = w\,, \qquad q = w - \varrho_a \quad ;$$

ferner:

$$\tfrac{1}{2}c = q\cot\tfrac{1}{2}\gamma = (w - \varrho_a)\cot\tfrac{1}{2}\gamma \quad ,$$

$$AC_2 = \frac{\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}\gamma}\,, \qquad \cos\delta = \frac{m}{AC_2}$$

und

$$\tfrac{1}{2}(\varrho_a - \varrho_b) = m\tan\delta\,, \qquad \varrho_b = \varrho_a - 2m\tan\delta \quad ,$$

$$\tfrac{1}{2}(a - b) = m\tan\delta\tan\tfrac{1}{2}\gamma \quad .$$

Auf diese Aufgabe läßt sich die weitere zurückführen, wenn gegeben ist $\frac{1}{2}(a + b) = m$, ϱ_a, $\frac{1}{2}(\varrho_c + \varrho) = p$, denn der Winkel γ ist bestimmt durch

$$\tan\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{p}{m} \quad .$$

3. Eine Gruppe von hierher gehörigen Aufgaben, bei denen außer r und dem Radius eines Berührungskreises etwa noch der Umfang oder der Flächeninhalt u. dgl. gegeben ist, lassen sich nicht durch elementare Konstruktion lösen.

Es sei z. B. von einem Dreieck gegeben: r, ϱ und $a + b + c = 2s$, so würde man für die Berechnung der Winkel die Beziehungen (§ 11 Nr. 2; § 12 Nr. 1, 6)) benutzen können, wonach

$$\cot\tfrac{1}{2}\alpha + \cot\tfrac{1}{2}\beta + \cot\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{s}{\varrho} = \cot\tfrac{1}{2}\alpha\cot\tfrac{1}{2}\beta\cot\tfrac{1}{2}\gamma$$

und

$$\cot\tfrac{1}{2}\alpha\cot\tfrac{1}{2}\beta + \cot\tfrac{1}{2}\alpha\cot\tfrac{1}{2}\gamma + \cot\tfrac{1}{2}\beta\cot\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{4r + \varrho}{\varrho}$$

ist. Also sind $\cot\frac{1}{2}\alpha$, $\cot\frac{1}{2}\beta$, $\cot\frac{1}{2}\gamma$ die Wurzeln der kubischen Gleichung (*Arithmetik und Algebra* § 24 Nr. 4);

$$x^3 - \frac{s}{\varrho}x^2 + \frac{4r + \varrho}{\varrho}x - \frac{s}{\varrho} = 0 \quad ,$$

wodurch die Unmöglichkeit der elementaren Konstruktion der Aufgabe dargetan ist. Wollte man die Seiten berechnen, so würde man außer

$$a + b + c = 2s$$

die Formel 6) in § 8 Nr. 1 benutzen können:

$$abc = 4Fr = 4rs\varrho \quad .$$

Es ist aber weiter mit Berücksichtigung des Wertes von ϱ:

$$s\varrho^2 = (s - a)(s - b)(s - c) = s^3 - (a + b + c)s^2 + (ab + ac + bc)s - abc$$
$$= -s^3 + (ab + ac + bc)s - 4rs\varrho$$

und daher

$$ab + ac + bc = s^2 + \varrho^2 + 4r\varrho \quad .$$

Mithin sind auch a, b, c die Wurzeln einer kubischen Gleichung, nämlich:

$$x^3 - 2sx^2 + (s^2 + \varrho^2 + 4r\varrho)x - 4rs\varrho = 0 \quad .$$

Aus den Beziehungen

$$\varrho_a = \frac{F}{s-a}, \quad \varrho_b = \frac{F}{s-b}, \quad \varrho_c = \frac{F}{s-c}, \quad \varrho = \frac{F}{s}$$

erhält man

$$\varrho\,\varrho_a\varrho_b\varrho_c = F^2, \quad \varrho_a\varrho_b\varrho_c = \frac{F^2}{\varrho} = s^2\varrho$$

und

$$\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} = \frac{1}{\varrho} \quad ,$$

endlich aus beiden

$$\varrho_a\varrho_b + \varrho_a\varrho_c + \varrho_b\varrho_c = \frac{\varrho_a\varrho_b\varrho_c}{\varrho} = s^2 \quad ;$$

da auch

$$\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c = 4r + \varrho$$

ist, so sind ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c die Wurzeln der kubischen Gleichung:

$$x^3 - (4r + \varrho)x^2 + s^2x - s^2\varrho = 0 \quad .$$

Ebenso wären zu behandeln die Aufgaben, bei denen gegeben ist: r, ϱ_a oder ϱ_b oder ϱ_c, s oder F und ähnliche.

Sind ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c gegeben und setzt man

$$\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c = M, \quad \varrho_a\varrho_b + \varrho_a\varrho_c + \varrho_b\varrho_c = N, \quad \varrho_a\varrho_b\varrho_c = P \quad ,$$

so ist

$$4r + \varrho = M, \quad \varrho = \frac{P}{N}, \quad s = \sqrt{N} \quad ,$$

womit die Aufgabe auf die zurückgeführt ist, wo r, ϱ, s gegeben ist.

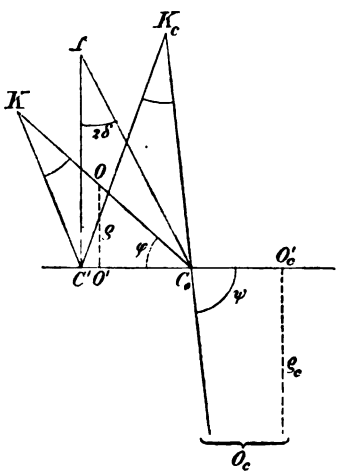


Fig. 223.

4. Verbindet man den Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ABC mit dem Mittelpunkt M des Umkreises, so ist der Halbierungspunkt F dieser Verbindungslinie der Mittelpunkt des FEUERBACHschen Kreises (vgl. *Planimetrie* § 44 Nr. 3). Der FEUERBACHsche Kreis geht durch C_0, C' und den Halbierungspunkt $\mathfrak{E}$ des obern Höhenabschnitts HC und es ist in dem rechtwinkligen Dreieck $\mathfrak{E}C'C_0$ (Fig. 223) die Hypotenuse $\mathfrak{E}C_0 = r$ der Durchmesser des FEUERBACHschen Kreises und

$$\angle\, C_0\mathfrak{E}C' = \alpha - \beta = 2\delta \quad :$$

also

$$C'C_0 = r\sin 2\delta, \quad \mathfrak{E}C' = r\cos 2\delta \quad .$$

Ist nun O der Mittelpunkt des Inkreises, O_c der des Ankreises der Seite c und sind O' und O_c' die Berührungspunkte dieser Kreise auf der Seite c, so daß also $OO' = \varrho$, $O_cO_c' = \varrho_c$ und $O'C_0 = C_0O_c' = \frac{1}{2}(a - b) = d$ ist und wird noch $\frac{1}{2}(\varrho_c - \varrho) = q$ gesetzt, so ist (*Planimetrie* § 45 Nr. 3)

$$C'O' = \frac{\varrho}{q}d, \quad C'O_c' = \frac{\varrho_c}{q}d \quad ,$$

mithin

$$C'C_0 = \frac{\varrho}{q} d + d = \frac{\varrho_c}{q} d - d \quad .$$

Ferner ist auch

$$HC = 2\,MC_0 = 2\,(r - q) \quad ,$$

also

$$\mathfrak{C}C' = h - \tfrac{1}{2} HC = h - (r - q)$$

und da

$$h = 2r - q - \frac{d^2}{q}$$

ist, so folgt

$$\mathfrak{C}C' = r - \frac{d^2}{q} \quad .$$

Verbindet man nun C_0 mit O, so wird C_0O den FEUERBACHschen Kreis nochmals in K schneiden und zieht man KC', so ist $\angle\, C_0KC' = \angle\, C_0\mathfrak{C}C' = 2\,\delta$. Setzt man noch $\angle\, OC_0O' = \varphi$, so ist in dem Dreieck KC_0C' nach dem Sehnensatze

$$KC_0 = r \sin(2\,\delta + \varphi)$$

und

$$\begin{aligned} OK = KC_0 - OC_0 &= r \sin(2\,\delta + \varphi) - OC_0 \\ &= r \sin 2\,\delta \cdot \cos\varphi + r \cos 2\,\delta \cdot \sin\varphi - OC_0 \quad . \end{aligned}$$

Nach dem vorigen hat man aber

$$r \sin 2\,\delta = C'C_0 = \frac{\varrho}{q} d + d\,, \quad \cos\varphi = \frac{d}{OC_0}\,, \quad OC_0^2 = d^2 + \varrho^2 \quad ,$$

$$r \cos 2\,\delta = \mathfrak{C}C' = r - \frac{d^2}{q}\,, \quad \sin\varphi = \frac{\varrho}{OC_0} \quad ,$$

folglich

$$\begin{aligned} OK &= \left(\frac{\varrho}{q} d + d\right) \frac{d}{OC_0} + \left(r - \frac{d^2}{q}\right) \frac{\varrho}{OC_0} - OC_0 \\ &= \frac{d^2 + r\varrho - OC_0^2}{OC_0} = \frac{\varrho\,(r - \varrho)}{OC_0} \end{aligned}$$

also

$$OC_0 \cdot OK = \varrho\,(r - \varrho) \quad .$$

$OC_0 \cdot OK$ ist aber der absolute Wert der Potenz von O in Bezug auf den FEUERBACHschen Kreis. Schreibt man

$$OC_0 \cdot OK = (\tfrac{1}{2} r)^2 - (\tfrac{1}{2} r - \varrho)^2 \quad ,$$

so ist bewiesen, daß der FEUERBACHsche Kreis von dem Inkreis von innen berührt wird.

Verbindet man ebenso C_0 mit O_c, so wird O_cC_0 den FEUERBACHschen Kreis nochmals in K_c schneiden und es ist wieder $\angle\, C_0K_cC' = \angle\, C_0\mathfrak{C}C' = 2\,\delta$. Setzt man $\angle\, O_cC_0O_c' = \psi$, so ist

$$K_cC_0 = r \sin(2\,\delta + \psi)$$

und

$$\begin{aligned} O_cK_c = K_cC_0 + O_cC_0 &= r \sin(2\,\delta + \psi) + O_cC_0 \\ &= r \sin 2\,\delta \cdot \cos\psi + r \cos 2\,\delta \cdot \sin\psi + O_cC_0 \quad . \end{aligned}$$

Hier hat man zu setzen:

$$r\sin 2\delta = C'C_0 = \frac{\varrho_c}{q} - d\,, \quad \cos\psi = \frac{d}{O_cC_0}\,, \quad O_cC_0^2 = d^2 + \varrho_c^2\,,$$

$$r\cos 2\delta = \mathfrak{C}C' = r - \frac{d^2}{q}\,, \quad \sin\psi = \frac{\varrho_c}{O_cC_0}\,,$$

so daß man erhält

$$O_cK_c = \left(\frac{\varrho_c}{q}d - d\right)\frac{d}{O_cC_0} + \left(r - \frac{d^2}{q}\right)\frac{\varrho_c}{O_cC_0} + O_cC_0$$

$$= \frac{r\varrho_c - d^2 + O_cC_0^2}{O_cC_0} = \frac{\varrho(r+\varrho_c)}{O_cC_0}\,,$$

also

$$O_cC_0 \cdot O_cK_c = \varrho_c(r+\varrho_c)\,.$$

$O_cC_0 \cdot O_cK_c$ ist aber die Potenz von O_c in Bezug auf den FEUERBACHschen Kreis, der man die Form geben kann

$$O_cC_0 \cdot O_cK_c = (\tfrac{1}{2}r + \varrho_c)^2 - (\tfrac{1}{2}r)^2\,,$$

wodurch bewiesen ist, daß die Ankreise des Dreiecks den FEUERBACHschen Kreis von außen berühren.

§ 13. Goniometrie.

1. Bei Berechnungen an dem allgemeinen Dreieck war es notwendig, den ursprünglichen Begriff der trigonometrischen Funktionen als Seitenverhältnisse eines rechtwinkligen Dreiecks, zu erweitern auf stumpfe Winkel und auf die Grenzwerte 0^0, 90^0, 180^0. Will man die Trigonometrie auf Vier- und Vielecke anwenden, so kommt man in den Fall, auch mit überstumpfen Winkeln rechnen zu müssen. In der Physik endlich wird die Drehung einer Geraden um einen festen Punkt von einer Anfangslage an, gemessen durch Winkel die Vielfache von 360^0 enthalten.

Schon bei einem Dreieck kann man auf überstumpfe Winkel kommen. Beschreibt man um ein Dreieck ABC den Umkreis und verbindet die Ecken mit dem Mittelpunkt M, so wird, wenn jeder Dreieckswinkel spitz ist, das Dreieck in die gleichschenkligen Dreiecke BMC, CMA, AMB zerlegt, deren jedes das Doppelte eines Dreieckswinkels als Winkel an der Spitze hat. Daher ist der Inhalt des ganzen Dreiecks

$$F = \tfrac{1}{2}r^2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)\,.$$

Ist aber ein Winkel des Dreiecks, z. B. γ, stumpf, so fällt das gleichschenklige Dreieck AMB außerhalb ABC und es ist

$$\triangle ABC = \triangle BMC + \triangle CMA - \triangle AMB\,.$$

Der Winkel an der Spitze des Dreiecks AMB ist jedoch, da 2γ überstumpf ist, $360^0 - 2\gamma$; es ist also für diesen Fall

$$F = \tfrac{1}{2}r^2[\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin(360^0 - 2\gamma)]\,.$$

Um nun diese Formel für F mit der vorigen in Übereinstimmung zu bringen oder die erste allgemein gültig zu machen, muß man festsetzen, daß

$$\sin(360^0 - 2\gamma) = -\sin 2\gamma$$

sein oder daß für den Sinus des überstumpfen Winkels 2γ der negative Sinus

seiner Ergänzung zu 360^0 gesetzt werden soll. Nach der Formel 4) in § 8 Nr. 1 ist aber auch

$$F = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

für jedes Dreieck: durch Vergleichung erhält man daher die für die drei Winkel irgend eines Dreiecks gültige Formel:

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \quad .$$

Auch bei der Berechnung des Inhalts von Kreissegmenten ist eine Ausdehnung der Winkel über 180^0 hinaus erforderlich. Durch eine Sehne eines Kreises vom Radius r werden zwei Segmente gebildet; das eine gehört zu einem hohlen Winkel α, das andre zu dem überstumpfen Winkel $360^0 - \alpha$. Das erste Segment hat den Inhalt

$$S_1 = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha^0}{360^0} - \tfrac{1}{2} r^2 \sin\alpha \quad :$$

soll der Inhalt des zweiten nach derselben Formel berechnet werden können, so müßte

$$S_2 = \pi r^2 \cdot \frac{360^0 - \alpha^0}{360^0} - \tfrac{1}{2} r^2 \sin(360^0 - \alpha)$$

sein. Damit aber wirklich

$$S_1 + S_2 = \pi r^2$$

ist, müßte wieder

$$\sin(360^0 - \alpha) = -\sin\alpha$$

gesetzt werden.

Um solchen Festsetzungen für jeden einzelnen Fall, die notwendig werden, um die unerläßliche Forderung der Allgemeingültigkeit mathematischer Sätze zu erfüllen, auch den Schein der Willkür zu nehmen, ist es zweckmäßig, eine Definition der trigonometrischen Funktionen zu suchen, die für alle Winkel ohne Ausnahme so gilt, daß sie die ursprüngliche für spitze Winkel als besondern Fall in sich enthält.

2. Zieht man von einem festen Punkt O der unbegrenzten Geraden OX die Strecke $OP = r$ (Fig. 224), so ist die Lage des Punktes P durch die absolute Länge r und den Winkel $XOP = \alpha$ bestimmt. Dieser Winkel gibt die Größe der Drehung an, die nötig ist, um OX in die Lage OP überzuführen. Für diese Drehung muß ein gewisser Sinn vorgeschrieben sein, z. B. der der Drehung im Sinne der Uhrzeiger entgegengesetzte. Es läßt sich aber OX in die Lage OP auch durch eine in entgegengesetztem Sinne vollzogene Drehung bringen. Man kann festsetzen, daß man die Drehung im ersten Sinne als positiv, die im zweiten als negativ auffassen will. Demgemäß hat man positive und negative Winkel zu unterscheiden. Die Größe der Drehung kann sich in beiden Richtungen von 0 bis 360^0 und beliebig darüber hinaus erstrecken. An der Endlage OP sieht man die Vielfachen von 360^0, die in der Größe der Drehung enthalten sind, nicht mehr, so daß die Lage OP auch erreicht sein würde, wenn man die Drehung $n \cdot 360^0 + \alpha$, wobei n irgend eine natürliche Zahl ist, gemacht hätte.

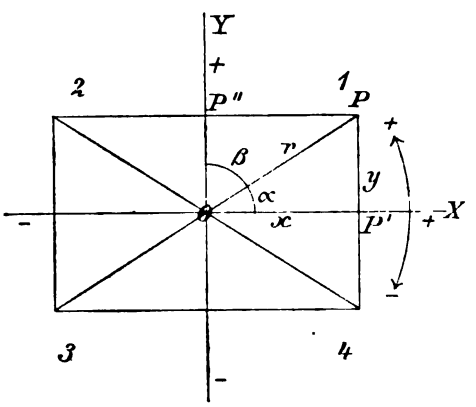


Fig. 224.

Projiziert man nun OP auf OX, indem man von P die Senkrechte $PP' = y$ auf OX fällt, so ist der Abschnitt $OP' = x$ die Projektion von r. Legt man durch O die Senkrechte OY zu OX und projiziert OP auf OY, indem man PP'' senkrecht zu OY zieht, so ist $PP' = y = OP''$. Die Abscisse x des Punktes P ist also die Projektion von r auf OX, die Ordinate y dieses Punktes kann aufgefaßt werden als Projektion von r auf OY. Die Abscisse kann sowohl rechts als links von O, die Ordinate sowohl über als unter OX liegen. Es muß daher auch mit den Längen von x und y ein gewisser Sinn verbunden gedacht werden: z. B. kann x rechts liegend als positiv, links als negativ, ebenso y oben liegend als positiv, unten als negativ aufgefaßt werden. Nun sind offenbar x und y, wenn r als absolute Länge betrachtet wird, nur von dem Winkel α abhängig und umgekehrt ist die Lage von OP, also der Winkel α durch x und y eindeutig bestimmt. Es sind also x und y für dasselbe r als Funktionen des Winkels α zu bezeichnen. Setzt man nun

$$1) \qquad x = r\cos\alpha\,, \quad y = r\sin\alpha\,,$$

so erhält man als Definition der trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus für jeden beliebigen, positiven oder negativen Winkel, der ein beliebiges Vielfaches von 360^0 enthalten hann:

Der Cosinus des Winkels, den OP mit der festen Geraden OX bildet, ist die Zahl, mit der die absolut zu nehmende Strecke OP multipliziert werden muß, um die Projektion von OP auf OX zu erhalten (Projektionsfaktor) und der Sinus dieses Winkels ist die Zahl, mit der man OP multiplizieren muß, um die Projektion von OP auf die zu OX senkrechte Gerade OY zu erhalten.

Ist der Winkel α spitz, so enthält der allgemeine Begriff von Sinus und Cosinus den ursprünglichen engsten als besondern Fall. Es ist dann in dem rechtwinkligen Dreieck OPP' die Hypotenuse $OP = r$, $OP' = x$ die α anliegende und $PP' = y$ die ihm gegenüberliegende Kathete und somit

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}\,, \quad \sin\alpha = \frac{y}{r}\,.$$

Nach der allgemeinen Definition können x und y positiv oder negativ sein, und da r als absolute Länge aufgefaßt wird, hat der Cosinus immer das Vorzeichen von x, der Sinus das von y. Denkt man sich die Drehung zunächst in positiven Sinne ausgeführt, so teilen die Geraden OX und OY die Drehung bis 360^0 in die vier Abschnitte: von 0^0 bis 90^0, von 90^0 bis 180^0, von 180^0 bis 270^0, von 270^0 bis 360^0, die man in dieser Reihenfolge als 1., 2., 3., 4. Quadranten bezeichnet. Erstreckt sich die positive Drehung bis in einen dieser Quadranten, so sagt man kurz, der Winkel liegt in dem betreffenden Quadranten. Dann ist, wie man unmittelbar aus der Figur ablesen kann,

		im 1.	2.	3.	4. Quadranten
das Vorzeichen von	x also des Cosinus	+	−	−	+
	y also des Sinus	+	+	−	−

Nimmt man P als die eine Ecke eines Rechtecks (Fig. 224), dessen Seiten von OX und OY halbiert werden und von dem O der Schnittpunkt der Diagonalen ist, so liegen, wenn P im 1. Quadranten angenommen wird, die übrigen drei Ecken im 2., 3. und 4. Quadranten und sind ihrer Lage nach eindeutig bestimmt durch r und die Winkel $180^0 - \alpha$, $180^0 + \alpha$, $360^0 - \alpha$, wenn α spitz ist. Folglich hat man:

$$2) \begin{cases} \cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha\,, & \cos(180^0 + \alpha) = -\cos\alpha\,, & \cos(360^0 - \alpha) = +\cos\alpha\,, \\ \sin(180^0 - \alpha) = +\sin\alpha\,, & \sin(180^0 + \alpha) = -\sin\alpha\,, & \sin(360^0 - \alpha) = -\sin\alpha\,. \end{cases}$$

Ist $\angle POY = 90^0 - \alpha = \beta$, wobei auch β spitz ist, so sind die drei Punkte im 2. bis 4. Quadranten auch bestimmt durch die Winkel $90^0 + \beta$, $270^0 - \beta$, $270^0 + \beta$. Da aber nach der ursprünglichen Definition von Sinus und Cosinus spitzer Winkel $\sin\beta = \cos\alpha$, $\cos\beta = \sin\alpha$ gesetzt werden muß, so ist

$$3)\quad \begin{cases} \cos(90^0+\beta) = -\sin\beta\,, & \cos(270^0-\beta) = -\sin\beta\,, & \cos(270^0+\beta) = +\sin\beta\,, \\ \sin(90^0+\beta) = +\cos\beta\,, & \sin(270^0-\beta) = -\cos\beta\,, & \sin(270^0+\beta) = -\cos\beta\,. \end{cases}$$

Damit sind Sinus und Cosinus der Winkel von 0 bis 360^0 auf Sinus und Cosinus eines spitzen Winkels zurückgeführt mit Hinzufügung eines Vorzeichens. Für stumpfe Winkel kommt diese Zurückführung auf die Festsetzung in § 7 Nr. 1 hinaus.

Da die Werte von Sinus und Cosinus in je zwei Quadranten die gleichen sind, so ist durch Sinus und Cosinus ein Winkel zwischen 0 und 360^0 zweideutig bestimmt. Die Bestimmung wird eindeutig, wenn zu dem Werte einer Funktion das Vorzeichen der andern gegeben ist.

Für die Grenzen der Quadranten hat man folgende Grenzwerte von Cosinus und Sinus:

	0^0	90^0	180^0	270^0	360^0
cos	$+1$	0	-1	0	$+1$
sin	0	$+1$	0	-1	0 .

Die Werte von Cosinus und Sinus liegen also zwischen 1 und $+1$.

Da für jede Lage von r, wenn der Winkel von r mit OX allgemein mit φ bezeichnet wird

$$x^2 + y^2 = r^2\,, \qquad r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$$

ist, so muß für jeden Winkel φ zwischen 0 und 360^0 die Beziehung gelten:

$$4)\qquad \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1\quad,$$

woraus

$$\cos\varphi = +\sqrt{1 - \sin^2\varphi}\,, \qquad \sin\varphi = \pm\sqrt{1 - \cos^2\varphi}$$

folgt.

3. Ändert man den Sinn der Drehung, durch die ein Winkel entsteht, in den entgegengesetzten, so erhält man, wenn man in dem einen Sinne den Winkel φ hervorgebracht denkt, nunmehr den Winkel $-\varphi$. Man sieht an der Figur, daß diese Änderung auf x ohne Einfluß ist, daß dagegen y sein Vorzeichen ändert. Daher bleibt bei der Änderung der Drehrichtung in die entgegengesetzte der Cosinus unverändert, während der Sinus sein Vorzeichen ändert. Es gilt also für jeden Winkel zwischen 0 und 360^0:

$$5)\qquad \cos(-\varphi) = \cos\varphi\,, \qquad \sin(-\varphi) = -\sin\varphi\quad.$$

Damit läßt sich beweisen, daß für jeden solchen Winkel φ

$$6)\qquad \cos(90^0 - \varphi) = \sin\varphi$$

sein muß. Für einen spitzen Winkel φ ist die Beziehung aus der ursprünglichen Definition von Sinus und Cosinus ohne weiteres klar. Bezeichnet nun α einen spitzen Winkel, so ist für

$\varphi = 180^0 \mp \alpha$, $\cos(90^0 - \varphi) = \cos(\varphi - 90^0) = \cos(90^0 \mp \alpha) = \pm\sin\alpha = \sin\varphi$,

$\varphi = 360^0 - \alpha$, $\cos(90^0 - \varphi) = \cos(\varphi - 90^0) = \cos(270^0 - \alpha) = -\sin\alpha = \sin\varphi$.

Man kann daher für einen Winkel φ zwischen 0 und 360^0 die Beziehung $\sin\varphi = \cos(90^0 - \varphi)$ als Definition des Sinus gelten lassen, wenn man den Cosinus im allgemeinen Sinne definiert hat.

Läßt man einen Winkel über 360^0 hinaus wachsen, so wiederholen sich die Werte von Cosinus und Sinus in derselben Reihenfolge, jedesmal wenn man eine

volle Umdrehung beendet hat. Cosinus und Sinus eines Winkels sind daher periodische Funktionen, die sich nicht ändern, wenn man den Winkel um ein Vielfaches von 360^0 vermehrt oder vermindert.

Es ist also, wenn φ irgend einen Winkel bezeichnet,

$$\cos\varphi = \cos(\varphi \pm n \cdot 360^0), \quad \sin\varphi = \sin(\varphi \pm n \cdot 360^0) \quad ,$$

wenn für n eine beliebige natürliche Zahl gesetzt wird.

Alle hier ermittelten Eigenschaften von Cosinus und Sinus der Winkel zwischen 0 und 360^0 und ihre gegenseitigen Beziehungen 2) bis 6), gelten daher ganz allgemein für jeden beliebigen, positiven oder negativen Winkel unter oder über 360^0.

Insbesondere sind noch folgende Beziehungen zu merken:

Winkel, deren Summe oder Differenz 180^0 beträgt, haben Cosinus von gleichem absoluten Wert aber entgegengesetzten Vorzeichen;

Winkel, deren Summe 360^0 ist, haben gleiche Cosinus;

Winkel, deren Summe 180^0 beträgt, haben gleiche Sinus;

Winkel, deren Differenz 180^0 ist, haben Sinus von gleichem absoluten Wert aber entgegengesetzten Vorzeichen;

Winkel, deren Summe 360^0 ist, haben Sinus von gleichem absoluten Wert aber entgegengesetzten Vorzeichen.

4. Die Funktionen Tangente und Cotangente eines beliebigen Winkels können nun definiert werden durch die Beziehungen

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}, \quad \cot\varphi = \frac{1}{\tan\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \quad .$$

Hiernach erhält man die Vorzeichen

	im 1.	2.	3.	4. Quadranten
für Tangente und Cotangente	+	—	+	— .

Wenn α und β spitze Winkel sind, so hat man entsprechend 2) und 3):

$$\tan(180^0 - \alpha) = -\tan\alpha, \quad \tan(180^0 + \alpha) = +\tan\alpha, \quad \tan(360^0 - \alpha) = -\tan\alpha \quad ,$$

$$\cot(180^0 - \alpha) = -\cot\alpha, \quad \cot(180^0 + \alpha) = +\cot\alpha, \quad \cot(360^0 - \alpha) = -\cot\alpha \quad :$$

$$\tan(90^0 + \beta) = -\cot\beta, \quad \tan(270^0 - \beta) = +\cot\beta, \quad \tan(270^0 + \beta) = -\cot\beta \quad .$$

$$\cot(90^0 + \beta) = -\tan\beta, \quad \cot(270^0 - \beta) = +\tan\beta, \quad \cot(270^0 + \beta) = -\tan\beta \quad ,$$

wodurch Tangente und Cotangente eines Winkels zwischen 0 und 360^0 auf Tangente und Cotangente eines spitzen Winkels, unter Hinzufügung eines Vorzeichens, zurückgeführt werden können.

Für die Grenzen der Quadranten hat man die Grenzwerte:

	0^0	90^0	180^0	270^0	360^0
tan	0	∞	0	∞	0
cot	∞	0	∞	0	∞ .

Ferner gilt für einen negativen Winkel:

$$\tan(-\varphi) = -\tan\varphi, \quad \cot(-\varphi) = -\cot\varphi$$

und weiter für jeden Winkel φ zwischen 0 und 360^0:

$$\tan(90^0 - \varphi) = \cot\varphi, \quad \cot(90^0 - \varphi) = \tan\varphi \quad .$$

Endlich sind auch Tangente und Cotangente periodische Funktionen. Ihre Werte wiederholen sich aber bereits jedesmal, wenn eine Drehung um 180^0 vollendet ist, so daß

$$\tan\varphi = \tan(\varphi \pm n \cdot 180^0), \quad \cot\varphi = \cot(\varphi \pm n \cdot 180^0)$$

gesetzt werden kann, wenn für n eine natürliche Zahl genommen wird. Alle Beziehungen von Tangente und Cotangente gelten daher aus gleichem Grunde wie bei Sinus und Cosinus für jeden beliebigen Winkel. Insbesondere gilt noch:

Winkel, deren Summe 180^0 ist, haben Tangenten und Cotangenten von gleichem absoluten Wert, aber entgegengesetzten Vorzeichen;

Winkel, deren Differenz 180^0 ist, haben gleiche Tangenten und Cotangenten.

Die entsprechende Betrachtung der Sekante und Cosekante eines beliebigen Winkels könnte auf Grund der allgemeinen Definition

$$\sec\varphi = \frac{1}{\cos\varphi}, \quad \csc\varphi = \frac{1}{\sin\varphi}$$

durchgeführt werden.

5. Bewegt man sich von einem beliebigen Punkt M einer Geraden nach dem beliebigen Punkt N derselben Geraden, so legt man die Strecke MN zurück. Dabei soll die Reihenfolge der Buchstaben M und N die Richtung ausdrücken, in der man sich von M nach N bewegt. Dann ist NM der Weg von dem Ausgangspunkt N zum Endpunkt M. Macht man die beiden Bewegungen nacheinander, so kommt man auf den ursprünglichen Ausgangspunkt M zurück; es ist also der im ganzen zurückgelegte Weg

$$MN + NM = 0 \quad ,$$

woraus folgt, daß man

$$NM = -MN$$

zu setzen: d. h. die Strecke NM in dem der Strecke MN entgegengesetzten Sinne zu nehmen hat, wenn man eine von beiden mit einem willkürlich gewählten Richtungsvorzeichen versieht.

Bewegt man sich auf der Geraden von M nach N und von da nach einem dritten Punkt P, so sind beide Bewegungen zu ersetzen durch die Bewegung von M nach P, oder es ist

$$MN + NP = MP \quad :$$

da aber $MP = -PM$ gesetzt werden kann, so gilt für drei beliebig liegende Punkte M, N, P einer Geraden die Beziehung:

$$MN + NP + PM = 0 \quad ,$$

wenn man jede Strecke mit dem ihr nach dem Sinne der Bewegung zukommenden Vorzeichen versieht.

Man sieht sofort ein, daß sich diese Beziehung auf beliebig viele Punkte einer Geraden ausdehnen lassen muß.

Sind in einer Ebene zwei beliebige Gerade m und n gegeben, deren positive Richtungen willkürlich festgesetzt sind, so hat man, um die Gerade m in die Lage von n so zu bringen, daß ihre positiven Richtungen aufeinander fallen, eine Drehung von m um den Schnittpunkt beider Geraden in einem willkürlich festzusetzenden Sinne nötig. Diese Drehung, die durch mn bezeichnet werden möge, kann durch einen zwischen 0 und 360^0 liegenden Winkel φ oder durch $\varphi \pm n \cdot 360^0$ ausgedrückt werden, wenn n eine beliebige natürliche Zahl bedeutet. Sind die Geraden parallel, so würde dieser Winkel 0 oder $\pm n \cdot 360^0$ sein. Die Drehung nm ist dann die Drehung in entgegengesetztem Sinne, durch die m wieder in seine ursprüngliche Lage zurückgebracht wird, so daß

$$mn + nm = 0$$

gesetzt werden kann. Es ist also

$$nm = -mn$$

zu nehmen, d. h. der entgegengesetzte Sinn beider Drehungen wird durch das entgegengesetzte Vorzeichen ausgedrückt.

Geht durch den gemeinsamen Punkt von m und n noch die dritte Gerade p', so müssen die aufeinander folgenden Drehungen mn und np' durch die einzige mp' ersetzt werden können; es muß also

$$mn + np' = mp'$$

oder da $mp' = -p'm$ ist,

$$mn + np' + p'm = 0$$

gesetzt werden können. Zieht man zu p' die Parallele p in gleichem Sinne, so muß wegen der gleichen Winkel, die m und n mit p und p' bilden

$$np' = np\,, \quad p'm = pm$$

sein. Daher gilt für drei beliebige Gerade m, n, p einer Ebene:

$$mn + np + pm = 0\,,$$

wenn man jede Drehung mit dem ihrem Sinne zukommenden Vorzeichen versieht.

6. Projiziert man ein Dreieck ABC auf zwei sich rechtwinklig schneidende Gerade OX und OY seiner Ebene und sind A', B', C' die Projektionen der Ecken auf OX, A'', B'', C'' auf OY, so muß, wie auch diese Projektionen liegen mögen, nach Nr. 5

$$A'B' + B'C' + C'A' = 0\,,$$
$$A''B'' + B''C'' + C''A'' = 0$$

sein, wenn man den Projektionen der Seiten das Vorzeichen beilegt, das ihnen zukommt, wenn man den Umfang des Dreiecks in derselben, willkürlich festgelegten Richtung, durchläuft. Bezeichnet man den Winkel, um den OX in einem gewissen Sinne zu drehen ist, um ihn in die Lage von AB zu bringen, mit $x\,AB$, so erhält man $A'B'$, indem man AB mit dem Cosinus dieses Winkels, $A''B''$, indem man AB mit dem Sinus dieses Winkels multipliziert. Wendet man für die andern Drehungen, die in demselben Sinne zu nehmen sind, die entsprechenden Bezeichnungen an, so gelten die allgemeinen Beziehungen:

$$AB \cdot \cos x\,AB + BC \cdot \cos x\,BC + CA \cdot \cos x\,CA = 0\,,$$
$$AB \cdot \sin x\,AB + BC \cdot \sin x\,BC + CA \cdot \sin x\,CA = 0\,.$$

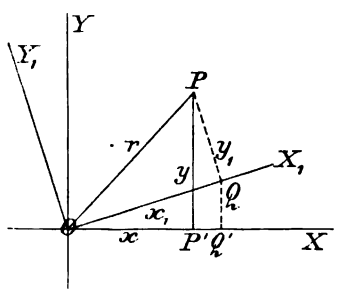


Fig. 225.

Zieht man von O die Strecke $OP = r$ in positivem Sinne (Fig. 225) und dreht OX und OY um einen beliebigen Winkel in die neuen wieder aufeinander senkrechten Lagen OX_1 und OY_1, so sind die Projektionen von OP auf OX_1 und OY_1 durch $OQ = x_1$ und $PQ = y_1$ dargestellt, wenn PQ senkrecht zu OX_1 gezogen wird. Die Projektionen von OP auf die ursprünglichen Lagen OX und OY sind $OP' = x$, $PP' = y$. Projiziert man nun das rechtwinklige Dreieck OPQ auf OX und OY, so ist nach dem eben aufgestellten Satze mit leicht ersichtlicher Bezeichnung:

$$OQ \cdot \cos x\,x_1 + QP \cdot \cos x\,y_1 + PO \cdot \cos x\,r = 0\,,$$
$$OQ \cdot \sin x\,x_1 + QP \cdot \sin x\,y_1 + PO \cdot \sin x\,r = 0\,.$$

Nun ist $OQ = x_1 = r\cos x\,r$, $QP = y_1 = r\sin x_1\,r$, $PO = -OP = -r$ zu setzen; damit heißen die beiden Gleichungen, wenn man sie durch r kürzt:

$$\cos x\,x_1 \cdot \cos x_1\,r + \cos x\,y_1 \cdot \sin x_1\,r - \cos x\,r = 0\,,$$
$$\sin x\,x_1 \cdot \sin x_1\,r + \sin x\,y_1 \cdot \sin x_1\,r - \sin x\,r = 0\,.$$

Setzt man nun $xx_1 = \alpha$, $x_1 r = \beta$, wobei α und β beliebige positive oder negative Winkel, kleiner oder größer als 360^0 sein können, so ist immer:

$$xr = xx_1 + x_1 r = \alpha + \beta\,, \quad xy_1 = xx_1 + x_1 y_1 = \alpha + 90^0$$

und da für jeden Winkel α

$$\cos(\alpha + 90^0) = -\sin\alpha\,, \quad \sin(\alpha + 90^0) = \cos\alpha$$

ist, so erhalten die beiden Gleichungen die Gestalt:

$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta - \cos(\alpha + \beta) = 0\,,$$

$$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta - \sin(\alpha + \beta) = 0\,.$$

Daraus folgen für die beliebigen Winkel α und β die Summenformeln:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,.$$

Vertauscht man β mit $-\beta$, so erhält man mit Rücksicht darauf, daß allgemein $\cos(-\beta) = \cos\beta$, $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ ist

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\,,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\,.$$

Diese Formeln bilden die Grundlage der Goniometrie. Alle aus ihnen durch Rechnung abgeleiteten goniometrischen Formeln gelten allgemein für alle Winkel. Damit ist die Allgemeingültigkeit der in § 9 für einen beschränkten Geltungsbereich, nämlich für Winkel, die in einem Dreieck vorkommen können, erhaltenen Formeln bewiesen.

7. Zu den in § 9 abgeleiteten goniometrischen Formeln mögen noch die folgenden, gelegentlich gebrauchten, angeführt werden.

Man erhält

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha$$
$$= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\,,$$

und auf dieselbe Weise

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,.$$

Die umgekehrte Aufgabe, $\sin\alpha$ aus $\sin 3\alpha$ oder $\cos\alpha$ aus $\cos 3\alpha$ zu bestimmen, führt auf eine kubische Gleichung.

Weiter findet man

$$\sin 4\alpha = \sin(2 \cdot 2\alpha) = 4\sin\alpha\cos\alpha - 8\sin^3\alpha\cos\alpha\,,$$

$$\cos 4\alpha = \cos(2 \cdot 2\alpha) = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1\,.$$

Für irgend zwei Winkel α und β hat man, wenn $i = \sqrt{-1}$ ist:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$
$$= \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)\,;$$

durch Wiederholung also

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)(\cos\gamma + i\sin\gamma) = \cos(\alpha + \beta + \gamma) + i\sin(\alpha + \beta + \gamma)\,.$$

Fährt man weiter so fort, so läßt sich der Satz auf beliebige viele Winkel α, β, γ, ... ausdehnen. Setzt man diese Winkel einander gleich und ist ihre Anzahl n, so ergibt sich

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha\,,$$

der Lehrsatz des Moivre (*Arithmetik und Algebra* § 26 Nr. 2) für den Fall, daß n eine natürliche Zahl ist. Entwickelt man die Potenz links nach dem binomischen Satze und vergleicht links und rechts die reellen und imaginären Zahlen, so erhält

man allgemein den Satz für Cosinus und Sinus des Vielfachen eines Winkels:

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha - \dots,$$

$$\sin n\alpha = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha - \dots$$

Durch wiederholte Anwendung der Summenformel erhält man:

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Vertauscht man γ mit $-\gamma$, so findet man aus der letzten Formel:

$$\cos(\alpha+\beta-\gamma) = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

und entsprechend $\cos(\alpha-\beta+\gamma)$, $\cos(-\alpha+\beta+\gamma)$. Die Addition aller vier Formeln ergibt

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) + \cos(\alpha+\beta-\gamma) + \cos(\alpha-\beta+\gamma) + \cos(-\alpha+\beta+\gamma) = 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Ebenso entsteht aus:

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

zunächst

$$\sin(\alpha+\beta-\gamma) = \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

und weiter:

$$-\sin(\alpha+\beta+\gamma) + \sin(\alpha+\beta-\gamma) + \sin(\alpha-\beta+\gamma) + \sin(-\alpha+\beta+\gamma) = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Dividiert man $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ durch $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$, so ergibt sich die Formel:

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha},$$

woraus folgt

$$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}.$$

Aus der Identität

$$(\cot\beta-\cot\gamma)+(\cot\gamma-\cot\alpha)+(\cot\alpha-\cot\beta)=0$$

erhält man durch Umformung

$$\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}+\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\gamma\sin\alpha}+\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}=0$$

oder

$$\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)+\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)=0.$$

Entsprechend findet man

$$\cos\alpha\sin(\beta-\gamma)+\cos\beta\sin(\gamma-\alpha)+\cos\gamma\sin(\alpha-\beta)=0.$$

8. Aus Nr. 3 und 4 folgt, daß die Aufgabe, zu dem Werte einer trigonometrischen Funktion den zugehörigen Winkel zu bestimmen, im allgemeinen unendlich vieldeutig ist. Dies ist zu berücksichtigen bei der Auflösung goniometrischer Gleichungen, bei der es sich zunächst darum handelt, eine Funktion eines unbekannten Winkels zu berechnen. Man hat durch Umformungen, die durch Anwendung der goniometrischen Formeln zu bewerkstelligen sind, die Gleichung auf eine der Formen

$$\sin x = a, \quad \cos x = b, \quad \tan x = c$$

zu bringen. Diese einfachsten goniometrischen Gleichungen sind lösbar, d. h. es läßt sich der zugehörige Winkel x bestimmen, wenn a, b, c reell sind und die absoluten Werte von a und b kleiner als 1 oder gleich 1 sind und haben unendlich viele Lösungen. Ist nämlich $x = \alpha$ eine Lösung der Gleichung

$$\sin x = a \quad ,$$

so ist auch $x = 180^0 - \alpha$ eine solche und außerdem $x = \alpha \pm n \cdot 360^0$, $x = 180^0 - \alpha \pm n \cdot 360^0$, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist. Hat ferner die Gleichung

$$\cos x = b$$

die Lösung $x = \beta$, so wird der Gleichung auch genügt durch $x = -\beta$ und $x = \pm\beta \pm n \cdot 360^0$. Hat endlich die Gleichung

$$\tan x = c$$

eine Lösung $x = \gamma$, so sind auch $x = \gamma + 180^0$ sowie $x = \gamma \pm n \cdot 360^0$ und $x = 180^0 + \gamma \pm n \cdot 360^0$ Lösungen.

Zu jeder der drei Gleichungen gibt es aber stets als Lösungen zwei positive Winkel x_1 und x_2 zwischen 0 und 360^0, diese Grenzwerte mit eingeschlossen, die man als Hauptwerte der Lösungen bezeichnen kann. Alle übrigen Winkel, die den Gleichungen genügen, sind in den Formen

$$x_1 \pm n \cdot 360^0, \quad x_2 \pm n \cdot 360^0$$

enthalten, wenn n eine beliebige natürliche Zahl ist.

Z. B. haben die Wurzeln der Gleichung

$$\sin x = -\tfrac{1}{2}$$

die Hauptwerte $x_1 = 210^0$, $x_2 = 330^0$; alle Wurzeln der Gleichung sind also in den Formen:

$$210^0 \pm n \cdot 360^0, \quad 330^0 \pm n \cdot 360^0$$

enthalten.

Führen geometrische Aufgaben auf goniometrische Gleichungen, so ist der Gültigkeitsbereich der Lösungen durch die Natur der Aufgaben beschränkt. In jedem solchen Falle bedarf es einer besondern Determination.

§ 14. Weitere Anwendungen der Trigonometrie.

1. Die Berechnung eines Vierecks gelingt häufig durch Zurückführung auf Dreiecke, am einfachsten durch die Diagonalen, oder durch Verlängerung der gegenüberliegenden Seiten bis zu ihrem Schnittpunkt, oder durch Parallelen zu den Seiten.

In dem Viereck $ABCD$ mögen die Winkel der Reihenfolge der Ecken nach mit α, β, γ, δ bezeichnet werden, die Seiten seien $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, die Diagonalen $AC = e$, $BD = f$. Das Viereck ist bestimmt durch fünf unabhängige Stücke.

Sind von einem Viereck die vier Seiten und ein Winkel α gegeben, so zerlegt die Diagonale BD das Viereck in zwei Dreiecke, von denen zunächst ABD bestimmt ist durch die Seiten a und d und dem eingeschlossenen Winkel α und dadurch BCD durch die drei Seiten. Ähnlich ist zu verfahren, wenn gegeben sind: zwei Seiten a, b und die anliegenden Winkel α, β, γ; oder a, b, c, β, γ oder a, b, c, α, β.

Kennt man von dem Trapez $ABCD$ (Fig. 226) die parallelen Seiten a, c und die Winkel α, β, so schneidet die Parallele $DE = BC = b$ zu BC das durch $AE = a - c$ und die Winkel bestimmte Dreieck ADE ab. Es ist dann der Flächeninhalt

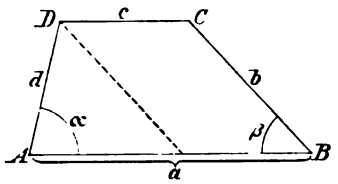


Fig. 226.

$$F = \tfrac{1}{2}(a + c)\, d \sin\alpha$$

und da

$$d = \frac{a - c}{\sin(\alpha + \beta)} \sin\beta$$

ist, so wird

$$F = \tfrac{1}{2}(a^2 - c^2) \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} .$$

Die Lösung würde man auch gefunden haben, wenn man die nichtparallelen Seiten b und d bis zu ihrem Schnittpunkt verlängert hätte. Dieses Hilfsmittel führt bei der Verallgemeinerung der Aufgabe: von einem Viereck sind zwei gegenüberliegende Seiten a, c und die Winkel gegeben, zum Ziel. Verlängert man die nicht gegebenen Seiten b und d bis zu ihrem Schnittpunkt E (Fig. 227), so sind die Dreiecke ABE und CDE bestimmt.

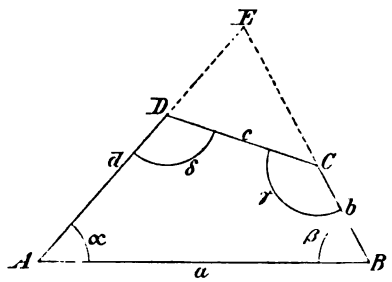


Fig. 227.

Man erhält, wenn $a > c$ vorausgesetzt wird:

$$b = BE - EC = \frac{a \sin\alpha - c \sin\delta}{\sin(\alpha + \beta)} ,$$

$$d = AE - ED = \frac{a \sin\beta - c \sin\gamma}{\sin(\alpha + \beta)}$$

und den Inhalt

$$F = \frac{a^2 \sin\alpha \sin\beta - c^2 \sin\gamma \sin\delta}{2 \sin(\alpha + \beta)} .$$

Da die Summe der Winkel eines Vierecks 360^0 beträgt, so braucht bei einem numerischen Beispiel ein Winkel nicht gegeben zu sein. In der Formel könnte man setzen:

$$\sin\delta = -\sin(\alpha + \beta + \gamma) .$$

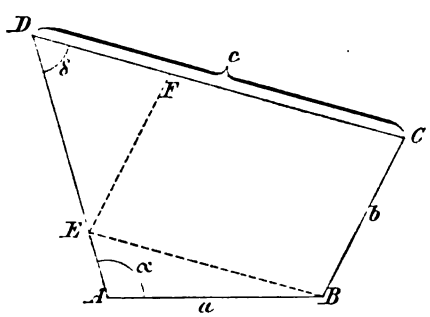


Fig. 228.

Sind von einem Viereck drei Seiten a, b, c und die an der nicht gegebenen Seite liegenden Winkel α und δ bekannt, so kann man die Parallele BE zu CD und EF zu BC (Fig. 228) ziehen. Dann ist im Dreieck ABE

$$EB = CF = \frac{a}{\sin\delta} \sin\alpha ,$$

$$AE = \frac{a}{\sin\delta} \sin(\alpha + \delta) ,$$

also

$$FD = c - CF = c - \frac{a}{\sin\delta} \sin\alpha ,$$

womit $\triangle DEF$ durch FD, $EF = b$ und den Winkel δ bestimmt ist.

2. In dem Viereck $ABCD$ werden die Diagonalen gezogen, die sich in M schneiden und die den Winkel $AMB = \varepsilon$ bilden (Fig. 229). Die Abschnitte

der Diagonalen seien $AM = m$, $MC = n$; $BM = p$, $MD = q$. Betrachtet man $BD = f$ als Grundlinie der beiden Dreiecke BDA und BDC und zieht die daraufstehenden Höhen, so ist der Inhalt des Vierecks

$$F = \tfrac{1}{2} f m \sin\varepsilon + \tfrac{1}{2} f n \sin\varepsilon$$
$$= \tfrac{1}{2}(m+n) f \sin\varepsilon = \tfrac{1}{2} e f \sin\varepsilon \quad .$$

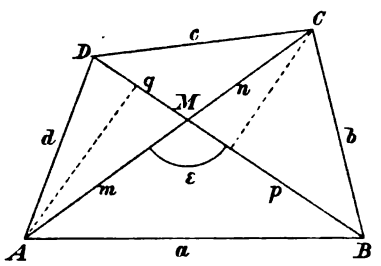


Fig. 226.

Nach dem allgemeinen pythagoreischen Lehrsatze ist:

$$a^2 = m^2 + p^2 - 2mp\cos\varepsilon \quad ,$$
$$b^2 = p^2 + n^2 + 2pn\cos\varepsilon \quad ,$$
$$c^2 = n^2 + q^2 - 2nq\cos\varepsilon \quad ,$$
$$d^2 = q^2 + m^2 + 2qm\cos\varepsilon \quad .$$

Aus diesen vier Gleichungen erhält man

$$b^2 + d^2 - a^2 - c^2 = 2(mp + pn + nq + qm)\cos\varepsilon = 2(m+n)(p+q)\cos\varepsilon$$
$$= 2ef\cos\varepsilon \quad ;$$

mithin

$$F = \tfrac{1}{4}(b^2 + d^2 - a^2 - c^2)\tan\varepsilon \quad .$$

In dem besondern Falle $\varepsilon = 90^0$, also $\cos\varepsilon = 0$ wird

$$b^2 + d^2 = a^2 + c^2$$

und da $\tan\varepsilon = \infty$, so nimmt der Wert von F die unbestimmte Form $0 \cdot \infty$ an. In der Tat ist der Inhalt des Vierecks durch die vier Seiten nicht bestimmt.

Von einem Viereck seien die vier Seiten und die Summe zweier gegenüberliegender Winkel $\alpha + \gamma = \sigma$ gegeben. Drückt man das Quadrat der Diagonale $BD = f$ durch den allgemeinen pythagoreischen Lehrsatz doppelt aus, so erhält man die Gleichung

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma \quad ,$$

wofür man nach § 10 Nr. 4 schreiben kann:

$$(a+d)^2 - 4ad\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha = (b-c)^2 + 4bc\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma \quad ,$$

oder

$$(a-d)^2 + 4ad\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha = (b+c)^2 - 4bc\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma \quad .$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgen die andern:

$$(a+d)^2 - (b-c)^2 = (a+d+b-c)(a+d-b+c)$$
$$= 4ad\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha + 4bc\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma \quad ,$$
$$(b+c)^2 - (a-d)^2 = (b+c+a-d)(b+c-a+d)$$
$$= 4ad\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha + 4bc\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma \quad .$$

Benutzt man die Abkürzung $a + b + c + d = 2s$, so kann man diese Gleichungen etwas einfacher schreiben:

$$(s-b)(s-c) = ad\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha + bc\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma \quad ,$$
$$(s-a)(s-d) = ad\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha + bc\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma \quad .$$

Durch Multiplikation kommt man zu

$$(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$
$$= \tfrac{1}{4}a^2d^2\sin^2\alpha + abcd(\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma + \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma) + \tfrac{1}{4}b^2c^2\sin^2\gamma \quad .$$

Nun ist

$$\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma + \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma = (\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\gamma - \sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\gamma)^2$$
$$+ 2\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\gamma\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \cos^2\tfrac{1}{2}\sigma + \tfrac{1}{2}\sin\alpha\sin\gamma \quad ,$$

mithin nimmt die vorige Gleichung die Form an:

$$(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$
$$= \tfrac{1}{4}a^2d^2\sin^2\alpha + \tfrac{1}{2}abcd\sin\alpha\sin\gamma + \tfrac{1}{4}b^2c^2\sin^2\gamma + abcd\cos^2\tfrac{1}{2}\sigma \quad .$$

Der Inhalt des Vierecks ist

$$F = \tfrac{1}{2}ad\sin\alpha + \tfrac{1}{2}bc\sin\gamma \quad ,$$

folglich

$$F^2 = \tfrac{1}{4}a^2d^2\sin^2\alpha + \tfrac{1}{2}abcd\sin\alpha\sin\gamma + \tfrac{1}{4}b^2c^2\sin^2\gamma \quad ,$$

also ergibt sich:

$$F^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\tfrac{1}{2}\sigma \quad .$$

Für das Sehnenviereck ist $\sigma = 180^0$, also $\cos\frac{1}{2}\sigma = 0$; damit erhält man für den Inhalt die Formel in § 10 Nr. 6. Man sieht noch an der allgemeinen Formel, daß von allen Vierecken mit denselben vier Seiten das Sehnenviereck den größten Inhalt hat.

3. Die Berechnung eines Vielecks mit mehr als vier Ecken kann in einfachen Fällen ebenfalls durch Zurückführung auf Dreiecke erledigt werden. Aber auch wenn dies nicht möglich ist, ist die Lösung der allgemeinen Aufgabe, ein n-Eck aus $2n-3$ unabhängigen Stücken zu berechnen, immer möglich. Das Vieleck sei $A_1A_2A_3\ldots A_n$, seine Winkel der Bezeichnung der Ecken entsprechend $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ und die Seiten $A_1A_2 = a_1$, $A_2A_3 = a_2, \ldots A_nA_1 = a_n$. Projiziert man das Vieleck auf eine beliebige Gerade der Ebene, so daß die Projektionen der Ecken $A_1', A_2', A_3', \ldots A_n'$ sind, so ist nach § 13 Nr. 5

$$A_1'A_2' + A_2'A_3' + \ldots + A_n'A_1' = 0 \quad ,$$

wenn man den Projektionen $A_1'A_2'$, $A_2'A_3', \ldots A_n'A_1'$ das Vorzeichen beilegt, das sie erhalten, wenn man das Vieleck von A_1 bis A_n in gleichem Sinne durchläuft. Bestimmt man die Winkel der Seiten mit der positiven Richtung der festen Geraden in dem in § 13 Nr. 5 festgesetzten allgemeinen Sinne und bezeichnet sie mit $x\,a_1, x\,a_2, \ldots x\,a_n$, so muß

$$a_1\cos x\,a_1 + a_2\cos x\,a_2 + \ldots + a_n\cos x\,a_n = 0$$

sein. Dreht man die feste Gerade um einen ihrer Punkte in positivem Sinne um 90^0, projiziert also das Vieleck auf eine zu der festen Geraden senkrechte Gerade, so muß auch

$$a_1\sin x\,a_1 + a_2\sin x\,a_2 + \ldots + a_n\sin x\,a_n = 0$$

sein. Gibt man der festen Geraden eine besondere Lage, läßt sie z. B. mit der positiven Richtung der Seite a_1 zusammenfallen, so wird

$$\cos x\,a_1 = \cos 0 = 1 \quad , \quad \sin x\,a_1 = \sin 0 = 0$$

und die allgemeinen Gleichungen nehmen die besondere Form an:

$$a_1 + a_2\cos a_1\,a_2 + a_3\cos a_1\,a_3 + \ldots + a_n\cos a_1\,a_n = 0 \quad ,$$
$$a_1\sin a_1\,a_2 + a_3\sin a_1\,a_3 + \ldots + a_n\sin a_1\,a_n = 0 \quad .$$

Die Winkel $a_1\,a_2, a_1\,a_3, \ldots a_1\,a_n$ lassen sich durch die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ des Vielecks ausdrücken, für die noch die Beziehung:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n = (n-2)\cdot 180^0$$

besteht. Also hat man, um die nicht gegebenen drei unmittelbaren Bestimmungsstücke des n-Ecks aus den $2n-3$ gegebenen zu berechnen, drei unabhängige Gleichungen. Damit ist die Möglichkeit, die Aufgabe allgemein zu lösen, dargetan.

Beispiel: Von einem Sechseck seien fünf Seiten und vier Winkel (mit Ausnahme der an der unbekannten Seite liegenden) gegeben:

$$a_1 = 125\,, \quad a_2 = 173\,, \quad a_4 = 65\,, \quad a_5 = 125\,, \quad a_6 = 57$$

$$\alpha_1 = 110^0\,36'\,35''\,, \quad \alpha_2 = 141^0\,53'\,53''\,, \quad \alpha_5 = 43^0\,13'\,47''\,, \quad \alpha_6 = 106^0\,15'\,37''\,.$$

Es sind also zu berechnen: Die Seite a_3 und die ihr anliegenden Winkel α_3 und α_4.

Hierzu hat man die drei Gleichungen:

1) $a_1 + a_2 \cos a_1 a_2 + a_3 \cos a_1 a_3 + a_4 \cos a_1 a_4 + a_5 \cos a_1 a_5 + a_6 \cos a_1 a_6 = 0\,,$

2) $a_2 \sin a_1 a_2 + a_3 \sin a_1 a_3 + a_4 \sin a_1 a_4 + a_5 \sin a_1 a_5 + a_6 \sin a_1 a_6 = 0\,,$

3) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 720^0\,.$

Aus 3) erhält man

$$\alpha_3 + \alpha_4 = 720^0 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_6) = 318^0\,0'\,8''\,.$$

Für die Winkel $a_1 a_2, \ldots a_1 a_6$ hat man:

$$a_1 a_2 = 180^0 - \alpha_2 = 38^0\,6'\,7''\,,$$

$$a_1 a_3 = 360^0 - (\alpha_2 + \alpha_3) = 218^0\,6'\,7'' - \alpha_3\,,$$

$$a_1 a_4 = 540^0 - (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = \alpha_1 + \alpha_5 + \alpha_6 - 180^0 = 80^0\,5'\,59''\,,$$

$$a_1 a_5 = 720^0 - (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) = \alpha_1 + \alpha_6 = 216^0\,52'\,12'' = 180^0 + 36^0\,52'\,12''\,.$$

$$a_1 a_6 = 900^0 - (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6) = 180^0 + \alpha_1 = 290^0\,36'\,35'' = 360^0 - 69^0\,23'\,25''\,.$$

Nun sind die beiden unbekannten Glieder $a_3 \cos a_1 a_3$ und $a_3 \sin a_1 a_3$ in 1) und 2) zu bestimmen. Die bekannten Glieder berechnet man und findet:

$$a_1 = +125$$

$$a_2 \cos a_1 a_2 = +136{,}137 \qquad a_2 \sin a_1 a_2 = +106{,}754$$

$$a_4 \cos a_1 a_4 = +\ 11{,}176 \qquad a_4 \sin a_1 a_4 = +\ 64{,}031$$

$$a_5 \cos a_1 a_5 = -100 \qquad a_5 \sin a_1 a_5 = -\ 75$$

$$a_6 \cos a_1 a_6 = +\ 20{,}064 \qquad a_6 \sin a_1 a_6 = -\ 53{,}352$$

Also ergeben sich:

$$a_3 \cos a_1 a_3 = -192{,}377\,, \qquad a_3 \sin a_1 a_3 = -\ 42{,}433\,,$$

woraus

$$a_3 = \sqrt{37009 + 1800} = 197$$

folgt. Aus $\tan a_1 a_3$ erhält man, wenn man berücksichtigt, daß $a_1 a_3$ im dritten Quadranten liegen muß, weil Cosinus und Sinus negativ sind:

$$a_1 a_3 = 180^0 + 12^0\,26'\,18'' = 192^0\,26'\,18''\,.$$

Damit sind nun die unbekannten Winkel α_3 und α_4 bestimmt, nämlich:

$$\alpha_3 = 218^0\,6'\,7'' - a_1 a_3 = 25^0\,39'\,49''\,,$$

$$\alpha_4 = 318^0\,0'\,8'' - \alpha_3 = 292^0\,20'\,19''\,.$$

Die Ausführung praktisch, z. B. in der Geodäsie, vorkommender Berechnungen an Vielecken, bei denen es sich namentlich um Inhaltsbestimmungen handelt, erfolgt bequemer durch die Koordinatenmethode der analytischen Geometrie.

4. Wenn in einer trigonometrischen Aufgabe Winkel als Unbekannte auftreten, so hat man diese entweder, wenn die Aufgabe ihre Bestimmung nicht verlangt, zu eliminieren oder sie aus goniometrischen Gleichungen zu bestimmen. Eine goniometrische Gleichung lösen, heißt eine Funktion des unbekannten Winkels aus ihr berechnen (vgl. § 13 Nr. 8.). Dabei sind meistens Umformungen nötig, die durch Anwendung goniometrischer Formeln zu bewerkstelligen sind. Da die Geltung dieser Formeln nach § 13 als allgemein bewiesen ist, so sind die Lösungen goniometrischer Gleichungen, abgesehen von der Natur der geometrischen Aufgabe, allgemein und vollständig. Oft führt auch die algebraische Lösung einer solchen geometrischen Aufgabe auf eine konstruktive Lösung.

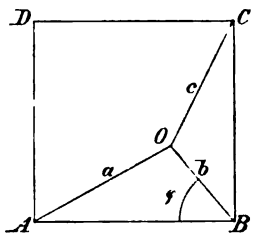


Fig. 230.

An einigen Beispielen sollen diese Gedanken ausgeführt werden.

1. Ein Punkt O hat von drei Ecken A, B, C eines Quadrats $ABCD$ (Fig. 230) die Entfernungen a, b, c: wie groß ist die Quadratseite x? Führt man hier $\angle ABO = \varphi$ als Unbekannte ein, so erhält man aus dem Dreieck ABO nach dem Cosinussatz:

$$\cos\varphi = \frac{b^2 + x^2 - a^2}{2bx}$$

und aus dem Dreieck CBO, in dem $\angle CBO = 90^0 - \varphi$ ist

$$\sin\varphi = \frac{b^2 + x^2 - c^2}{2bx}.$$

Da nun $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ sein muß, so erhält man eine Gleichung für x, die φ nicht mehr enthält:

$$\left(\frac{b^2 + x^2 - a^2}{2bx}\right)^2 + \left(\frac{b^2 + x^2 - c^2}{2bx}\right)^2 = 1.$$

Aus ihr kann x^2 bestimmt werden. Es ist eine Determination nötig, da unter einer gewissen Bedingung O innerhalb oder außerhalb des Quadrats liegen kann und es dann zwei brauchbare Werte für x^2 gibt. Die Auflösung ist allgemein, da die Beziehung $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ allgemein gilt.

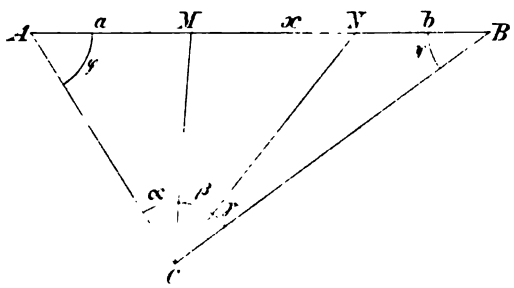


Fig. 231.

2. Von einer Strecke AB (Fig. 231) sind die Teile $AM = a$, $NB = b$ und von einem außerhalb liegenden Punkte C die Winkel $ACM = \alpha$, $MCN = \beta$, $NCB = \gamma$ gemessen; wie groß ist der mittlere Teil $MN = x$? Führt man die Winkel $BAC = \varphi$ und $ABC = \psi$ ein und drückt CM in den Dreiecken CMA und CMB nach dem Sinussatz doppelt aus, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{a}{\sin\alpha}\sin\varphi = \frac{b + x}{\sin(\beta + \gamma)}\sin\psi$$

und wenn man ebenso CN in den Dreiecken CNB und CNA ausdrückt die zweite:

$$\frac{b}{\sin\gamma}\sin\psi = \frac{a + x}{\sin(\alpha + \beta)}\sin\varphi.$$

Durch Multiplikation beider Gleichungen werden φ und ψ eliminiert und es entsteht eine quadratische Gleichung für x, von der eine Wurzel brauchbar ist.

3. Aufgabe von POTHENOT: Das Dreieck ABC ist durch seine Seiten und Winkel (in schematischer Bezeichnung) vollständig bestimmt. Von einem Punkte P (Fig. 232) seiner Ebene sind die Winkel $APC = \mu$, $CPB = \nu$ gemessen. Wie groß sind die Entfernungen $PA = x$, $PB = y$, $PC = z$? Der Punkt P kann konstruiert werden mit Hilfe von zwei Kreisen, die a und b als Sehne und die Winkel μ und ν als darüberstehende Peripheriewinkel enthalten. Die Konstruktion führt aber nicht zu einer bequemen Berechnung. Zu dieser nimmt man noch $\angle CAP = \varphi$, $\angle CBP = \psi$ als Unbekannte. Für diese hat man zunächst die Beziehung

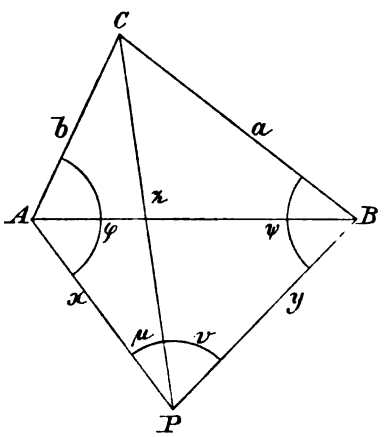


Fig. 232.

$$\varphi + \psi = 360^0 - \gamma - \mu - \nu = \sigma \quad ,$$

worin σ bekannt ist. Drückt man z in den beiden Dreiecken ACP und BCP nach dem Sinussatz zweimal aus, so folgt die weitere Beziehung

$$\frac{b}{\sin\mu}\sin\varphi = \frac{a}{\sin\nu}\sin\psi$$

oder

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{a\sin\mu}{b\sin\nu} = \frac{1}{\lambda} \quad ,$$

worin λ ebenfalls bekannt ist. Die Berechnung der unbekannten Winkel φ und ψ aus den beiden Gleichungen:

$$\varphi + \psi = \sigma \,, \qquad \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{1}{\lambda}$$

kann auf zwei Weisen geschehen:

a) Setzt man $\psi = \sigma - \varphi$ in die zweite Gleichung ein, so heißt sie:

$$\lambda\sin\varphi = \sin(\sigma - \varphi) = \sin\sigma\cos\varphi - \cos\sigma\sin\varphi$$

und aus dieser goniometrischen Gleichung erhält man:

$$\cot\varphi = \cot\sigma + \frac{\lambda}{\sin\sigma} \quad .$$

In einem numerischen Beispiel erhält man aus dieser Gleichung, in der auf die Vorzeichen von $\cot\sigma$ und $\sin\sigma$ zu achten ist, den Winkel φ ohne Schwierigkeit und daraus ψ.

b) Oder man leitet aus der zweiten Gleichung durch korrespondierende Subtraktion und Addition die neue ab:

$$\frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\sin\varphi + \sin\psi} = \frac{2\cos\frac{1}{2}(\varphi + \psi)\sin\frac{1}{2}(\varphi - \psi)}{2\sin\frac{1}{2}(\varphi + \psi)\cos\frac{1}{2}(\varphi - \psi)} = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \quad .$$

Da $\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = \frac{1}{2}\sigma$ bekannt ist, so erhält man daraus

$$\tan\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}\tan\tfrac{1}{2}\sigma \quad ,$$

womit φ und ψ bestimmt sind. Ist $\lambda > 1$, so ist $\tan\frac{1}{2}(\varphi - \psi)$ negativ, also $\frac{1}{2}(\varphi - \psi)$ negativ zu nehmen.

Hat man φ und ψ nach a) oder b) gefunden, so ergeben sich nun:

$$x = \frac{b}{\sin\mu}\sin(\mu+\varphi), \quad y = \frac{a}{\sin\nu}\sin(\nu+\psi), \quad z = \frac{b}{\sin\mu}\sin\varphi = \frac{a}{\sin\nu}\sin\psi \ .$$

Die algebraische Berechnung ergibt z als gemeinsame Sehne der beiden Kreise mit den Durchmessern $b : \sin\mu$ und $a : \sin\nu$ durch die Gleichung:

$$z = \frac{a\,b\sin\sigma}{\sqrt{a^2\sin^2\mu + b^2\sin^2\nu + 2\,a\,b\sin\mu\sin\nu\cos\sigma}} \ .$$

Ist $\lambda = 1$, also

$$\frac{b}{\sin\mu} = \frac{a}{\sin\nu} \ ,$$

so fallen die beiden Kreise, deren Schnittpunkt P ist, in den Umkreis des Dreiecks ABC zusammen und P ist nicht bestimmt. In der Tat ist dann $\mu+\nu = 180^0 - \gamma$, $\sigma = 180^0$, $\tan\frac{1}{2}\sigma = \infty$ und $\tan\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$ erscheint in der unbestimmten Form $0\cdot\infty$.

4. Von einem Dreieck ist gegeben: c, $\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \delta$, ϱ. Die Beziehung 5) in § 11 Nr. 3:

$$c = \varrho\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta}$$

kann man schreiben

$$2\,c\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta = 2\,\varrho\cos\tfrac{1}{2}\gamma$$

oder

$$c\,[\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) - \cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)] = 2\,\varrho\cos\tfrac{1}{2}\gamma \ .$$

Da nun $\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \sin\frac{1}{2}\gamma$ und $\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \delta$ bekannt ist, so erhält man für $\frac{1}{2}\gamma$ die goniometrische Gleichung:

$$c\sin\tfrac{1}{2}\gamma + 2\,\varrho\cos\tfrac{1}{2}\gamma = c\cos\delta \ .$$

Drückt man in ihr $\cos\frac{1}{2}\gamma$ durch $\sin\frac{1}{2}\gamma$ aus oder umgekehrt, so erhält man eine quadratische Gleichung für $\sin\frac{1}{2}\gamma$ oder $\cos\frac{1}{2}\gamma$. Bequemer ist die Lösung für ein numerisches Beispiel, wenn man die Gleichung zunächst durch c dividiert:

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma + \frac{2\varrho}{c}\cos\tfrac{1}{2}\gamma = \cos\delta$$

und einen spitzen Hilfswinkel λ so bestimmt, daß

$$\tan\lambda = \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda} = \frac{2\varrho}{c}$$

wird, was immer möglich ist, da jede beliebige positive Zahl als Tangente eines spitzen Winkels betrachtet werden kann. Damit nimmt die Gleichung die Gestalt an:

$$\sin(\tfrac{1}{2}\gamma+\lambda) = \cos\lambda\cos\delta \ .$$

Die Tafeln geben in einem numerischen Beispiel einen spitzen Winkel für $\frac{1}{2}\gamma+\lambda$ und daraus erhält man einen Wert für $\frac{1}{2}\gamma$, womit die Aufgabe gelöst ist.

Durch dieses Verfahren kommt man auch auf eine Konstruktion des Dreiecks. Benutzt man die Bezeichnungen der Fig. 219 (S. 458), so erhält man aus $\frac{1}{2}c$ und ϱ das rechtwinklige Dreieck $AO''C_0$, mithin in $\angle\, C_0AO''$ den in der Berechnung auftretenden Hilfswinkel λ. Dann ist

$$\cos\lambda = \frac{\frac{1}{2}c}{AO''}$$

und die obige Bestimmungsgleichung kann man schreiben:

$$AO''\cdot\sin(\tfrac{1}{2}\gamma+\lambda) = \tfrac{1}{2}c\cos\delta \ .$$

Schlägt man also (Fig. 233) über AO'' den Halbkreis, der durch C_0 geht und trägt von O'' aus $O''Q = \frac{1}{2}c\cos\delta$ als Sehne in diesen ein, so ist

$$AO''\sin(\tfrac{1}{2}\gamma + \lambda) = O''Q \quad ,$$

mithin $\angle O''AQ = \frac{1}{2}\gamma + \lambda$, also $\angle C_0AQ = \frac{1}{2}\gamma$. Die Verlängerung von AQ gibt auf $O''C_0$ den Punkt C_1 und damit das Dreieck.

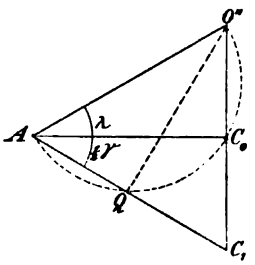


Fig. 233.

5. Ist von einem Dreieck gegeben: c, h_c, $\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \delta$, so liefert Fig. 215 S. 443 sofort die Beziehung

$$h = r\cos 2\delta + r\cos\gamma \quad ,$$

wenn man h für h_c schreibt. Setzt man hierin

$$r = \frac{c}{2\sin\gamma}$$

ein, so entsteht zur Bestimmung von γ die goniometrische Gleichung:

$$2h\sin\gamma - c\cos\gamma = c\cos 2\delta \quad .$$

Bestimmt man wieder einen spitzen Hilfswinkel λ durch

$$\tan\lambda = \frac{c}{2h} \quad ,$$

so ist γ aus der Gleichung

$$\sin(\gamma - \lambda) = \sin\lambda\cos 2\delta$$

zu finden.

Durch $\frac{1}{2}c$ und h ist das Dreieck $AC''C_0$ (Fig. 219 S. 458) bestimmt, mithin ist $\angle AC''C_0 = \lambda$, also

$$\sin\lambda = \frac{\frac{1}{2}c}{AC''} \quad .$$

Daher kann man die Bestimmungsgleichung für γ schreiben:

$$AC''\cdot\sin(\gamma - \lambda) = \tfrac{1}{2}c\cos 2\delta \quad .$$

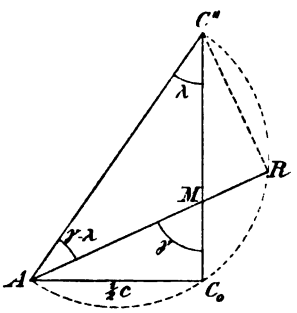


Fig. 234.

Schlägt man über AC'' den Halbkreis (Fig. 234), der durch C_0 geht und trägt von C'' aus $C''R = \frac{1}{2}c\cos 2\delta$ als Sehne ein, so ist

$$AC''\sin(\gamma - \lambda) = C''R \quad ,$$

mithin $\angle C''AR = \gamma - \lambda$; schneidet AR die Kathete C_0C'' in M, so ist dann $\angle AMC_0 = \gamma$, folglich M der Mittelpunkt des Umkreises. Damit ist die Konstruktion des gesuchten Dreiecks ABC leicht zu beenden.

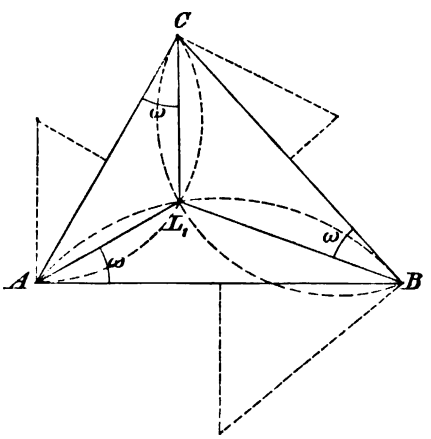


Fig. 235.

5. Konstruiert man in einem Dreieck ABC (Fig. 235) den Kreis, der AB als Sehne hat und BC berührt, sowie den Kreis, der BC als Sehne hat und CA berührt, so schneiden sich die beiden Kreise außer in B noch in L_1 so, daß $\angle AL_1B = 180^0 - \beta$, $\angle BL_1C = 180^0 - \gamma$ ist; folglich wird $\angle CL_1A = 180^0 - \alpha$, d. h. L_1 liegt auch auf dem Kreise, der CA als Sehne hat und AB berührt. Dann ist

$$\angle L_1AB = \angle L_1BC = \angle L_1CA = \omega \quad .$$

L_1 heißt der erste BROCARDsche Punkt und der Winkel ω der BROCARDsche Winkel des Dreiecks. Um ihn zu bestimmen, drückt man L_1A in den beiden Dreiecken L_1CA und L_1AB durch den Sinussatz aus und erhält die Gleichung:

$$\frac{b}{\sin\alpha}\sin\omega = \frac{c}{\sin\beta}\sin(\beta - \omega) \quad .$$

Da nun $b = 2r\sin\beta = 2r\sin(\alpha+\gamma)$, $c = 2r\sin\gamma$ ist, so erhält man

$$\frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha}\sin\omega = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\sin(\beta - \omega)$$

oder

$$\frac{\sin(\beta-\omega)}{\sin\beta\sin\omega} = \frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma} \quad ;$$

durch Anwendung der Summenformel ergibt sich daraus

$$\cot\omega - \cot\beta = \cot\alpha + \cot\gamma \quad ;$$

also

$$\cot\omega = \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma \quad .$$

Umläuft man das Dreieck ABC in entgegengesetzter Richtung wie vorher, so sieht man, daß sich auch die drei Kreise, von denen der erste CB als Sehne hat und BA berührt, der zweite BA als Sehne hat und AC berührt, der dritte AC als Sehne hat und CB berührt, in einem Punkte L_2, dem zweiten BROCARDschen Punkte (Fig. 236) des Dreiecks schneiden, der so liegt, daß

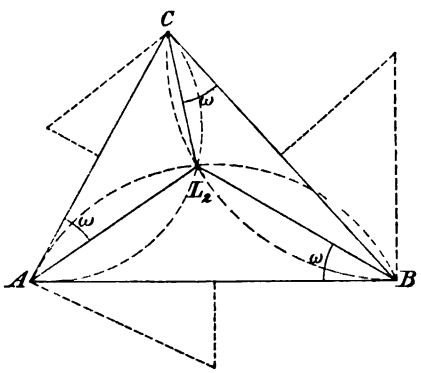


Fig. 236.

$$\angle L_2CB = \angle L_2BA = \angle L_2AC$$

ist. Bezeichnet man einen dieser Winkel wieder mit ω, so erhält man, wenn L_2A aus den beiden Dreiecken L_2BA und L_2AC durch den Sinussatz ausgedrückt wird, die Gleichung

$$\frac{c}{\sin\alpha}\sin\omega = \frac{b}{\sin\gamma}\sin(\gamma - \omega) \quad ,$$

die man auf gleiche Weise wie vorhin umwandeln kann in:

$$\frac{\sin(\gamma-\omega)}{\sin\gamma\sin\omega} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} \quad ,$$

woraus folgt

$$\cot\omega = \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma \quad .$$

Die Winkel ω sind also für beide BROCARDsche Punkte identisch.

Für $\tan\alpha = 1$, $\tan\beta = 2$, $\tan\gamma = 3$ (vgl. § 9 Nr. 3) hat man

$$\cot\omega = \frac{11}{6}, \quad \omega = 28^0\,36'\,38'' \quad .$$

Man kann den Winkel ω auch in folgender Weise konstruieren. Legt man an den Umkreis des Dreiecks in B die Tangente (Fig. 237), so bildet diese mit der Verlängerung von AB den Winkel γ. Zieht man durch C die Parallele zu AB, die die Tangente in D schneidet und zieht DD' senkrecht zu AB, so ist $DD' = CC' = h_c$. Dann ist

$$AD' = c + h_c\cot\gamma = h_c\cot\alpha + h_c\cot\beta + h_c\cot\gamma \quad ,$$

mithin

$$\cot DAD' = \frac{AD'}{h_c} = \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma \quad .$$

Es ist also $\angle DAD' = \omega$. Damit ist zugleich die Aufgabe gelöst: ein Dreieck zu konstruieren aus c, h_c und ω.

Nach Formel 4) in § 10 Nr. 3 hat man auch

$$\cot\omega = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4F} \quad .$$

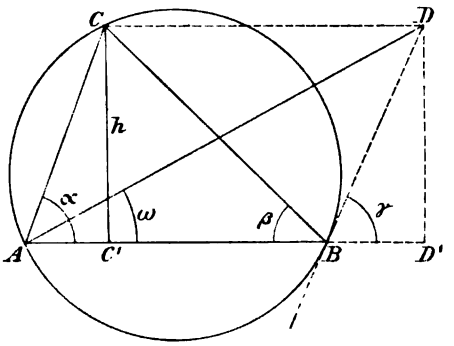


Fig. 237.

Ferner findet man

$$\cot^2\omega = \cot^2\alpha + \cot^2\beta + \cot^2\gamma + 2(\cot\alpha\cot\beta + \cot\alpha\cot\gamma + \cot\beta\cot\gamma) .$$

Der Klammerausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung hat aber nach Formel 2) in § 9 Nr. 3 den Wert 1: also folgt

$$\cot^2\omega = \cot^2\alpha + \cot^2\beta + \cot^2\gamma + 2 \quad .$$

Fügt man auf beiden Seiten noch 1 hinzu, so kann man dieser Beziehung auch die Form geben:

$$\frac{1}{\sin^2\omega} = \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma} \quad .$$

Weiter hat man auch

$$(\cot\alpha - \cot\beta)^2 + (\cot\beta - \cot\gamma)^2 + (\cot\gamma - \cot\alpha)^2 = 2(\cot^2\alpha + \cot^2\beta + \cot^2\gamma) - 2 = 2(\cot^2\omega - 3) \quad .$$

Die Summe der drei Quadrate auf der linken Seite ist immer positiv oder Null, also ist in jedem Dreieck

$$\cot^2\omega \geq 3 , \quad \omega < 30^0 \quad .$$

Der besondere Fall $\omega = 30^0$ gilt für das gleichseitige Dreieck.

6. Wird die Seite AB eines Dreiecks durch C' (Fig. 238) in dem Teilverhältnis $AC' : C'B$ geteilt, so ist durch dieses die Lage von C' eindeutig bestimmt, wenn man das Teilverhältnis positiv oder negativ nimmt, je nachdem C' auf AB selbst oder ihrer Verlängerung liegt. (Vgl. *Planimetrie* §§ 23, 47). Nimmt man AC' in positivem Sinne, so ist dann $C'B$ in positivem oder negativem Sinne zu nehmen. In jedem Falle ist

$$AC' + C'B = AB \quad .$$

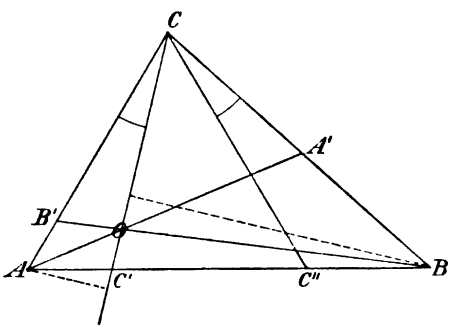


Fig. 238.

Verbindet man C' mit der gegenüberliegenden Ecke C durch die Ecktransversale CC', so teilt diese den Winkel in die Teile ACC' und $C'CB$. Fällt man von A und B auf CC' die Senkrechten, so haben diese das Verhältnis $AC' : C'B$, folglich ist

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{\sin ACC'}{\sin C'CB} \quad .$$

Das Verhältnis $AC : CB$ der Dreiecksseiten kann man als absolute Zahl auffassen; es wird also die Teilung des Winkels ACB durch das Sinusverhältnis seiner Teile bestimmt und zwar in demselben Sinne, wie das Teilverhältnis der Seite AB. Wenn die Transversale außerhalb des Dreiecks über die Seite CB hinaus fällt, so ist $\angle C'CB$ also auch $\sin C'CB$ negativ zu nehmen. Jedenfalls ist

$$ACC' + C'CB = ACB \quad .$$

Die beiden Teile $ACC' = \varphi$ und $C'CB = \psi$ des Winkels $ACB = \gamma$ können berechnet werden, wenn das Teilverhältnis $AC' : C'B = 1 : \lambda$ gegeben ist und die Seiten $AC = b$, $CB = a$ bekannt sind. Aus den Gleichungen

$$\varphi + \psi = \gamma \,, \quad \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{a}{\lambda b}$$

sind φ und ψ nach dem Verfahren in Nr. 4, Aufgabe 3 zu bestimmen.

Zieht man in dem Dreieck die drei Ecktransversalen AA', BB', CC', die sich in O schneiden, so gibt die dreimalige Anwendung des obigen Satzes:

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{AO}{OB} \cdot \frac{\sin AOC'}{\sin C'OB} \,,$$

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{BO}{OC} \cdot \frac{\sin BOA'}{\sin A'OC} \,,$$

$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{CO}{OA} \cdot \frac{\sin COB'}{\sin B'OA} \quad .$$

Die Multiplikation dieser drei Gleichungen liefert den Satz des Ceva (*Planimetrie* § 47 Nr. 1)

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1 \quad ,$$

von dem nach dieser Herleitung auch die Umkehrbarkeit unmittelbar einleuchtet.

Liegt O außerhalb des Dreiecks, so werden zwei Teilverhältnisse negativ. Nun gilt aber auch:

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{\sin ACC'}{\sin C'CB} \,,$$

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{BA}{AC} \cdot \frac{\sin BAA'}{\sin A'AC} \,,$$

$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{CB}{BA} \cdot \frac{\sin CBB'}{\sin B'BA} \,;$$

folglich ergibt die Multiplikation:

$$\frac{\sin ACC'}{\sin C'CB} \cdot \frac{\sin BAA'}{\sin A'AC} \cdot \frac{\sin CBB'}{\sin B'BA} = 1 \quad ,$$

d. h. das Produkt der drei Sinusverhältnisse der Teilung ist ebenfalls gleich 1.

6. Vertauscht man die beiden Teile, in die der Winkel AGB geteilt wird, indem man also $\angle ACC'$ an CB anträgt, so erhält man die Gegentransversale CC'' zur Ecktransversale CC' (Fig. 238). Dann ist $\angle ACC' = \angle C''CB$ und $\angle C'CB = \angle ACC''$. Das Sinusverhältnis der Winkelteilung erhält also den reziproken Wert. Da nun

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{\sin ACC'}{\sin C'CB} \,, \quad \frac{AC''}{C''B} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{\sin ACC''}{\sin C''CB}$$

ist, so folgt, wenn man multipliziert

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{AC''}{C''B} = \frac{AC^2}{CB^2} \quad ,$$

d. h. das Produkt der Teilverhältnisse, die zwei Gegentransversalen auf der gegenüberliegenden Seite hervorbringen, ist konstant.

Die Halbierungslinien des Winkels ACB und seines Außenwinkels sind ihre eigenen Gegentransversalen. Das Teilverhältnis der Gegenseite ist

$$\pm \frac{AC}{CB} \quad .$$

Die Gegentransversale der Höhe auf AB ist der Durchmesser des Umkreises durch den Punkt C.

Die Gegentransversale der Mittellinie heißt Symmediane. Da für die Mittellinie der Seite AB

$$\frac{AC'}{C'B} = 1$$

ist, so ist für die Symmediane CC''

$$\frac{AC''}{C''B} = \frac{AC^2}{CB^2} \quad .$$

Man kann also durch die Symmediane die Seite AB im Verhältnis der Quadrate der anstoßenden Seiten teilen.

Schneiden sich drei Ecktransversalen in einem Punkte und konstruiert man zu jeder die Gegentransversale, so hat man mit leicht verständlicher Bezeichnung

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{AC''}{C''B} = \frac{AC^2}{CB^2}, \quad \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{BA''}{A''C} = \frac{BA^2}{AC^2}, \quad \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{CB''}{B''A} = \frac{CB^2}{BA^2} \quad ,$$

folglich durch Multiplikation mit Berücksichtigung des Satzes von Ceva:

$$\frac{AC''}{C''B} \cdot \frac{BA''}{A''C} \cdot \frac{CB''}{B''A} = 1 \quad ,$$

d. h. die Gegentransversalen schneiden sich ebenfalls in einem Punkte; z. B. die drei Symmedianen im Punkte von Lemoine (von Grebe).

Vertauscht man die beiden Teile der Seite AB, bestimmt also einen Punkt C'' so, daß $AC' = C''B$, also auch $C'B = AC''$ wird; verwandelt demnach das Teilverhältnis in das reziproke, so nennt man CC'' die Seitengegentransversale zu CC'. Dann folgt aus

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{\sin ACC'}{\sin C'CB}, \quad \frac{AC''}{C''B} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{\sin ACC''}{\sin C''CB}$$

durch Multiplikation

$$1 = \frac{AC^2}{CB^2} \cdot \frac{\sin ACC'}{\sin C'CB} \cdot \frac{\sin ACC''}{\sin C''CB} \quad ,$$

oder

$$\frac{\sin ACC'}{\sin C'CB} \cdot \frac{\sin ACC''}{\sin C''CB} = \frac{CB^2}{AC^2} \quad .$$

Ist z. B. CC' die Halbierungslinie des Winkels ACB oder seines Außenwinkels, so ist

$$\frac{\sin ACC'}{\sin C'CB} = \pm 1 \quad ,$$

also

$$\frac{\sin ACC''}{\sin C''CB} = \pm \frac{CB^2}{AC^2} .$$

Diese Beziehung dient zur Lösung der Aufgabe, den Winkel eines Dreiecks innen oder außen so zu teilen, daß das Sinusverhältnis der Teilung gleich dem Verhältnis der Quadrate der einschließenden Seiten ist.

Auch hier ist entsprechend wie vorher zu beweisen, daß, wenn sich drei Ecktransversalen eines Dreiecks in einem Punkte schneiden, sich auch die drei Seitengegentransversalen in einem Punkte schneiden. Nach dem Satze von CEVA schneiden sich z. B. die nach den Berührungspunkten des Inkreises mit den Seiten gezogenen Ecktransversalen in einem Punkte, dem Punkt von GERGONNE; die Seitengegentransversalen gehen nach den Berührungspunkten der drei Ankreise auf den entsprechenden Seiten; daher schneiden sich auch diese in einem Punkte, dem Punkt von NAGEL.

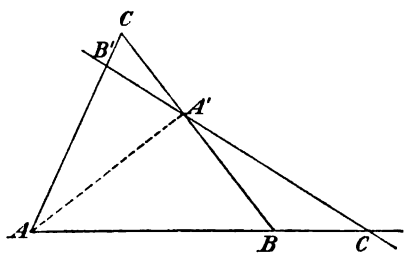


Fig. 239.

7. Schneidet eine Transversale die Seiten des Dreiecks ABC in C', A', B' (Fig. 239), so hat man, wenn man AA' zieht, durch zweimalige Anwendung des Satzes in Nr. 6:

$$\frac{AC'}{C'B} = -\frac{AA'}{A'B} \cdot \frac{\sin AA'C'}{\sin C'A'B} ,$$

$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{CA'}{A'A} \cdot \frac{\sin CA'B'}{\sin B'A'A} .$$

Durch Multiplikation beider Gleichungen ergibt sich mit Rücksicht auf den Sinn der Strecken und Winkel

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{CB'}{B'A} = -\frac{CA'}{A'B} = -\frac{A'C}{BA'}$$

oder

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = -1 .$$

Diese Gleichung drückt den Satz des MENELAOS und seine Umkehrung aus (vgl. *Planimetrie* § 47 Nr. 3). Der Satz bleibt richtig, wenn die Transversale alle drei Seiten in ihren Verlängerungen schneidet; es werden dann alle drei Teilverhältnisse negativ.

Viertes Buch.

Stereometrie.

Nach der ersten Bearbeitung von F. REIDT in Hamm

neu bearbeitet von R. HENKE in Dresden.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt.

Gerade und Ebenen.

Seite

§ 1. Die Grundgebilde im Raume. Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen . . 501
§ 2. Gerade und Ebene senkrecht zueinander 503
§ 3. Gerade geneigt zur Ebene 506
§ 4. Gerade und Ebene parallel 508
§ 5. Parallele Ebenen 509
§ 6. Zwei einander schneidende Ebenen 512
§ 7. Drei Ebenen 516

Zweiter Abschnitt.

Die Ecke.

§ 8. Grundbegriffe 516
§ 9. Beziehungen zwischen den Seiten und den Winkeln der Ecke 518
§ 10. Kongruenz und Symmetrie der Ecken 522
§ 11. Konstruktion der Ecken 525
§ 12. Berechnung der Ecken. Sphärische Trigonometrie 527
§ 13. Mehrseitige Ecken 539

Dritter Abschnitt.

Die Polyeder.

§ 14. Grundformen der Polyeder 541
§ 15. Das Prisma 547
§ 16. Die Pyramide und der Pyramidenstumpf 552

Vierter Abschnitt.

Krumme Flächen und runde Körper.

§ 17. Der Cylinder 556
§ 18. Der Kegel und der Kegelstumpf 560
§ 19. Die Kugel 565
§ 20. Kugel mit Polyedern, Cylinder und Kegel 573

Fünfter Abschnitt.

Die Oberfläche und das Volumen der Körper.

§ 21. Oberfläche der Polyeder, des Cylinders und Kegels 583
§ 22. Volumen der Polyeder, des Cylinders und Kegels 590
§ 23. Volumen und Oberfläche der Kugel und ihrer Teile 602

Stereometrie.

Erster Abschnitt.

Gerade und Ebenen.

§ 1. Die Grundgebilde im Raume. Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen.

1. In *Planimetrie* § 1 Nr. 4 ist die Ebene bereits definiert worden als die Fläche von der Eigenschaft, daß die Verbindungslinie irgend zweier ihrer Punkte völlig mit der Fläche zusammenfällt.

Aus der Erfahrung ist bekannt, daß eine Ebene hergestellt werden kann durch Hobeln, d. h. dadurch, daß eine Gerade längs einer festen Geraden parallel verschoben wird. Aus diesem Axiom der Ebene folgt, daß eine Ebene bestimmt ist durch zwei einander schneidende Gerade. Die eine dieser Geraden kann als die feste, die andre als die bewegliche Gerade angesehen werden.

Durch zwei sich schneidende Gerade läßt sich daher eine Ebene legen; allerdings nicht mechanisch, wie man auf der Ebene eines Papiers mit Lineal und Bleistift eine Gerade ziehen kann. Es ist vielmehr ein Postulat der Stereometrie, zu zwei einander schneidenden Geraden im Raume, die dadurch bestimmte Ebene sich vorzustellen.

Eine Ebene kann nach allen Richtungen unendlich erweitert werden und die in unendlicher Ausdehnung zu denkende Ebene teilt den unbegrenzten Raum in zwei Teile, die zu beiden Seiten der Ebene liegen, so daß man von einem Punkte des einen dieser Teile zu einem Punkte des andern auf irgend einer Linie nur gelangen kann, indem diese Linie die Ebene mindestens einmal schneidet.

Hat man durch zwei einander schneidende Gerade eine Ebene gelegt, so muß nach der Definition der Ebene die durch zwei Punkte der Ebene bestimmte Gerade völlig mit der Ebene zusammenfallen; diese Gerade ist eine Gerade der Ebene. Verbindet man einen Punkt der Ebene mit allen Punkten einer Geraden der Ebene, so müssen diese Verbindungslinien sämtlich Gerade der Ebene sein. Daraus folgt, daß eine Ebene auch erzeugt wird, wenn sich eine Gerade um einen festen Punkt dreht, während sie an einer festen Geraden gleitet. Unter allen möglichen Lagen der beweglichen Geraden ist auch die, in der sie der festen Geraden parallel ist und es folgt daher: eine Ebene ist bestimmt durch zwei parallele Gerade.

Umgekehrt folgt nun, daß zwei Gerade einer Ebene entweder einander schneiden oder parallel sein müssen. Da man von zwei parallelen Geraden sagen kann, daß sie einen unendlich fernen Punkt gemein haben, so folgt allgemein, daß zwei Gerade einer Ebene immer einen gemeinsamen Punkt haben müssen.

Da die bewegliche Gerade durch den außerhalb der festen Geraden liegenden Punkt und einen beliebigen Punkt der festen Geraden bestimmt ist, so ist eine

Ebene auch bestimmt durch eine Gerade und einen außerhalb ihr liegenden Punkt. Endlich ist die feste Gerade durch zwei Punkte bestimmt, woraus folgt, daß eine Ebene bestimmt ist durch drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte. Drei Punkte liegen also immer auf einer Ebene, der Ebene des Dreiecks, dessen Eckpunkte sie sind. Vier und mehr Punkte liegen im allgemeinen nicht auf einer Ebene.

Aus den vier Bestimmungsarten einer Ebene geht hervor, daß zwei Ebenen zusammenfallen, sich decken, wenn sie zwei sich schneidende oder parallele Gerade, eine Gerade und einen außerhalb ihr liegenden Punkt, drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, gemein haben.

2. Zwei Gerade im Raume liegen im allgemeinen nicht in einer Ebene, sondern nur dann, wenn sie einen endlichen oder unendlich fernen Punkt gemein haben. Im allgemeinen Falle kreuzen sie einander. Zwei einander kreuzende Gerade haben keinen endlichen oder unendlich fernen Punkt gemein.

Eine Gerade, die nicht Gerade einer Ebene ist, kann mit dieser Ebene höchstens einen Punkt gemein haben. Die Gerade und die Ebene schneiden dann einander und der gemeinsame Punkt heißt ihr Schnittpunkt, gelegentlich Fußpunkt der Geraden oder Spur der Geraden auf der Ebene. Wenn eine Gerade eine Ebene schneidet, so muß es in ihr zu beiden Seiten der Ebene Punkte geben. Es ist aber auch denkbar, daß alle Punkte der Geraden auf derselben Seite einer Ebene liegen, dann können Gerade und Ebene einander nicht in einem endlichen Punkte schneiden; sie sind parallel.

Zwei Ebenen 1 und 2 (Fig. 240) kann man sich in der Lage zueinander denken, daß sie einen Punkt A gemein haben. Dann kann man in der Ebene 2 von einem beliebigen Punkte M auf einer Seite von 1 eine Gerade durch A nach einem beliebigen Punkte N auf der andern Seite von 1 ziehen; ebenso kann man N mit einem Punkte P von 2, der auf derselben Seite wie M liegt, durch eine Gerade verbinden, die 1 in B schneiden muß. Somit haben 1 und 2 außer A noch B gemein, mithin die Gerade AB. Zwei Ebenen, die einen Punkt gemein haben, müssen eine durch diesen Punkt gehende Gerade gemein haben; sie schneiden einander und die gemeinsame Gerade heißt ihre Schnittlinie, die Spur der einen auf der andern, und wenn die Ebenen durch ihre Schnittlinie begrenzt gedacht werden, die Kante. Mehr als die Schnittlinie können zwei Ebenen nicht gemein haben; denn nimmt man an, sie hätten noch einen Punkt außer ihr gemein, so müßten sie zusammenfallen. Außerdem ist es denkbar, daß alle Punkte der einen Ebene auf derselben Seite der andern liegen, dann haben sie keinen endlichen Punkt gemein, die Ebenen sind parallel.

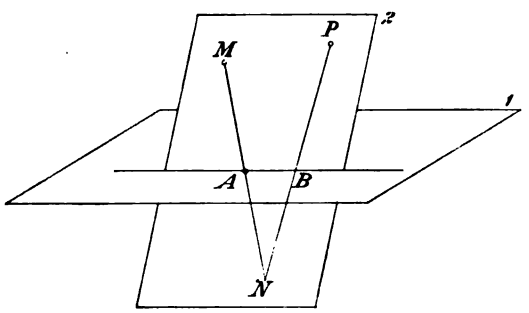


Fig. 240.

3. Die Kugel ist eine Fläche, deren Punkte von einem festen Punkte gleich weit entfernt sind. Der feste Punkt ist der Mittelpunkt der Kugel und die Entfernung jedes Punktes der Kugel vom Mittelpunkt ist der Radius der Kugel. Die Kugel begrenzt einen Raum vollständig, so daß es unmöglich ist, von einem Punkte innerhalb der Kugel auf irgend einer Linie nach einem Punkte außerhalb sich zu bewegen, ohne die Kugelfläche wenigstens einmal zu durchschneiden. Es muß daher auch die Verlängerung eines Kugelradius über den Mittelpunkt, die Kugel nochmals schneiden. Die beiden Radien, die in einer Geraden liegen,

geben einen Durchmesser der Kugel, dessen Endpunkte Diametralpunkte sind. Jede Ebene, die den Mittelpunkt der Kugel enthält, schneidet diese in einem Kreise, dessen Mittelpunkt der Kugelmittelpunkt und dessen Radius der Kugelradius ist. Ein solcher Kreis ist ein größter Kreis der Kugel. Alle größten Kugelkreise sind kongruent. Die Ebenen zweier größter Kugelkreise schneiden sich in einem Durchmesser der Kugel, die Peripherien der Kreise in Diametralpunkten der Kugel.

4. Um die Vorstellung räumlicher Gebilde zu erleichtern, bedient man sich auch in der Stereometrie ebener Figuren, die als Bilder der Gebilde im Raume, dargestellt auf einer Bild- oder Zeichenebene, aufzufassen sind. Die Methoden, nach denen von einem gegebenen räumlichen Gebilde in einer gegebenen Lage ein Bild auf einer Ebene gezeichnet werden kann, gibt die darstellende Geometrie. An dieser Stelle ist nur so viel zu bemerken, daß man ein solches Bild etwa erhalten würde als Schatten eines Drahtgestells, der durch schief auffallende Sonnenstrahlen auf eine weiße Wand geworfen wird. Daraus kann man folgern, daß ein Punkt im Raume im Bilde wieder als Punkt, eine Gerade wieder als Gerade erscheint, daß demnach einander schneidende oder parallele Gerade im Raume ebensolchen im Bilde entsprechen. Einander kreuzende Gerade dagegen müssen als einander schneidende Gerade erscheinen. Daraus entsteht eine Schwierigkeit für den Anfänger, Lagenbeziehungen in der ebenen Figur richtig in der Vorstellung auf den Raum zu übertragen. Namentlich aber werden Größenbeziehungen der Bestandteile räumlicher Gebilde sich im Bilde im allgemeinen anders darstellen als sie in Wirklichkeit sind. Die Längen von Strecken, die Größe von Winkeln und die Inhalte ebener Figuren im Raume erscheinen in dem ebenen Bilde verändert. Denkt man sich etwa eine Ebene im Raume als begrenzte Rechteckfläche, so erscheint diese im Bilde als Parallelogramm, wie in Fig. 240 in Nr. 2 die beiden Ebenen dargestellt worden sind. Die Gegenseiten bleiben nämlich in der Figur parallel, aber die Winkel erscheinen nicht als Rechte. Man sieht also im allgemeinen nicht an der ebenen Figur, daß zwei Gerade im Raume aufeinander senkrecht sind.

Ebenso erscheinen gleiche Strecken oder Winkel oder ebene Figuren im Raume im allgemeinen nicht als gleich. Ein regelmäßiges Vieleck erscheint also als unregelmäßiges auf der Bildebene. Ein Kreis erscheint im allgemeinen nicht als Kreis, sondern als eine andre Kurve, die Ellipse, genannt wird.

Eine ebene Figur, deren Ebene der Bildebene parallel sind, gibt in der Figur ein kongruentes Bild, so daß Größen- und Lagenbeziehungen der Figur im Raume unverändert im Bilde erscheinen.

§ 2. Gerade und Ebene senkrecht zueinander.

1. Legt man durch eine Gerade AB (Fig. 241) zwei beliebige Ebenen und errichtet in jeder in demselben Punkte F der Geraden eine Senkrechte, so ist durch diese beiden Senkrechten FC und FD eine Ebene MN bestimmt, die AB in F schneidet. AB steht auf den beiden Geraden FC und FD der Ebene senkrecht.

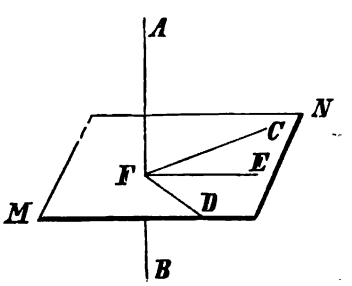


Fig. 241.

Zieht man nun eine beliebige dritte Gerade FE der Ebene, trägt auf AB von F aus gleiche Strecken FG, FH (Fig. 242) ab, schneidet ferner die drei Geraden FC, FE, FD durch eine vierte Gerade in I, K, L und verbindet G und H mit diesen drei Schnittpunkten, so ist

$\triangle GFI \cong \triangle HFI$, daher $GI = HI$,

$\triangle GFL \cong \triangle HFL$, daher $GL = HL$,

$\triangle GIL \cong \triangle HIL$, daher $\angle GLI = \angle HLI$,

$\triangle GLK \cong \triangle HLK$, daher $GK = HK$,

$\triangle GFK \cong \triangle HFK$, daher $\angle GFK = \angle HFK$.

Da nun die beiden Winkel GFK und HFK zugleich in der durch GH und FK bestimmten Ebene Nebenwinkel sind, so muß jeder ein rechter sein, d. h. GF muß senkrecht auf FK stehen.

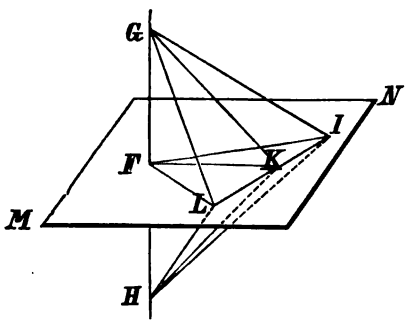


Fig. 242.

Damit ist der Satz bewiesen:

1) Wenn eine Gerade auf zwei Geraden einer Ebene senkrecht steht, so steht sie auf allen durch ihren Fußpunkt gehenden Geraden dieser Ebene senkrecht. Eine solche Gerade und eine solche Ebene heißen senkrecht oder normal zueinander. Es ist häufig bequem, die Gerade eine Normale der Ebene, die Ebene eine Normalebene der Geraden zu nennen. Zum Nachweis, daß eine Gerade zu einer Ebene normal sei, genügt es also zu zeigen, daß sie auf zwei Geraden dieser Ebene senkrecht ist.

2. Der obige Satz gestattet die Umkehrung: 2) Stehen beliebig viele Gerade auf einer Geraden in demselben Punkte senkrecht, so liegen sie in einer Ebene. Denn konstruiert man durch zwei beliebige dieser Geraden, FC und FD (Fig. 243), die Ebene, so ist nur zu zeigen, daß jede dritte dieser Geraden, z. B. FE, in diese Ebene fallen muß. Wäre dies nicht der Fall, so müßte die durch AF und FE bestimmte Ebene die Ebene FCD in einer von FE verschiedenen Geraden FG schneiden. Da AF nun zu FC und FD senkrecht ist, und mithin auch zu der Geraden FG derselben Ebene senkrecht stehen müßte, so gäbe es zwei Gerade FE und FG, die gleichzeitig auf AF in demselben Punkte und in derselben Ebene AFG senkrecht wären, was nicht möglich ist.

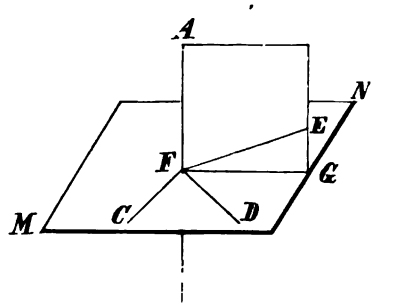


Fig. 243.

Auf einer Geraden können also im Raume unendlich viele Gerade in demselben Punkte senkrecht stehen. Der geometrische Ort dieser Senkrechten ist eine Normalebene zu der ersten Geraden. Man hat also den Satz 3): Dreht man einen rechten Winkel um einen Schenkel, so beschreibt der andre Schenkel eine Ebene. Die Erfahrung lehrt, daß eine Ebene auch auf der Drehbank hergestellt werden kann.

3. Ist AB eine Normale einer Ebene MN (Fig. 244), CD eine Parallele zu AB und C ein beliebiger Punkt dieser Parallelen, so kann man in der durch AB und CD bestimmten Ebene die Geraden BC und BD ziehen, und es ist CD als Parallele zu AB wie diese zu BD senkrecht. Zieht man noch in MN senkrecht auf BD in B die Gerade $BE = CD$ und zieht DE und CE, so ist $\angle BCD \cong \triangle EBD$ und folglich $BC = DE$, daher auch $\triangle EBC \cong \triangle EDC$, mithin

$\angle CDE = \angle CBE$. Da nun EB zu AB und BD, mithin zu der durch AB und BD bestimmten Ebene, also auch zu der dritten Geraden BC dieser Ebene senkrecht ist, so folgt, daß auch der Winkel CDE ein rechter sein muß. CD steht somit auf zwei Geraden der Ebene MN, nämlich auf BD und ED senkrecht, also gilt der Satz:

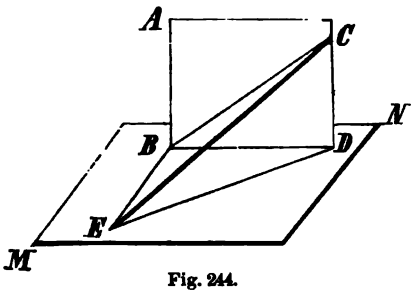


Fig. 244.

4) Ist eine Gerade normal zu einer Ebene, so ist auch jede ihr parallele Gerade eine Normale der Ebene.

Setzt man umgekehrt voraus, daß CD ebenso wie AB zu MN senkrecht stehe, so ergibt sich durch eine Beweisführung in umgekehrter Ordnung oder auch durch indirekten Beweis:

5) Normalen derselben Ebene sind parallel.

Hieraus folgt noch, daß parallele Gerade eine gemeinsame Normalebene haben, die nur zu einer dieser Geraden normal gelegt zu werden braucht und

6) Sind Gerade parallel derselben Geraden so sind sie miteinander parallel.

4. Durch einen Punkt einer Ebene gibt es nur eine Normale der Ebene. Denn ist BA in B auf MN (Fig. 245) senkrecht und BC eine zweite Gerade, die MN in B schneidet, so muß die durch BA und BC bestimmte Ebene die Ebene MN in einer Geraden BD schneiden, und da AB senkrecht auf BD stehen muß, kann die in derselben Ebene liegende Gerade BC nicht gleichzeitig auf BD und also auch nicht auf der Ebene MN senkrecht stehen.

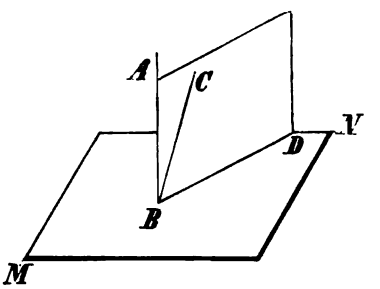


Fig. 245.

Ebenso gibt es durch einen Punkt außerhalb einer Ebene nur eine Normale der Ebene. Denn ist AB normal zu MN (Fig. 246) und nimmt man an, es sei auch AC eine Normale der Ebene, so würde die durch AB und AC bestimmte Ebene MN in BC schneiden und es müßte ACB ebenso wie der in demselben Dreieck ABC liegende Winkel ABC ein rechter sein.

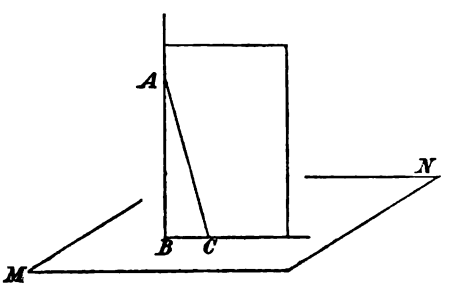


Fig. 246.

Man erhält also in beiden Fällen den Satz:

7) Durch einen Punkt ist eine Normale zu einer Ebene bestimmt.

In dem Falle, daß der Punkt außerhalb der Ebene liegt (Fig. 246) ist der Fußpunkt B der Normale die Projektion des Punktes A auf die Ebene; die Normale die Projizierende des Punktes A.

Da jede andre von A nach einem Punkte von MN gezogene Gerade, z. B. AC als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks ABC länger ist als die Kathete AB, so ist AB die kürzeste Verbindungslinie von A mit einem Punkte der Ebene; man nennt daher AB die Entfernung des Punktes A von der Ebene.

§ 3. Gerade geneigt zur Ebene.

1. Ist eine Gerade nicht senkrecht zu einer Ebene, so heißt sie schief oder geneigt zu ihr. Es sei AB (Fig. 247) eine Gerade, die zu einer Ebene MN geneigt ist, und S ihre Spur. Von zwei beliebigen Punkten C, D der Geraden seien die Senkrechten CC', DD' auf MN gefällt, so ist $CC' \parallel DD'$, daher durch CC' und DD' eine Ebene bestimmt, die MN in der durch C' und D' gehenden Geraden schneiden muß. Da in dieser Ebene die beiden Punkte C und D der schiefen Geraden liegen, also auch diese selbst ihrer ganzen Erstreckung nach in diese Ebene fällt, so muß auch S in ihr und somit in der Schnittlinie $C'D'$ liegen. Die Punkte S, C', D' liegen also in einer Geraden. Hieraus folgt:

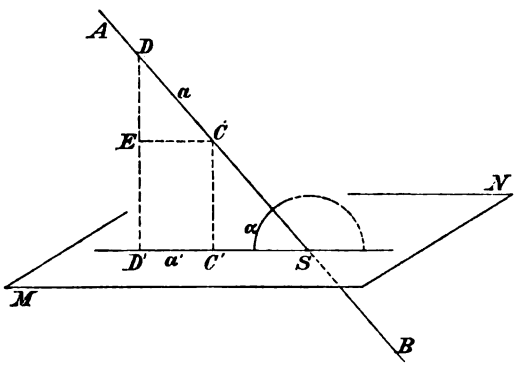


Fig. 247.

1) Alle von Punkten einer Geraden auf eine Ebene gefällten Senkrechten liegen in einer Ebene; ihre Fußpunkte liegen in einer durch die Spur der schiefen Geraden gehenden Geraden.

Diese Gerade $A'B'$ enthält die Projektionen aller Punkte der Geraden AB, sie ist daher die Projektion der Geraden auf die Ebene. Die Ebene, welche die Projizierenden aller Punkte von AB enthält, ist die projizierende Ebene der Geraden. Die Ebene, auf welche die Gerade projiziert wird, heißt Projektionsebene.

Die Projektion einer Geraden auf eine Ebene kann also gefunden werden, indem man die Projektion eines Punktes der Geraden mit ihrer Spur verbindet: oder sie ist die Verbindungslinie der Projektionen zweier Punkte der Geraden.

2. Der Winkel, den eine Gerade mit ihrer Projektion auf eine Ebene bildet, heißt der Neigungswinkel der Geraden zur Ebene; die projizierende Ebene der Geraden ist die Ebene des Neigungswinkels. Der Neigungswinkel von AB zu MN (Fig. 247) ist $\angle ASA' = \alpha$ oder $\angle ASB' = 180^0 - \alpha$. Da beide Supplemente sind, wird gewöhnlich der spitze Winkel als Neigungswinkel angesehen. Wird die Strecke $CD = a$ der Geraden auf MN projiziert, so ist $C'D' = a'$ die Projektion von a; der Neigungswinkel α entsteht dann, wenn man in der Ebene $CDD'C'$ durch C die Parallele CE zu $C'D'$ zieht und es ist $\angle DCE = \alpha$. Da $C'D' = a' = CE$ ist, so erhält man

$$a' = a \cos\alpha \quad ;$$

d. h. 2) Man findet die Projektion einer Strecke auf eine Ebene, indem man die Strecke mit dem Cosinus ihres Neigungswinkels zur Ebene multipliziert. Dieser Cosinus ist also der Projektionsfaktor; da er ein echter Bruch ist, so ist die Projektion einer Strecke kleiner als ihre wahre Länge.

3. Schneidet die Gerade AB die Ebene MN in S (Fig. 248) und projiziert man den beliebigen Punkt C der Geraden in C' auf die Ebene, so ist $\angle CSC' = \alpha$ der spitze Neigungswinkel der Geraden AB zur Ebene. Zieht man durch S eine andre Gerade SD in der Ebene und fällt in der durch SA und SD zu legenden Ebene die Senkrechte CE auf SD, so haben die beiden rechtwinkligen Dreiecke CSC' und CSE die Hypotenuse CS gemeinsam; da nun $CC' < CE$ ist, so ist $\angle CSC' < \angle CSE$, d. h.

3) Der spitze Neigungswinkel einer Geraden zu einer Ebene ist der kleinste Winkel, den die Gerade mit irgend einer Geraden der Ebene bildet.

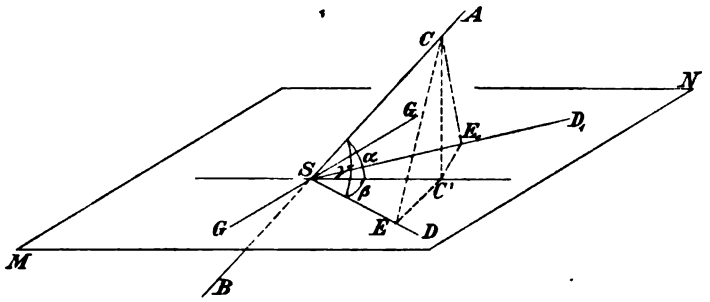


Fig. 248.

4. Zieht man durch S in der Ebene MN die Gerade SD_1 symmetrisch zu SD in Bezug auf SC', so daß $\angle D_1SC' = \angle DSC'$ und fällt von C das Lot CE_1 auf SD_1, so ist $\triangle C'SE \sim \triangle C'SE_1$, daher $SE = SE_1$ und $EC' = E_1C'$: also ist $\triangle CC'E \sim \triangle CC'E_1$, weil beide rechtwinklig sind, woraus $CE = CE_1$ folgt. Damit ergibt sich, daß $\triangle CSE \sim \triangle CSE_1$, daß also AS mit DS und D_1S gleiche Winkel bildet. Errichtet man daher in S zu SC' in der Ebene die Senkrechte GG_1, so muß auch $\angle CSG = \angle CSG_1$ sein. Diese Winkel sind aber in der durch AS und GG_1 bestimmten Ebene Nebenwinkel und daher jeder ein rechter. Damit ist der Satz bewiesen:

4) Jede zu einer Ebene geneigte Gerade ist senkrecht zu derjenigen Geraden der Ebene, die auf ihrer Projektion in ihrer Spur senkrecht steht.

Jede Gerade, die eine Ebene schneidet, bildet also im allgemeinen immer mit zwei Geraden der Ebene, die durch ihre Spur gehen, gleiche Winkel; mit einer Geraden einen rechten Winkel. Bildet sie mit drei Geraden der Ebene gleiche Winkel, so können diese nur rechte sein und die Gerade ist eine Normale der Ebene.

5. Es folgen ferner aus dem vorhergehenden die Sätze:

5) Fällt man von einem Punkte C außerhalb einer Ebene MN die Senkrechte CC' auf die Ebene und von dem Fußpunkte C' dieser Geraden die Senkrechte $C'E$ auf eine beliebige in der Ebene liegende Gerade SD, so steht die Verbindungslinie des Fußpunktes E dieser zweiten Senkrechten und des außerhalb der Ebene angenommenen Punktes A senkrecht zu der Geraden SD.

Es ist nämlich in diesem Falle SD die zu der Projektion $C'E$ von CE in E senkrecht stehende Gerade.

6) Fällt man umgekehrt von einem Punkte C außerhalb einer Ebene MN die Senkrechte CC' auf die Ebene und außerdem die Senkrechte CE auf eine beliebige in der Ebene liegende Gerade SD, so steht die Verbindungslinie CE der Fußpunkte senkrecht zu der Geraden SD.

Ist daher außer dem Neigungswinkel α (Fig. 248) $\angle C'SD = \beta$ gegeben und soll man den Winkel $CSE = \gamma$, den SA mit SD bildet, berechnen, so hat man aus rechtwinkligen Dreiecken

$$SE = SC' \cdot \cos\beta = SC \cdot \cos\alpha \cos\beta$$

und ebenso

$$SE = SC \cdot \cos\gamma \quad ,$$

folglich ist

$$\cos\gamma = \cos\alpha \cos\beta \quad .$$

7) Fällt man von einem Punkte C außerhalb einer Ebene MN die Senkrechte CC' auf eine beliebige Gerade SD dieser Ebene, errichtet in dieser auf SD die Senkrechte im Fußpunkte E der ersten Senkrechten und fällt endlich von C auf die zweite Senkrechte die Senkrechte CC', so steht diese senkrecht zu der Ebene MN.

Der letzte Satz gibt eine Auflösung der Aufgaben: Auf eine gegebene Ebene von einem Punkte die Senkrechte zu fällen; eine Senkrechte in einem gegebenen Punkte der Ebene auf dieser zu errichten.

§ 4. Gerade und Ebene parallel.

1. Legt man durch eine Gerade AB, die eine Ebene MN in S schneidet, eine zweite Ebene, so muß diese die erste schneiden, und die Schnittlinie beider Ebenen muß durch die Spur S der Geraden AB gehen. Ist die Gerade AB, durch die eine die Ebene MN in CD schneidende zweite Ebene gelegt worden ist, dieser Schnittlinie parallel (Fig. 249), so kann sie auch die Ebene MN nicht schneiden. Hiermit ist bewiesen, daß eine Gerade so zu einer Ebene liegen kann, daß sie in ihrer ganzen Erstreckung keinen Punkt mit der Ebene gemein hat. Man sagt in diesem Falle, die Gerade und die Ebene seien parallel.

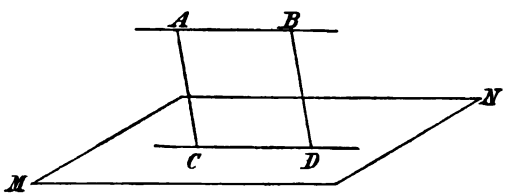


Fig. 249.

Es gilt demnach der Satz:

1) Ist eine außerhalb einer Ebene liegende Gerade einer Geraden dieser Ebene parallel, so ist sie der Ebene parallel.

2) Ist eine Gerade AB einer Ebene MN parallel, und schneidet eine durch AB gelegte zweite Ebene die erste, so ist die Schnittlinie zu AB parallel. Da nämlich beide Geraden in derselben Hilfsebene liegen, so können sie einander nicht kreuzen; hätten sie aber einen Punkt gemein, so müßte AB gegen die Voraussetzung diesen Punkt auch mit MN gemein haben.

Aus dem vorigen ergibt sich zugleich die Auflösung der Aufgabe: Zu einer gegebenen Ebene durch einen außerhalb gegebenen Punkt eine Parallele zu ziehen. Man sieht ein, daß unendlich viele solche Parallelen möglich sind.

Umgekehrt lassen sich auch durch jeden außerhalb einer Geraden gegebenen Punkt unendlich viele zu dieser Geraden parallele Ebenen legen, denn in der durch die Gerade AB und den Punkt C bestimmten Ebene (Fig. 249) läßt sich durch C die zu AB parallele Gerade ziehen, und jede durch diese gelegte Ebene muß zu AB parallel sein.

Ist eine Gerade AB einer Ebene MN parallel, so fällt jede Gerade, die durch einen Punkt dieser Ebene parallel zu AB gelegt werden kann, ihrer ganzen Erstreckung nach in diese Ebene.

2. 3) Alle von Punkten einer Geraden AB nach einer ihr parallelen Ebene gezogenen und unter sich parallelen Geraden liegen in derselben Ebene; denn legt man durch AB (Fig. 249) und eine dieser Geraden AC die Ebene, so muß jede andre dieser Geraden, z. B. BD, in diese Ebene fallen, da sonst die von ihr verschiedene durch die Parallelen AC und BD bestimmte Ebene gleichwohl mit ihr die Gerade AB und den Punkt C gemeinschaftlich haben würde, was nicht möglich ist.

Die Spuren der genannten parallelen Geraden in der Ebene liegen also in einer Geraden, und die zwischen AB und MN liegenden Strecken der Parallelen sind gleich lang: $AC = BD$.

Insbesondere liegen also auch alle von Punkten einer zu einer Ebene parallelen Geraden AB auf diese Ebene gefällten Senkrechten in einer Ebene und sind gleich lang, oder alle Punkte einer Parallelen zu einer Ebene haben von der Ebene dieselbe Entfernung, die man die Entfernung der Parallelen von der Ebene nennen kann.

Daraus folgt auch:

4) Ist eine Gerade einer Ebene parallel, so ist sie ihrer Projektion auf die Ebene parallel.

Daher ist der Neigungswinkel einer Parallelen zu einer Ebene $\alpha = 0$ und es folgt nach § 3 Nr. 2 für die Projektion a' einer zur Ebene parallelen Strecke $a : a' = a$; d. h. die Projektion ist gleich der wahren Länge der Strecke.

3. Jede zu einer Ebene parallele Gerade kreuzt sich mit jeder ihr nicht parallelen Geraden dieser Ebene. Sind umgekehrt zwei einander kreuzende Gerade AB und CD gegeben (Fig. 250), so läßt sich durch jede der beiden eine zu der andern parallele Ebene legen; denn konstruiert man zunächst durch CD und einen beliebigen Punkt E von AB eine Hilfsebene, zieht in dieser durch E die Parallele FG zu CD und legt dann die Ebene MN durch AB und FG, so muß MN parallel zu CD sein, da CD parallel zu FG ist. Nimmt man statt des beliebig gewählten Punktes E auf AB irgend einen andern Punkt an, so erhält man dieselbe Ebene MN wie vorher, da, wie oben gezeigt, jede zu CD parallele, durch einen Punkt von MN gehende Gerade ganz in MN liegen muß. Es ist also durch AB auch nur eine zu CD parallele Ebene möglich; diese ist der geometrische Ort aller durch je einen Punkt von AB gehenden und zu CD parallelen Geraden.

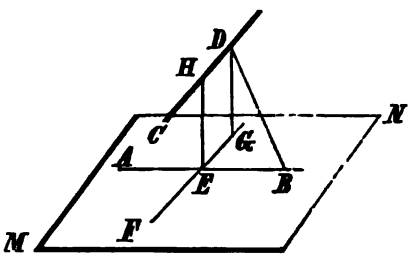


Fig. 250.

Denkt man sich ferner von allen Punkten der Geraden CD die Senkrechten auf MN gefällt, deren geometrischer Ort nach dem obigen eine Ebene, die projizierende Ebene von CD auf MN ist, so muß die Schnittlinie dieses Ortes mit MN, d. i. die Projektion von CD auf MN, die kreuzende Gerade AB in einem Punkte E schneiden. Die von einem Punkte H der Geraden CD auf MN gefällte Senkrechte, deren Fußpunkt E ist, steht zu gleicher Zeit auf beiden sich kreuzenden Geraden AB, CD senkrecht und ist die einzige Gerade, die diese Eigenschaft hat. Sie ist zugleich die kürzeste Gerade, die zwischen den sich kreuzenden Geraden gezogen werden kann, denn ist BD irgend eine andre solche Verbindungslinie, so ziehe man DG parallel zu HE und kann dann leicht zeigen, daß DB größer als DG, DG aber gleich HE ist. Die zu zwei einander kreuzenden Geraden AB, CD gleichzeitig senkrecht stehende Verbindungslinie von zwei Punkten dieser Geraden wird daher der kürzeste Abstand der beiden sich kreuzenden Geraden genannt. Er ist gleich dem Abstand jeder dieser Geraden von der zu ihr parallelen durch die andre gehenden Ebene.

§ 5. Parallele Ebenen.

1. Sind zwei Ebenen zu derselben Geraden normal, was nach § 2 nur dann, wenn die Ebenen die Gerade in verschiedenen Punkten schneiden, dann aber immer möglich ist, so würde die Annahme, daß die beiden Ebenen einen Punkt C gemein hätten, mit Hilfe der durch die senkrechte Gerade AB und

den Punkt C bestimmten Ebene auf die Folgerung führen, daß in dieser zwei Gerade AC, BC möglich seien, die beide zu derselben Geraden senkrecht wären und einander gleichwohl in einem Punkte C schnitten. Da dies unmöglich ist, so können die erstgenannten Ebenen in ihrer unendlichen Erstreckung keinen Punkt gemein haben. Hiermit ist die Möglichkeit paralleler Ebenen erwiesen und der Satz gefunden:

1) Ebenen sind parallel, wenn sie zu derselben Geraden normal sind.

2. Setzt man umgekehrt voraus, daß zwei gegebene Ebenen MN und PQ parallel seien, und zieht man in jeder Ebene eine Gerade, so können diese Geraden nur parallel sein oder einander kreuzen, denn jeder gemeinschaftliche Punkt müßte auch, entgegengesetzt der Voraussetzung, den Ebenen gemeinschaftlich sein. Das erste findet statt, wenn durch die beiden Geraden eine dritte Ebene gelegt werden kann. Man hat somit den Satz:

2) Parallele Ebenen werden von jeder sie schneidenden Ebene in Parallelen geschnitten.

Dagegen kann nicht umgekehrt behauptet werden, daß Ebenen, die von einer andern Ebene in Parallelen geschnitten werden, parallel sein müßten, da es offenbar möglich ist, durch jede von zwei parallelen Geraden einer Ebene und einem Punkt außerhalb der Ebene eine Ebene zu legen.

3. Um die Lagen einer Geraden gegen zwei parallele Ebenen allgemein zu untersuchen, nehmen wir zunächst an, daß die Gerade ganz in der einen Ebene liege. Es ist klar, daß sie in diesem Falle der andern Ebene parallel sein muß, und daß also von ihr die Sätze gelten, die in § 4 von den zu einer Ebene parallelen Geraden bewiesen sind. Umgekehrt muß jede Gerade, die durch einen Punkt der einen von zwei parallelen Ebenen parallel zu der andern gelegt wird, ganz in die erste fallen; denn ist A ein Punkt der zu PQ parallelen Ebene MN (Fig. 251), AB eine zu PQ parallele Gerade, und legt man durch AB eine Ebene, die PQ in CD schneidet, so ist AB parallel zu CD, gleichzeitig aber auch die Schnittlinie AE der Hilfsebene und der Ebene MN parallel zu CD. Da aber in dieser Hilfsebene durch A nur eine Parallele zu CD gelegt werden kann, so muß AB mit AE zusammenfallen.

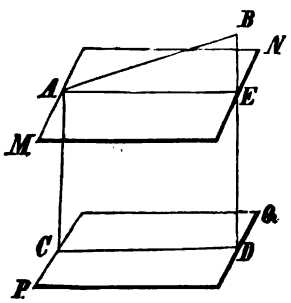


Fig. 251.

Da sich ferner durch jeden Punkt A außerhalb einer Ebene PQ eine zu der von A auf PQ gefällten senkrechten Geraden senkrechte, also eine zu PQ parallele Ebene legen läßt; so folgt:

3) Der geometrische Ort aller Geraden, die sich durch einen Punkt außerhalb einer Ebene zu dieser parallel ziehen lassen, ist eine zu dieser Ebene parallele Ebene.

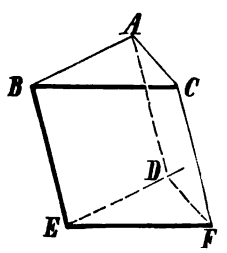


Fig. 252.

Daher muß auch die Ebene von zwei einander schneidenden, derselben zweiten Ebene parallelen Geraden dieser zweiten parallel sein.

Insbesondere sind also auch die Ebenen zweier Winkel, deren Schenkel paarweis parallel laufen, parallel.

Sind die Schenkel dieser Winkel ABC und DEF (Fig. 252) gleichgerichtet und trägt man auf jedem Paar vom Scheitelpunkt aus gleiche Strecken $BA = ED$, $BC = EF$ ab, so kann man durch Verbindung von A mit C und von D mit F zwei Dreiecke ABC, DEF erhalten, ferner durch BC und EF einerseits und durch BA und ED andrerseits je eine Ebene legen und in diesen

die Verbindungslinien CF und AD, sowie die ihnen gemeinsame Strecke BE ziehen. Dann sind $BCFE$ und $BADE$ Vierecke, in denen zwei Seiten parallel und gleich sind, also Parallelogramme, daher ist auch CF parallel und gleich BE, und AD parallel und gleich BE. Hieraus folgt weiter, daß auch CF und AD untereinander parallel und gleich sind, daß also $ACFD$ ebenfalls ein Parallelogramm ist. Mithin ist $AC = DF$, also die in den drei Seiten übereinstimmenden Dreiecke ABC, DEF kongruent, also endlich die entsprechenden Winkel ABC und DEF einander gleich. Man hat also den Satz:

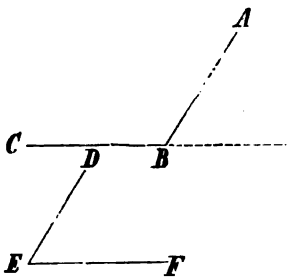


Fig. 253.

4) Winkel im Raume, deren Schenkel parallel und gleichgerichtet sind, sind einander gleich.

Sind beide Schenkelpaare entgegengesetzt gerichtet, so ist jeder dieser Winkel Scheitelwinkel zu einem solchen, dessen Schenkel paarweis denen des andern parallel und gleichgerichtet sind, also gilt in diesem Falle derselbe Satz. Sind aber die Schenkel BA, ED (Fig. 253) des einen Paares gleichgerichtet, die des andern Paares BC, EF entgegengesetzt gerichtet, so ist ABC Nebenwinkel eines dem Winkel DEF gleichen, beide ergänzen also einander zu zwei Rechten.

4. Es sei ferner eine Gerade angenommen, welche die eine von zwei parallelen Ebenen MN, PQ (Fig. 254) schneidet. Diese muß dann auch die andre Ebene schneiden. Es sei nun zunächst die Gerade AB senkrecht zu MN in B und treffe PQ in C. Man ziehe in MN durch B zwei beliebige Gerade BE, BF, lege durch AD und BE, sowie durch AD und BF je eine Ebene, bestimme die Schnittlinien CG, CH dieser Ebenen mit PQ, so ist CG parallel zu BE, CH parallel zu BF.

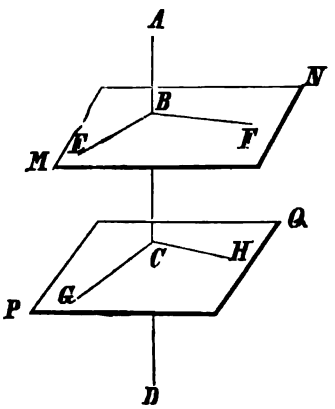


Fig. 254.

Da nun BE und BF beide zu AB senkrecht stehen, da AB senkrecht auf MN ist, so müssen auch CG und CH beide zu AC senkrecht sein, und hieraus folgt wieder, daß AC auch senkrecht zu der Ebene PQ ist. Der so gefundene Satz:

5) Steht eine Gerade senkrecht zu einer Ebene, so steht sie auch senkrecht zu jeder parallelen Ebene, ist die Umkehrung des Satzes 1).

Ist ferner AD schief zu MN in B (Fig. 255) und trifft die zu MN parallele Ebene PQ in C, so kann man von einem beliebigen Punkte A dieser Geraden die Senkrechte AE auf MN fällen, die dann nach dem vorigen Satze auch senkrecht zu PQ stehen muß. Legt man nun durch AD und AE die Ebene, so sind ihre parallelen Schnittlinien BE, CF mit MN und PQ die Projektionen von AD auf diese Ebenen, und die Neigungswinkel ABE, ACF sind als korrespondierende Winkel an Parallelen einander gleich. Es ergibt sich also:

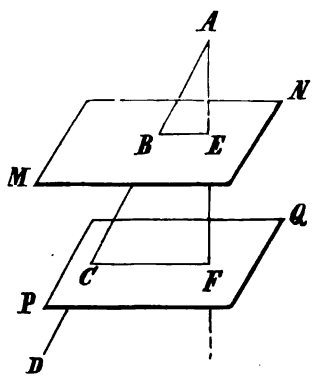


Fig. 255.

6) Jede Gerade, die parallele Ebenen schneidet, bildet mit ihnen gleiche Neigungswinkel.

Daraus folgt, daß die Projektionen einer Strecke auf parallele Ebenen einander gleich sind; oder daß die Projektion einer ebenen Figur in Gestalt und Größe sich nicht ändert, wenn man die Projektionsebene parallel verschiebt.

5. Zieht man mehrere Gerade, die zwei parallele Ebenen schneiden und betrachtet ihre zwischen den Ebenen liegenden Abschnitte, so findet man zunächst, daß

7) parallele Gerade zwischen parallelen Ebenen gleich lang sind;

denn durch je zwei solche Gerade läßt sich eine Ebene legen, welche die parallelen Ebenen in Parallelen schneiden muß, so daß ein Parallelogramm entsteht, in dem jene Geraden Gegenseiten sind. Da nun alle auf einer Ebene senkrechten Geraden parallel sind, so erhält man insbesondere den Satz: Senkrechte Gerade zwischen parallelen Ebenen sind gleich lang; die Länge einer solchen kann man die Entfernung der parallelen Ebenen nennen.

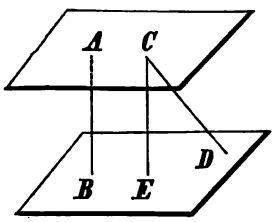


Fig. 256.

Die senkrechten Geraden zwischen parallelen Ebenen sind die kürzesten Strecken, die man zwischen diesen ziehen kann; denn ist AB (Fig. 256) eine senkrechte, CD eine beliebige schiefe Strecke zwischen zwei parallelen Ebenen, wobei AB und CD in einer Ebene liegen oder auch einander kreuzen können, so fälle man von C die Senkrechte CE auf die andre Ebene, dann ist $CD > CE$, $CE = AB$, also $CD > AB$.

Ist $AB = a$ die Entfernung der parallelen Ebenen, b die Länge und α der Neigungswinkel CDE von CD gegen eine dieser Ebenen, so ist

$$b = \frac{a}{\sin\alpha} .$$

Es sind also Strecken zwischen parallelen Ebenen nicht nur gleich, wenn sie parallel sind, sondern schon, wenn sie gleiche Neigungswinkel mit den Ebenen bilden.

§ 6. Zwei einander schneidende Ebenen.

1. Schneiden sich zwei Ebenen 1 und 2 in der Geraden AB (Fig. 257), und errichtet man in einem Punkte O ihrer Schnittlinie in jeder Ebene eine Senkrechte: OM und ON, so ist der Winkel MON unabhängig von der Lage des Punktes O auf AB. Denn machte man dieselbe Konstruktion für einen andern Punkt, so würden die Schenkel dieses Winkels denen des ersten in gleichem Sinne parallel sein, der zweite Winkel wäre also nach Satz 4) in § 5 Nr. 3 gleich dem ersten.

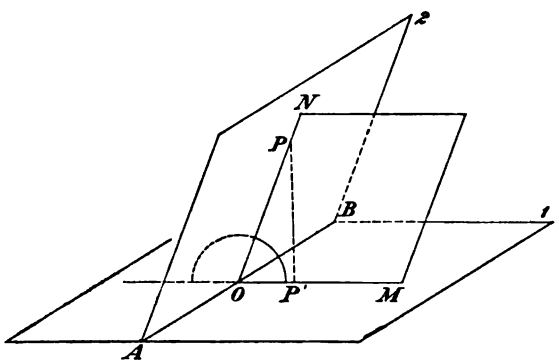


Fig. 257.

Der Winkel, den die beiden Senkrechten zur Schnittlinie der Ebenen OM und ON miteinander bilden, heißt der Neigungswinkel der beiden Ebenen.

Da OM und ON eine Normalebene zu AB bestimmen, so ist die Ebene des Neigungswinkels zweier Ebenen normal zu ihrer Schnittlinie. Als Neigungswinkel kann der spitze Winkel zwischen OM und ON oder sein stumpfes Supplement betrachtet werden.

In dem besondern Falle, daß der Neigungswinkel der beiden Ebenen ein rechter ist, die beiden Ebenen also normal zueinander sind, muß NO nicht nur auf AB (Fig. 258), sondern auch auf OM mithin auf der Ebene 1 senkrecht sein. Daraus folgt der Satz:

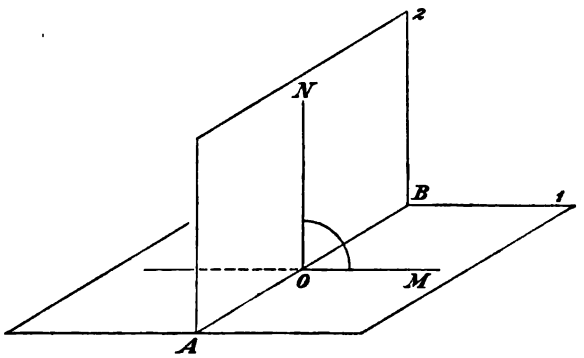


Fig. 258.

1) Eine Ebene ist auf einer zweiten normal, wenn sie eine Normale der zweiten Ebene in sich enthält.

So ist z. B. die projizierende Ebene einer Geraden (§ 3 Nr. 1) normal zur Projektionsebene.

2. Da ON (Fig. 257) auf der Geraden AB der Ebene 1 senkrecht steht und auch OM mit dieser einen rechten Winkel bildet, so ist OM die Projektion von ON auf die Ebene 1 (Satz 7) in § 3 Nr. 5); die von einem Punkte P von ON auf die Ebene 1 gefällte Senkrechte muß also ihren Fußpunkt P' in der Geraden OM haben und PP' selbst muß in der Ebene des Neigungswinkels MON enthalten sein. Daraus folgt:

2) Um den Neigungswinkel zweier Ebenen zu erhalten, fällt man von einem Punkte der einen Ebene eine Senkrechte auf die andre Ebene und eine Senkrechte auf die Schnittlinie beider Ebenen. Die Verbindungslinie der Fußpunkte beider Senkrechten bildet mit diesen ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Ebene die Ebene des Neigungswinkels der beiden Ebenen ist und das selbst den spitzen Neigungswinkel in sich enthält.

Da die Ebene MON die Normale PP' zu 1 und ebenso eine von einem Punkte der Geraden OM auf ON gefällte Senkrechte, die normal zu 2 sein muß, in sich enthält, so ist sie normal auf beiden Ebenen und man erhält den Satz:

3) Ist eine Ebene auf zwei sich schneidenden Ebenen normal, so ist sie auch normal zur Schnittlinie, aus dem noch folgt:

4) Die Ebene des Neigungswinkels zweier Ebenen ist eine Normalebene zu beiden Ebenen.

Fällt man nun von einem Punkte Q außerhalb zweier sich schneidender Ebenen (Fig. 259) die Senkrechten QQ' und QQ'' auf die Ebenen, so ist durch diese beiden Normalen die Ebene des Neigungswinkels beider Ebenen bestimmt. Schneidet diese die Schnittlinie AB in O, so ist $Q'OQ''$ der Neigungswinkel. Da nun die Schenkel der Winkel bei Q auf denen der Winkel bei O senkrecht stehen, so hat man den Satz:

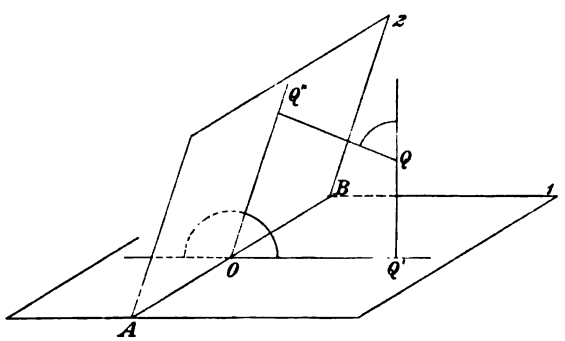


Fig. 259.

5) Die Winkel, die zwei Normalen zweier sich schneidenden Ebenen bilden, sind entsprechend gleich den Winkeln, die die beiden Ebenen miteinander bilden.

3. In Fig. 257 S. 512 ist der rechte Winkel AOP' als Projektion des rechten Winkels AOP zu betrachten; es ergibt sich also der Satz:

6) Die Projektion eines rechten Winkels ist wieder ein rechter Winkel, wenn ein Schenkel in der Projektionsebene liegt.

Mit Hilfe des Zusatzes zu 6) in § 5 Nr. 4 läßt sich die Geltung dieses Satzes dahin erweitern, daß er noch gilt, wenn ein Schenkel des rechten Winkels parallel der Projektionsebene ist.

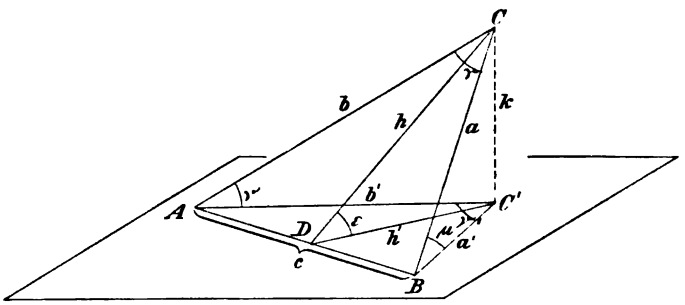


Fig. 260.

Liegt die Grundlinie AB des Dreiecks ABC (Fig. 260) in der Projektionsebene, so erhält man die Projektion des Dreiecks, wenn man die Projektion C' der Spitze C mit A und B verbindet. Zieht man die Höhe $CD = h$ des Dreiecks ABC und verbindet D mit C', so ist $\angle\, CDC' = \varepsilon$ der Neigungswinkel der Dreiecksebene zur Projektionsebene. Dann ist $C'D = h'$ zugleich die Projektion der Höhe und die Höhe der Projektion des Dreiecks. Mit Benutzung der schematischen Bezeichnung des Dreiecks ist der Inhalt von ABC

$$F = \tfrac{1}{2} c\, h$$

und der seiner Projektion ABC'

$$F' = \tfrac{1}{2} c\, h' \quad :$$

nun ist

$$h' = h \cos\varepsilon \quad ,$$

folglich

$$F' = \tfrac{1}{2} c\, h \cos\varepsilon = F \cos\varepsilon \quad .$$

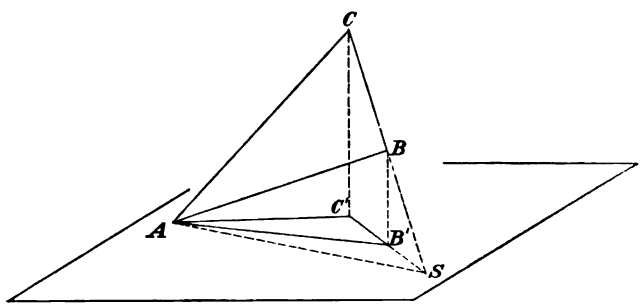


Fig. 261.

Der Cosinus des Neigungswinkels der Dreiecksebene zur Projektionsebene ist Projektionsfaktor. Dieser wichtige Satz läßt sich wesentlich erweitern. Liegt zunächst von dem Dreieck ABC nur die Ecke A in der Projektionsebene (Fig. 261), so kann man CB bis zur Spur S mit dieser verlängern, so daß AS die Spur der Dreiecksebene ist. Der Neigungswinkel ε der Dreiecksebene zur

Projektionsebene ließe sich dann entsprechend konstruieren. Die Projektion B' von B muß auf CS' fallen und $AB'C'$ ist die Projektion von ABC. Dann ist nach dem vorigen

$$\angle ASC' = \angle ASC \cdot \cos\varepsilon \quad ,$$

$$\triangle ASB' = \triangle ASB \cdot \cos\varepsilon \quad .$$

Durch Subtraktion erhält man mit derselben Bezeichnung der Inhalte

$$F' = F \cdot \cos\varepsilon \quad .$$

Verschiebt man die Projektionsebene parallel, so daß keine Ecke des Dreiecks in der Projektionsebene liegt, so muß der Satz nach dem Zusatz zu 6) in § 5 Nr. 4 noch bestehen.

Weiter kann er auf ein beliebiges ebenes Vieleck ausgedehnt werden, das man in Dreiecke zerlegen kann. Für jedes Dreieck gilt der Satz, und da für alle der Projektionsfaktor derselbe ist, muß er auch für die Summe der Dreiecke gelten, gleichgültig, wie groß ihre Anzahl ist. Endlich kann man jede beliebig begrenzte ebene Figur in unendlich viele unendlich kleine Flächenelemente von geradliniger Begrenzung zerlegt denken; dann muß der Satz für jedes Flächenelement und also auch für ihre Summe Geltung haben. Man kann also den allgemeinen Satz aussprechen:

7) Der Inhalt der Projektion einer ebenen Figur wird gefunden, indem man den Inhalt der Figur mit dem Projektionsfaktor multipliziert, d. i. mit dem Cosinus des Neigungswinkels der Ebene der Figur mit der Projektionsebene.

4. In Fig. 260 hat man auch die Neigungswinkel der Dreiecksseiten $CBC' = \mu$, $CAC' = \nu$ und in $\angle AC'B = \gamma'$ die Projektion des Dreieckswinkels γ. Sind die Projektionen der Seiten $BC' = a'$, $AC' = b'$, so gibt der Cosinussatz:

$$\cos\gamma' = \frac{a'^2 + b'^2 - c^2}{2\,a'\,b'} \quad ;$$

ist noch $CC' = k$, also $a'^2 = a^2 - k^2$, $b'^2 = b^2 - k^2$, so hat man

$$\cos\gamma' = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - 2\,k^2}{2\,a'\,b'} \quad .$$

Im $\triangle ABC$ ist aber

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2\,a\,b\cos\gamma \quad ,$$

folglich

$$\cos\gamma' = \frac{a\,b\cos\gamma - k^2}{a'\,b'} = \frac{a}{a'}\cdot\frac{b}{b'}\cdot\cos\gamma - \frac{k}{a'}\cdot\frac{k}{b'} = \frac{\cos\gamma}{\cos\mu\cos\nu} - \tan\mu\tan\nu \quad ,$$

oder

$$\cos\gamma' = \frac{\cos\gamma - \sin\mu\sin\nu}{\cos\mu\cos\nu} \quad .$$

Da in dieser Formel die Dreiecksseiten nicht mehr vorkommen, so lehrt sie, die Projektion eines Winkels zu finden, wenn die Neigungswinkel seiner Schenkel zur Projektionsebene gegeben sind. Man hat noch

$$\cos\varepsilon = \frac{F'}{F} = \frac{\frac{1}{2}\,a'\,b'\sin\gamma'}{\frac{1}{2}\,a\,b\sin\gamma} = \frac{a'}{a}\cdot\frac{b'}{b}\cdot\frac{\sin\gamma'}{\sin\gamma} = \cos\mu\cos\nu\cdot\frac{\sin\gamma'}{\sin\gamma} \quad .$$

Die Formeln behalten ihre Geltung, wenn die Projektionsebene parallel verschoben wird, z. B. so, daß sie durch C geht.

In dem besondern Falle $\gamma = 90^0$ wird

$$\cos\gamma' = -\tan\mu\tan\nu \quad ,$$

γ' also stumpf, wenn μ und ν spitz sind.

§ 7. Drei Ebenen.

Zwei Ebenen sind entweder parallel oder sie schneiden sich. Eine dritte Ebene kann im ersten Falle den beiden ersten parallel sein oder sie kann sie schneiden; im zweiten Falle geht die dritte Ebene entweder durch die Schnittlinie der beiden ersten, oder sie ist dieser parallel oder sie schneidet sie.

a) In Betreff dreier paralleler Ebenen findet man leicht, daß wenn zwei Ebenen E_1, E_2 derselben dritten Ebene E_3 parallel sind, sie untereinander parallel sein müssen; denn konstruiert man eine Normale zu E_3, so ist diese auch auf der zu E_3 parallelen Ebene E_1, und ebenso auch auf E_2 senkrecht; die zu derselben Geraden senkrechten Ebenen E_1, E_2 müssen also einander parallel sein.

Es folgt hieraus, daß nicht zwei einander schneidende Ebenen gleichzeitig einer und derselben dritten parallel sein können, oder daß eine Ebene, die eine von zwei parallelen Ebenen schneidet, auch die andre schneiden muß.

b) Eine Ebene schneidet nach Satz 2) in § 5 Nr. 2 zwei parallele Ebenen in Parallelen. Legt man eine zu den beiden Schnittlinien normale Ebene, so ist diese die Ebene der Neigungswinkel der dritten Ebene zu den beiden parallelen Ebenen. Die Schnittlinie dieser Ebene mit den drei Ebenen bildet die planimetrische Figur, die besteht aus zwei Parallelen und einer Durchschneidenden. Man kann daher die Neigungswinkel gruppieren zu korrespondierenden, Wechsel- und Ergänzungswinkeln.

c) Gehen drei Ebenen durch dieselbe Gerade, so bilden sie ein Büschel. Die dritte Ebene teilt den Neigungswinkel der beiden ersten innen oder außen. Insbesondere bilden die Halbierungsebenen der Neigungswinkel zweier Ebenen den geometrischen Ort der Punkte, die von beiden Ebenen gleich weit entfernt sind.

d) Ist eine dritte Ebene der Schnittlinie zweier Ebenen parallel und schneidet sie beide, so müssen die Schnittlinien der dritten mit den beiden ersten nach Satz 2) in § 4 Nr. 1 der Schnittlinie der beiden ersten, also auch miteinander parallel sein. Denkt man sich die drei Ebenen durch ihre Schnittlinien begrenzt, so entsteht ein Dreikant.

e) Schneiden sich zwei Ebenen und schneidet eine dritte deren Schnittlinie, so schneidet diese die ersten beiden in zwei Geraden, die durch einen Punkt der Schnittlinie der beiden ersten hindurchgehen. Die drei Ebenen haben also einen Punkt gemein und je zwei Ebenen schneiden sich in einer Geraden, die durch diesen Punkt geht. Denkt man sich die Ebenen durch ihre Schnittlinien und diese durch den gemeinsamen Punkt begrenzt, so bilden die drei Ebenen eine Ecke.

Zu weiteren Betrachtungen gibt außer d) namentlich e) Anlaß.

Zweiter Abschnitt.

Die Ecke.

§ 8. Grundbegriffe.

1. Gehen von einem Punkte O drei Gerade OA, OB, OC aus, die nicht in einer Ebene liegen und legt man durch je zwei eine Ebene, die man durch die Geraden selbst begrenzt annimmt, so entsteht die Ecke $OABC$, oder kurz O. O heißt der Scheitel; OA, OB, OC die Kanten; AOB, BOC, COA die Ebenen der Ecke.

Die Winkel, die die Kanten miteinander bilden, heißen Seiten der Ecke und die Neigungswinkel der Ebenen der Ecke heißen Winkel der Ecke. Legt

man um den Scheitel O als Mittelpunkt eine Kugel mit beliebigem Radius, so schneiden die Ebenen der Ecke diese Kugel in Bogen größter Kreise, die ein sphärisches Dreieck bilden. Es kann also einer Ecke ein sphärisches Dreieck und umgekehrt zugeordnet werden. Der Ecke O (Fig. 262) ist das sphärische Dreieck ABC zugeordnet. Die Seiten dieses sphärischen Dreiecks werden zweckmäßig gemessen durch ihre Centriwinkel, das sind die Seiten der Ecke; als Winkel des sphärischen Dreiecks sind zu betrachten die Neigungswinkel der Ebenen der Ecke, das sind die Winkel der Ecke. Diese Beziehung zwischen der Ecke und dem zugeordneten sphärischen Dreieck wird dazu verhelfen, die Analogie zu verdeutlichen, die im folgenden zwischen Eigenschaften der Ecke und des geradlinigen Dreiecks bestehen, und bei denen die Seiten der Ecke den Seiten, die Winkel der Ecke den Winkeln des Dreiecks entsprechen.

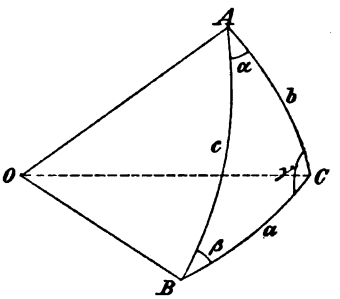


Fig. 262.

Daher bezeichnet man auch der Planimetrie entsprechend die Seiten des sphärischen Dreiecks oder der Ecke: $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ und die Winkel: $ABC = \beta$, $BCA = \gamma$, $CAB = \alpha$.

Die Ecke hat also drei Seiten und drei Winkel, die zusammen ihre sechs Stücke bilden und sämtlich in Gradmaß gemessen sind.

2. Die Seiten einer Ecke und ebenso die Winkel einer solchen können hohle oder überstumpfe Winkel sein. So gehört z. B. zu jeder Ecke eine zweite, die denselben Scheitel und dieselben Kanten wie diese hat, und deren Raum den der ersten zum gesamten Raum ergänzt. Jede Seite einer dieser Ecken beträgt mit der entsprechenden Seite der andern, und jeder Winkel der ersten beträgt mit dem entsprechenden Winkel der zweiten zusammen vier Rechte. Erweitert man aber jede Seitenfläche einer Ecke zur vollständigen Ebene, so wird diese, falls nicht alle ihre Stücke hohle Winkel waren, in zwei bis sieben einzelne Ecken zerlegt, deren Seiten und Winkel sämtlich kleiner als 180^0 sind. Die so überhaupt entstehenden acht Ecken stehen zueinander in einfachen Beziehungen: Jeder dieser Ecken liegen drei andre so an, daß sie mit ihr eine Ebene und also eine Seite gemeinsam haben, so z. B. der Ecke $OABC$ (Fig. 263), die Ecken $OA'BC$, $OAB'C$, $OABC'$. Sie stimmen mit ihr auch in einem Winkel überein, nämlich in dem, der der gemeinsamen Seite gegenüberliegt. Die andern Winkel und die andern Seiten beider Ecken sind paarweise Supplemente. Drei andre Ecken $OAB'C'$, $OA'BC'$, $OA'B'C$ liegen so gegen die Urecke, daß jede einen Winkel hat, der Scheitelwinkel eines Winkels der ersten ist. Auch die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten sind Scheitelwinkel zueinander, während die andern Stücke wieder paarweise supplementär sind. Diese sechs Ecken werden Nebenecken der Urecke genannt. Endlich ist noch eine Ecke $OA'B'C'$ vorhanden, deren Seiten und Winkel sämtlich Scheitelwinkel eines entsprechenden Stücks der Urecke sind. Sie liegt dieser so gegenüber, daß ihre Kanten die Verlängerungen ihrer entsprechenden Kanten sind; sie heißt die Gegenecke der Urecke.

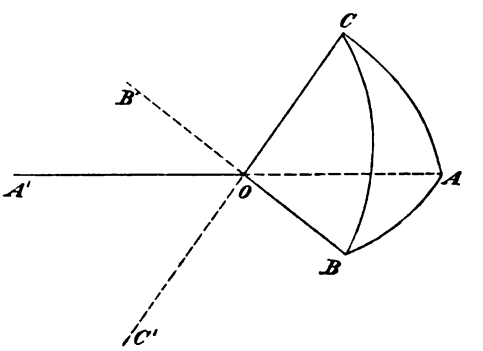


Fig. 263.

Wegen dieser Teilbarkeit jeder Ecke mit überstumpfen Seiten und Winkeln und dieser Beziehungen der Teilecken zueinander ist es gestattet, im folgenden der Einfachheit wegen nur solche Ecken vorauszusetzen, deren sechs Stücke sämtlich kleiner als 180^0 sind.

3. Fällt man von einem Punkte O_1 innerhalb des Raumes der Ecke $OABC$ (Fig. 264) die Lote O_1A_1, O_1B_1, O_1C_1 auf die Ebenen BOC, COA, AOB, so bestimmen diese drei Normalen die Ecke $O_1A_1B_1C_1$. Die Kanten der neuen Ecke stehen also auf den Ebenen der Urecke und die Ebenen der neuen Ecke stehen nach § 6 Satz 1) und 3) auf den Kanten der Urecke senkrecht. Die beiden Ecken heißen Polarecken zueinander.

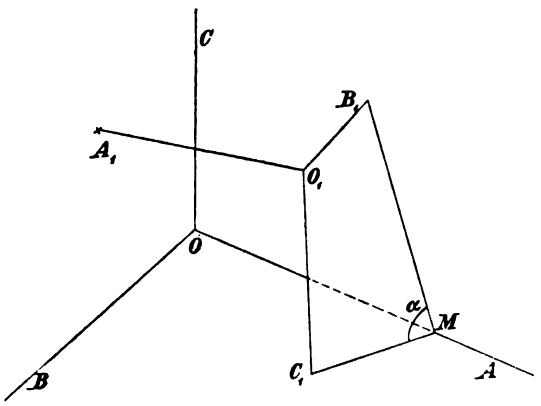


Fig. 264.

Die Ebene $B_1O_1C_1$ ist aber nach § 6 Satz 4) die Ebene des Neigungswinkels der beiden in der Kante OA zusammenstoßenden Ebenen der Ecke O; schneidet sie also die Kante OA in M, so ist $\angle B_1MC_1 = \alpha$. In dem Viereck $O_1B_1MC_1$ sind aber die beiden an B_1 und C_1 liegenden Winkel Rechte, folglich ist $\angle B_1O_1C_1 = 180^0 - \alpha$. Die Seiten der Ecke O_1 sind also die Supplemente der Winkel der Ecke O. Wegen der Vertauschbarkeit der Beziehung von Ecke und Polarecke folgt dann, daß die Winkel der Ecke O_1 die Supplemente zu den Seiten der Ecke O sein müssen.

Sind also zwei Ecken Polarecken, so sind die Seiten der einen und die Winkel der andern Supplemente.

Hat also eine Ecke

die Seiten a, b, c, die Winkel α, β, γ,

so hat die Polarecke

die Seiten die Winkel

$180^0 - \alpha$, $180^0 - \beta$, $180^0 - \gamma$; $180^0 - a$, $180^0 - b$, $180^0 - c$.

§ 9. Beziehungen zwischen den Seiten und den Winkeln der Ecke.

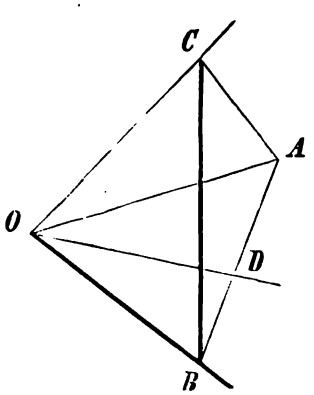


Fig. 265.

1. Um zunächst die Summe zweier Seiten einer Ecke O mit der dritten zu vergleichen, seien auf zwei Kanten der Ecke (Fig. 265) beliebige Strecken OA, OB abgeschnitten und A mit B verbunden. Ferner sei auf der Seite AOB ein Winkel AOD abgetragen, welcher der andern an der Kante OA liegenden und kleiner als AOB vorausgesetzten Seite der Ecke gleich sei; der Punkt D liege auf AB. Endlich sei auf der dritten Kante die Strecke OC gleich OD abgetragen und C mit A und B verbunden. Dann stimmen die Dreiecke AOC, AOD in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, und es sind also AC und AD gleich groß als entsprechende Stücke kongruenter Dreiecke. Da nun im Dreieck ABC die Seite BC größer sein muß als die Differenz $AB - AC$ der andern Seiten, also auch

größer als BD, so sind OBC, OBD zwei Dreiecke, die in zwei Seitenpaaren, aber nicht in dem dritten übereinstimmen. Daher ist auch der Winkel COB, welcher der größern Seite gegenüberliegt, größer als der der kleinern gegenüberliegende BOD, oder da $\angle BOD$ gleich der Differenz von AOB und AOC ist, so ist der Satz bewiesen:

1) Die Differenz zweier Seiten einer Ecke ist kleiner als die dritte.

Die Annahme, daß AOC kleiner als AOB sei, hindert nicht die Allgemeinheit dieses Satzes, denn sind diese Winkel gleich groß, so ist ihre Differenz gleich Null; der Satz bedarf also in diesem Falle keines Beweises. Derselbe Satz ergibt, daß

$$\angle BOC + \angle COA > \angle BOD + \angle DOA\,, \quad \text{d. i.} \quad > \angle AOB$$

ist und kann demnach auch in der folgenden Form ausgesprochen werden:

2) Die Summe zweier Seiten einer Ecke ist größer als die dritte, oder eine Seite ist kleiner als die Summe der beiden andern.

2. Schneidet man die Kanten einer Ecke O (Fig. 265) durch eine beliebige Ebene, die nicht durch den Scheitel geht, so entsteht an jedem Schnittpunkte A, B, C eine neue dreiseitige Ecke. Nach dem vorigen Satze ist dann

$$\angle OCA + \angle OCB > \angle ACB\,,$$
$$\angle OBC + \angle OBA > \angle CBA\,,$$
$$\angle OAB + \angle OAC > \angle BAC\,,$$

mithin auch

$$\angle OCA + \angle OCB + \angle OBC + \angle OBA + \angle OAB + \angle OAC > \angle ACB + \angle CBA + \angle BAC\,.$$

Die drei Winkel auf der rechten Seite dieser Ungleichung sind die Winkel des ebenen Dreiecks ABC, also ist die Summe der sechs Winkel auf der linken Seite größer als zwei Rechte. Von diesen sechs Winkeln liegen aber je zwei mit einer Seite der Ecke O in demselben Dreieck und betragen also mit dieser zusammen, z. B. OCB und OBC mit COB, zwei Rechte. Die Summe der sechs Winkel und der drei Seiten der Ecke beträgt mithin sechs Rechte, und da die Summe der Winkel größer als vier Rechte ist, mithin für die Summe der Seiten nach Abzug der ersten weniger als vier Rechte übrig bleiben müssen, so ist der Satz bewiesen:

3) Die Summe der drei Seiten einer Ecke ist kleiner als vier Rechte; also

$$a + b + c < 360^0\,.$$

3. Wendet man den Satz 3)

$$a + b + c < 360^0$$

auf die Polarecke an, so ist

$$180^0 - \alpha + 180^0 - \beta + 180^0 - \gamma < 360^0\,,$$

also

$$\alpha + \beta + \gamma > 180^0\,,$$

d. h.

4) Die Summe der Winkel einer Ecke ist größer als zwei Rechte.

Der Satz 2)

$$c < a + b$$

gibt auf die Polarecke angewendet

$$180^0 - \gamma < 180^0 - \alpha + 180^0 - \beta$$

oder

$$\alpha + \beta - \gamma < 180^0\,:$$

also auch entsprechend:

$$\alpha + \gamma - \beta < 180^0 \ ,$$
$$\beta + \gamma - \alpha < 180^0 \ .$$

Die Addition dieser drei Ungleichungen ergibt

$$\alpha + \beta + \gamma < 540^0 \ ,$$

d. h.

5) die Summe der Winkel einer Ecke ist kleiner als sechs Rechte.

Denkt man sich ein der Ecke zugeordnetes sphärisches Dreieck, so hat dieses im Gegensatz zu einem ebenen Dreieck die Eigenschaft, daß die Winkelsumme nicht konstant ist. Sie liegt zwischen 180^0 und 540^0. Der Überschuß der Winkelsumme über 180^0 heißt der sphärische Exzeß des sphärischen Dreiecks und für ihn hat man nun den Satz:

6) Der sphärische Exzeß eines sphärischen Dreiecks ist kleiner als 360^0.

4. Aus den Sätzen in Nr. 3 geht hervor, daß in einer Ecke alle drei Winkel stumpf sein können; es können ferner zwei stumpf, der dritte ein rechter, oder alle drei rechte, oder zwei rechte und der dritte stumpf oder spitz sein, u. s. w.

Man nennt insbesondere eine dreiseitige Ecke rechtwinklig, wenn ein Winkel ein rechter ist. Dann heißt die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite die Hypotenuse, die beiden andern Seiten heißen die Katheten der rechtwinkligen Ecke.

Stehen zwei Ebenen einer Ecke auf der dritten senkrecht, so entsteht eine zweifach rechtwinklige Ecke; die in diesen beiden Ebenen liegenden Seiten betragen ebenfalls 90^0, während die dritte Seite spitz oder stumpf sein kann. Diese Seite ist zugleich der Neigungswinkel dieser beiden Ebenen. Sind je zwei Ebenen einer Ecke auf der dritten Ebene senkrecht, so ist die Ecke eine dreifach rechtwinklige. Dann ist auch jede Kante auf den beiden andern senkrecht, also sind auch alle drei Seiten der Ecke Rechte.

5. Fällt man von einem beliebigen Punkte A einer Kante der Ecke $OABC$ (Fig. 266) die Senkrechte AD auf die gegenüberliegende Ebene BOC und auf die Kanten OB und OC die Senkrechten AE und AF, so bilden die Verbindungslinien DE und DF mit AE und AF nach § 6, Satz 2) die Neigungswinkel der Ebenen AOB und AOC mit der Ebene BOC, also zwei Winkel der Ecke. Es ist also nach den Bezeichnungen in § 8

$$\angle AED = \beta \ , \quad \angle AFD = \gamma \ .$$

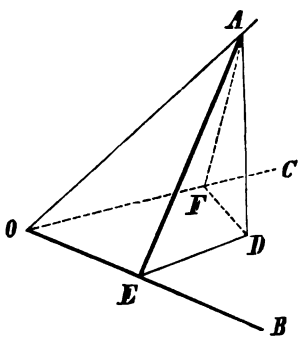


Fig. 266.

Macht man dieselbe Konstruktion von einem Punkte einer andern Kante, z. B. OB aus, so würde man die Winkel α und γ erhalten.

Sind nun die beiden Winkel β und γ spitz, wie in der Fig. 266, so liegt D innerhalb des Winkels BOC, und die Winkel AED, AFD sind die Winkel β und γ. Ist der Winkel γ ein rechter, so fällt D in die Kante OC, und AF fällt mit AD zusammen: man hat auch dann in dem rechtwinkligen Dreieck AED die beiden Winkel 90^0 und β. Sind beide Winkel rechte, so fallen AD, AF und AE untereinander und mit AO zusammen; die Kante AO steht dann senkrecht zur Ebene COB. Ist ferner der Winkel γ ein stumpfer, so fällt D außerhalb des Winkels BOC, und der Winkel AFD ist Supplement des Winkels γ. Dasselbe findet für den Winkel β statt, wenn dieser ein stumpfer ist: bei zwei stumpfen Winkeln β und γ liegt D innerhalb des

Scheitelwinkels von BOC, bei nur einem stumpfen und einem spitzen innerhalb eines Nebenwinkels von BOC, bei einem stumpfen und einem rechten auf der Verlängerung eines der Schenkel von BOC über O. In allen diesen Fällen läßt sich die angegebene Konstruktion zur Untersuchung der Beziehungen zwischen den Winkeln und den Seiten der Ecke benutzen. Diese Untersuchung führt zu den folgenden allgemein gültigen Sätzen:

Sind zwei Seiten AOB, AOC gleich groß, so sind die rechtwinkligen Dreiecke OAE, OAF kongruent, daher ist $AF = AE$, und hierdurch ergibt sich die Kongruenz der Dreiecke AED, AFD, aus der endlich die Gleichheit der Winkel AED, AFD folgt. Somit erhält man den Satz:

7) Gleichen Seiten einer Ecke liegen gleiche Winkel gegenüber.

Eine solche Ecke heißt eine gleichschenklige.

Umgekehrt kann man aus der vorausgesetzten Gleichheit der Winkel an OB und OC und also auch der Winkel AFD, AED zuerst die Kongruenz der Dreiecke AFD, AED, aus dieser dann die Gleichheit der Seiten AF, AE, und daraus ferner die Kongruenz der Dreiecke AOF, AOE folgern, so daß also auch der Satz gilt:

8) Gleichen Winkeln einer Ecke liegen gleiche Seiten gegenüber.

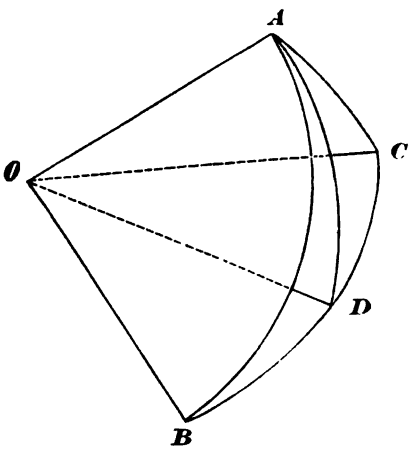


Fig. 267.

Setzt man dagegen voraus, daß der Winkel an OA (Fig. 267) größer sei als der Winkel an OB, so kann man von dem ersten, α, einen Teil BAD abschneiden, der geich β ist: die teilende Ebene AOD treffe BOC in OD. Dann liegen in der Ecke $OABD$ den gleichen Winkeln an OA und OB gleiche Seiten BOD, AOD gegenüber. Da ferner in der Ecke $OACD$ die Summe der Seiten COD und AOD größer als der dritte AOC sein muß, so ist auch $COD + DOB > AOC$, oder $COB > AOC$, d.h.:

9) In jeder Ecke liegt dem größern von zwei Winkeln die größere Seite gegenüber.

Endlich beweist man noch mit Hilfe der beiden letzten Sätze auf indirektem Wege leicht den folgenden:

10) In jeder Ecke liegt der größern von zwei Seiten der größere Winkel gegenüber.

Man kann die beiden vorstehenden Sätze über ungleiche Stücke einer Ecke auch mittels der zum Beweis der beiden entsprechenden über gleiche Stücke benutzten Konstruktion und in analoger Weise wie diese beweisen, indem man statt der Kongruenzen die Nicht-Kongruenzen der Dreieckspaare benutzt. Diese Beweise haben jedoch das Mißliche, daß sie je nach der Annahme spitzer oder stumpfer Winkel infolge der verschiedenen Lagen des Fußpunktes D zu weitläufigeren Erörterungen nötigen, wenn sie allgemein gültig sein sollen.

Als Zusätze der vier obigen Sätze über die Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln einer Ecke ergeben sich ohne weiteres die folgenden:

Sind die drei Seiten einer Ecke einander gleich, so sind auch die drei Winkel einander gleich. Eine solche Ecke heißt eine gleichseitige.

Sind die drei Winkel einer Ecke einander gleich, so sind auch die drei Seiten einander gleich. Eine gleichwinklige Ecke ist also auch gleichseitig.

Der größten Seite einer Ecke liegt der größte Winkel gegenüber.

Dem größten Winkel einer Ecke liegt die größte Seite gegenüber.

§ 10. Kongruenz und Symmetrie der Ecken.

1. Stimmen zwei Ecken in den drei Seiten und den drei Winkeln überein, so wird man vermuten, daß sie immer zur Deckung gebracht werden können, also kongruent sind. Vergleicht man jedoch die sechs Stücke einer Ecke mit denen ihrer Gegenecke, so findet man, daß je zwei entsprechende Seiten und ebenso je zwei entsprechende Winkel beider Ecken als Scheitelwinkel gleich groß sind. Trotz dieser Übereinstimmung in allen Stücken können jedoch die beiden Ecken im allgemeinen nicht zur Deckung gebracht werden, denn würde man z. B., wenn $OABC$ und $OA'B'C'$ die Gegenecken sind (Fig. 268), OA' in die Richtung von OA, OB' in die von OB bringen, so würden die Ecken auf verschiedene Seiten der gemeinschaftlichen Flächen AOB fallen; legt man aber die eine Ecke so auf die andre, daß die gleichen Winkel $A'OB'$ und AOB einander decken und beide Ecken auf derselben Seite von AOB liegen, so fällt OA' in die Richtung von OB, OB' in die Richtung von OA, und die entsprechenden Winkel fallen also nicht zusammen. Der Unterschied beider Ecken, der diese Unmöglichkeit, sie zur Deckung zu bringen, zur Folge hat, besteht darin, daß die entsprechenden Stücke in beiden in umgekehrter Ordnung aufeinander folgen und ist also entsprechend dem Unterschied, der zwischen rechter Hand und linker Hand oder zwischen der Gestalt eines Körpers und der seines Bildes im Spiegel besteht. Könnte man die eine der beiden Ecken so umstülpen, daß die innern Flächenseiten die äußern würden, so würde sich die Ordnung der Stücke umkehren und beide Ecken würden kongruent werden.

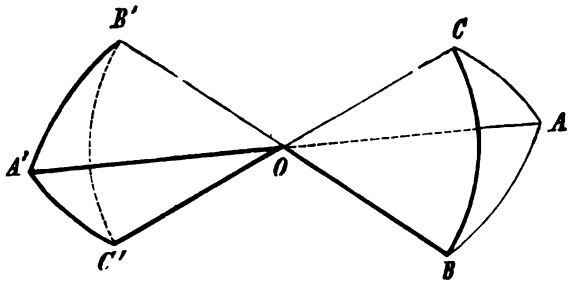


Fig. 268.

Man nennt zwei Raumgebilde überhaupt, und also auch insbesondere zwei Ecken, die in allen Stücken übereinstimmen und bei denen die Stücke in umgekehrter Ordnung, in entgegengesetztem Sinne, aneinander liegen, symmetrisch. Zwei symmetrische Raumgebilde lassen sich immer in eine solche Lage bringen, daß das eine das Spiegelbild des andern ist, d. h. es gibt eine Symmetrieebene, die den Abstand zweier entsprechenden Punkte normal halbiert (vgl. *Planimetrie* § 19).

Jede Ecke ist also ihrer Gegenecke symmetrisch. Sind zwei Ecken symmetrisch, so ist jede der Gegenecke der andern kongruent, und überhaupt zwei Ecken, die derselben dritten symmetrisch sind, müssen untereinander kongruent sein.

2. Ebenso wie in der Planimetrie beim ebenen Dreieck, wird sich nun die Untersuchung der Frage nötig machen, ob zwei Ecken nicht schon bei Übereinstimmung in weniger als allen sechs Stücken kongruent oder symmetrisch sein können. In der Tat erhält man die folgenden Kongruenz- und Symmetriesätze der Ecke. Der Beweis dieser Sätze kann geführt werden, indem man zeigt, daß aus der Gleichheit gewisser Stücke die Gleichheit der übrigen folgt. Sind dann in beiden Ecken die Stücke in gleichem oder entgegengesetztem Sinne angeordnet, so sind die Ecken kongruent oder symmetrisch.

1) Stimmen zwei Ecken in den drei Seiten überein, so sind sie kongruent oder symmetrisch.

Beweis. Konstruiert man in jeder der beiden Ecken O, O' zwei Winkel nach § 9 Nr. 5 (Fig. 266 S. 520, indem man $OA = O'A'$ macht, die Senkrechten AD, $A'D'$

auf die gegenüberliegenden Ebenen fällt und in dieser Weise, wie dort gezeigt, fortfährt, so folgt aus der Gleichheit der Seiten AOE, $A'O'E'$ die Kongruenz der in den Hypotenusen übereinstimmenden rechtwinkligen Dreiecke AOE, $A'O'E'$ und aus dieser, daß $AE = A'E'$, $OE = O'E'$ ist. In gleicher Weise ist $\triangle AOF \sim \triangle A'O'F'$, also $AF = A'F'$, $OF = O'F'$. Nun kann man die Vierecke $FOED$, $F'O'E'D'$ mit den gleichen Winkeln FOE, $F'O'E'$ aufeinander gelegt denken, so daß die gleichen Schenkel OF, $O'F'$ und ebenso OE, $O'E'$ einander decken, mithin auch die auf denselben stehenden Senkrechten FD, $F'D$ und ebenso ED, $E'D'$, also die ganzen Vierecke zusammenfallen. Da hiernach diese Vierecke kongruent sind, also $FD = F'D'$, $ED = E'D'$ ist, so folgt weiter die Kongruenz der Dreiecke AFD, $A'F'D'$, sowie die der Dreiecke AED, $A'E'D'$ und hieraus die Gleichheit der Winkel AFD, $A'F'D'$, sowie die von AED und $A'E'D'$. Da auch für die Winkel an OA und $O'A'$ derselbe Beweis geführt werden kann — denn die Senkrechte AD kann auch statt von A von einem Punkte einer andern Kante aus auf die dieser gegenüberliegende Ebene gefällt werden — so ist bewiesen, daß alle Winkel der beiden Ecken entsprechend gleich sind.

2) Stimmen zwei Ecken in den drei Winkeln überein, so sind sie kongruent oder symmetrisch.

Der Beweis dieses Satzes kann mittels der Polarecken geführt werden. Diese müssen in den Seiten übereinstimmen, daher sind auch je zwei entsprechende Winkel der Polarecken gleich, und hieraus folgt wieder rückwärts die Gleichheit je zweier Seiten der Urecken.

3) Stimmen zwei Ecken in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, so sind sie kongruent oder symmetrisch.

Der Beweis dieses Satzes kann in ähnlicher Weise wie der des Satzes 1), also durch Konstruktion der Winkel und die Kongruenz von Dreiecken geführt werden. Man kann außerdem zeigen, daß irgend eine der beiden Ecken sich mit der andern oder mit ihrer Gegenecke zur Deckung bringen läßt. Denkt man sich nämlich diese betreffenden Ecken so zusammengestellt, daß der Scheitel O' auf den Scheitel O, die Kante $O'A'$ in die Richtung der Kante OA fällt, wobei angenommen wird, daß an diesen Kanten die als gleich vorausgesetzten Winkel liegen, so muß ferner infolge dieser Gleichheit die eine Ecke so zur andern gelegt werden können, daß die Schenkelebenen $A'O'B'$ und AOB einerseits und die Schenkelebenen $A'O'C'$ und AOC andrerseits zusammenfallen. Infolge der Gleichheit der einschließenden Seiten fällt dann $O'B'$ in die Richtung von OB, $O'C'$ in die Richtung von OC, und es muß also auch die Ebene $B'O'C'$ die Ebene BOC decken.

4) Stimmen zwei Ecken in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln überein, so sind sie kongruent oder symmetrisch.

Der Beweis dieses Satzes kann in gleicher Weise wie der des Satzes 2) mittels der Polarecken geführt werden. Diese stimmen dann in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein; sind also kongruent oder symmetrisch, mithin auch die Urecken.

3. In den vier in Nr. 2 betrachteten Fällen genügt die Gleichheit von drei Stücken zweier Ecken, um ihre Kongruenz oder Symmetrie behaupten zu können. In den folgenden beiden Fällen kann man aus der Gleichheit von gewissen drei Stücken die Kongruenz oder Symmetrie nicht ohne weiteres schließen.

5) Stimmen zwei Ecken in zwei Seiten und dem der einen Seite gegenüberliegenden Winkel überein, so kann nicht behauptet werden, daß die Ecken kongruent oder symmetrisch seien.

Legt man nämlich die eine Ecke mit der andern (oder mit deren Gegenecke) so zusammen, daß die Scheitel und die gleichen Winkel einander decken, so müssen auch die diesem Winkel anliegenden als gleich vorausgesetzten Seiten

in AOC (Fig. 269) einander decken, da aber nicht bekannt ist, ob die Winkel an OC gleich seien, so kann auch nicht gefolgert werden, daß die Ebene $C'O'B'$ auf COB falle, vielmehr muß die Möglichkeit offen gelassen werden, daß eine z. B. COB' innerhalb des Winkels der andern an OC, und also auch die Kante OB' nicht auf OB, sondern innerhalb der Seite AOB falle. Findet dies nun statt, so entsteht eine Ecke $OBB'C$, in welcher der Voraussetzung zufolge die Seiten BOC, $B'OC$ und mithin auch die ihnen gegenüberliegenden Winkel an OB' und OB gleich sind. Da nun der Winkel der Ecke $OAB'C$ an der Kante OB' der Nebenwinkel des einen der vorigen ist, so ergibt sich, daß er in diesem Falle zu dem entsprechenden Winkel der Ecke $OABC$ an OB supplementär sein muß.

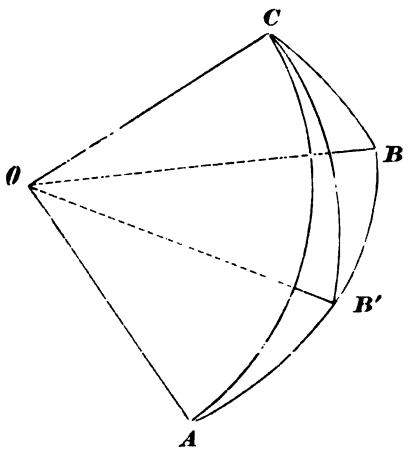


Fig. 269.

Sind also zwei Ecken, die in den vorher genannten Stücken übereinstimmen, nicht kongruent oder symmetrisch, so müssen die nicht als gleich vorausgesetzten den Seiten gegenüberliegenden Winkel zusammen zwei Rechte betragen, und die Kongruenz oder Symmetrie der beiden Ecken kann also behauptet werden, falls die weitere Bedingung erfüllt ist, daß die Summe der andern gegenüberliegenden Winkel nicht gleich zwei Rechten sei.

Insbesondere kann man also die Übereinstimmung der beiden Ecken in je zwei entsprechenden der noch übrigen Stücke schon dann behaupten, wenn die im allgemeinen leicht zu erkennende Bedingung erfüllt ist, daß die andern gegenüberliegenden Winkel gleichartig, d. h. daß sie gleichzeitig spitze oder gleichzeitig stumpfe oder rechte sind.

6) Stimmen zwei dreiseitige Ecken in einer Seite, einem an- und dem gegenüberliegenden Winkel überein, so kann ebenfalls die Kongruenz oder Symmetrie der Ecken nur unter der fernern Bedingung behauptet werden, daß die andern dem der Seite anliegenden Winkel gegenüberliegenden Seiten nicht zusammen zwei Rechte betragen.

Es müssen nämlich in diesem Falle die Polarecken der beiden Ecken in zwei Seiten und dem der einen gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen: diese Polarecken sind also nach dem vorigen Satze kongruent oder symmetrisch, wenn ihre andern gegenüberliegenden Winkel nicht zusammen zwei Rechte betragen, und dieses muß wieder der Fall sein, wenn diese Bedingung in den ursprünglichen Ecken für die entsprechenden Seiten erfüllt ist. Da nun in diesem Falle die Polarecken auch in ihren übrigen entsprechenden Stücken übereinstimmen, so folgt aus deren Gleichheit wieder rückwärts die Gleichheit ihrer Supplemente, also der noch übrigen Stücke der ursprünglichen Ecke.

4. Durch die sechs in Nr. 3 und 4 aufgestellten Kongruenzsätze für die Ecke sind alle hierbei möglichen Fälle erschöpft. Diese Sätze sind einander paarweis zugeordnet, so daß der Beweis eines jeden mit Hilfe des ihm zugeordneten Satzes und der Polarecke geführt werden kann, sobald dieser Satz als bewiesen gelten kann.

Die Kongruenzsätze für die Ecken zeigen eine Analogie mit den Kongruenzsätzen für die Dreiecke in der Planimetrie, ebenso wie mehrere der andern im vorigen bewiesenen Eigenschaften der Ecken solchen des Dreiecks entsprechen.

Daneben zeigen sich aber auch erhebliche Unterschiede, unter denen derjenige besonders hervorragt, daß die Summe der Winkel einer Ecke nicht, wie die der Winkel eines Dreiecks, zwei Rechte beträgt, überhaupt keinen bestimmten, sich gleich bleibenden Wert hat, sondern zwischen den Grenzen von zwei Rechten und sechs Rechten schwankt. Daher fallen bei der Ecke auch alle Folgerungen weg, welche denen entsprechen würden, die bei den Dreiecken aus der konstanten Winkelsumme hervorgehen. So beruht es hierauf, daß bei den Ecken auch der Kongruenzsatz 2) von den drei Winkeln aufzustellen war, da nicht durch zwei Winkel der dritte bestimmt ist. Ebenso zog der Kongruenzsatz 4) von einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln nicht den Satz 6) von einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel als Folge nach sich, und es wurde bei diesem sogar die Erfüllung einer weitern Bedingung notwendig.

Die Kongruenzsätze für die Ecken zeigen, entsprechend denen für Dreiecke, daß durch drei der sechs Stücke einer Ecke im allgemeinen die drei übrigen bestimmt sind. Man kann daher die Aufgabe stellen, aus drei gegebenen solchen Bestimmungsstücken die übrigen zu ermitteln, und zwar entweder mittels Konstruktion oder mittels Rechnung. Die Aufgabe im zweiten Falle erfordert die Anwendung der Trigonometrie auf die Ecke oder das sphärische Dreieck, die sogenannte sphärische Trigonometrie.

§ 11. Konstruktion der Ecken.

Gemäß den in § 10 Nr. 2, 3 betrachteten sechs Fällen, in denen zwei Ecken kongruent oder symmetrisch sein können, wenn sie in drei Stücken übereinstimmen, gibt es sechs Fundamentalaufgaben, eine Ecke aus drei gegebenen Stücken zu konstruieren.

1) Gegeben die drei Seiten: a, b, c. Denkt man sich in Fig. 266 S. 520 die Konstruktion der beiden Winkel $AED = \beta$, $AFD = \gamma$ ausgeführt, so kann man die Ebene AOB und AOC um OB und OC in die Ebene BOC drehen. Dadurch erhält man in einer Ebene nebeneinander die drei Seiten der Ecke, eine planimetrische Figur, die man das Netz der Ecke nennt. Die Strecke OA ist zweimal in $OA_1 = OA_2$ vorhanden. Da diese Strecke willkürlich angenommen werden kann, so sind die rechtwinkligen Dreiecke AOE und AOF durch die Hypotenuse OA und einen Winkel, nämlich eine Seite der Ecke bestimmt. Die den Winkeln gegenüberliegenden Katheten AE und AF müssen nach der Umklappung mit ED und FD in je eine Senkrechte zu OB und OC zusammenfallen. Dadurch ist im Netz der Fußpunkt D des von A auf die Ebene BOC gefällten Lotes bestimmt. Dann kann man die rechtwinkligen Dreiecke AED und AFD durch ihre Hypotenusen und eine Kathete konstruieren und hat damit die Winkel β und γ der Ecke. Die Konstruktion wird also folgendermaßen ausgeführt:

Man zeichnet das Netz der Ecke (Fig. 270), indem man die Seiten b, a, c nebeneinander anträgt; nimmt auf den das Netz begrenzenden Geraden die Strecken $OA_1 = OA_2$ beliebig an, fällt von A_1 auf OB und von A_2 auf OC die Senkrechten A_1E und A_1F, deren Verlängerungen sich in D schneiden. In D errichtet man auf DE und DF Senkrechte, die man durch Kreisbogen um E mit EA_1 und um F mit FA_2 in A_3 und A_4 schneidet. Dann ist $\angle A_3ED = \beta$, $\angle A_4FD = \gamma$. Als Probe für die Zeichnung muß $DA_3 = DA_4$ sein.

Zeichnet man das Netz der Ecke in andrer Reihenfolge der Seiten, so erhält man zwei andre Winkel der Ecke. Bei den drei möglichen Anordnungen kann man also jeden Winkel zweimal erhalten.

Fällt D auf eine Kante OB oder OC, so ist der an dieser Kante liegende Winkel ein rechter. Fällt D in den Raum eines Nebenwinkels von BOC, so ist nach § 9 Nr. 5 ein Winkel ein stumpfer. Das rechtwinklige Dreieck enthält dann das Supplement dieses Winkels. Fällt D in den Scheitelwinkelraum von BOC, so sind β und γ stumpf.

Die Konstruktion behält auch mit Berücksichtigung dieser Bemerkungen ihre Gültigkeit, wenn eine oder mehrere der Seiten stumpf sind.

Es ist dem Leser dringend zu raten, die Konstruktion auch in solchen Fällen auszuführen.

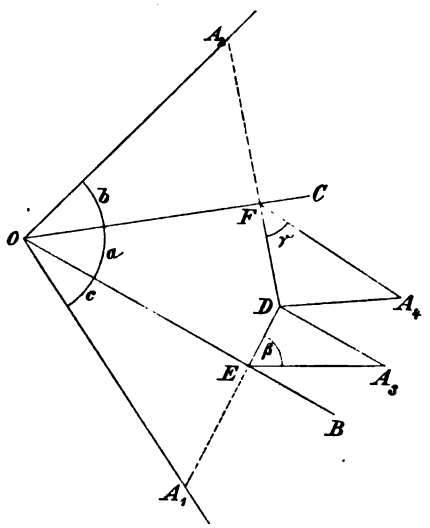


Fig. 270.

2) Gegeben die drei Winkel: α, β, γ: Man konstruiert die Polarecke mit den Seiten $180^0 - \alpha$, $180^0 - \beta$, $180^0 - \gamma$ und in deren Netz die Winkel, die die Supplemente zu den Seiten der gesuchten Ecke sind.

3) Gegeben zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel: a, b, γ. Man kann hier zunächst die beiden Seiten b und a aneinander legen und von dem beliebigen Punkte A_2 auf dem freien Schenkel von b, die Senkrechte A_2F auf OC fällen. Durch die Hypotenuse A_2F und den Winkel γ ist das rechtwinklige Dreieck DFA_4 bestimmt, also auch D und die Senkrechte DE auf OB. Aus den Katheten DE und $DA_3 = DA_4$ ist das rechtwinklige Dreieck DEA_3 und damit $\angle DEA_3 = \beta$ bestimmt. Trägt man auf der Verlängerung von DE die Hypotenuse $EA_3 = EA_1$ auf, so hat man OA_1 und damit die dritte Seite c. Zur Probe muß $OA_1 = OA_2$ sein. Der dritte Winkel kann dann nach Nr. 1 konstruiert werden.

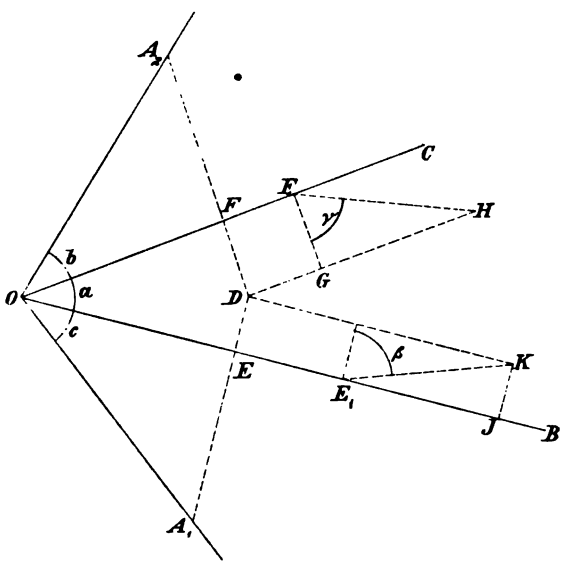


Fig. 271.

4) Gegeben eine Seite und die beiden anliegenden Winkel: a, β, γ. Von der Polarecke würden zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sein. Man könnte also diese Aufgabe auf 3) zurückführen. Man kann aber auch die Konstruktion direkt ausführen. Man zeichnet zunächst (Fig. 271) $BOC = a$, zieht in einem beliebigen Punkte F_1 von OC dazu die beliebige Senkrechte F_1G und trägt an diese γ in F_1 an, wodurch man das rechtwinklige Dreieck F_1GH erhält. Die Kathete GH trägt man nun von dem beliebigen Punkte E_1 in OB auf dieser Geraden auf bis J, errichtet in E_1 die Senkrechte zu OB und trägt an diese β an; in J errichtet man eine Senkrechte, die den Schenkel

von β in K schneidet. Von K zieht man die Parallele zu OB, die die Verlängerung von GH in D schneidet. Fällt man nun von D die Senkrechten DE und DF auf OB und OC und verlängert diese um $EA_1 = E_1K$ und um $FA_2 = F_1H$, so erhält man durch A_1 und A_2 die Seiten b und c. Es muß wieder $OA_1 = OA_2$ sein.

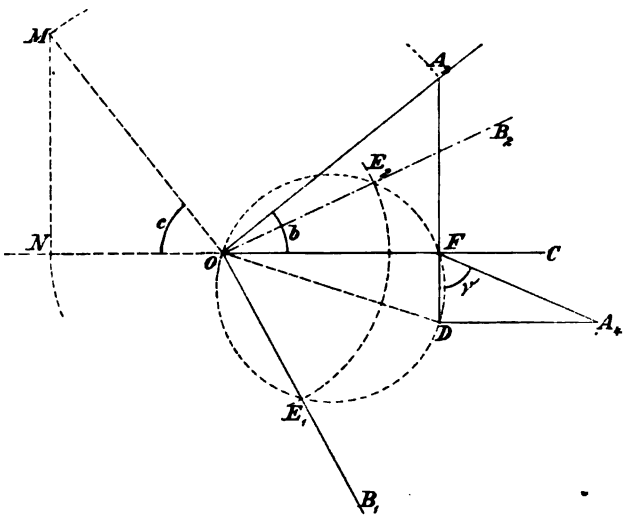


Fig. 272.

5) Gegeben zwei Seiten und der der einen gegenüberliegende Winkel: b, c, γ. Es ist zunächst (Fig. 272) das rechtwinklige Dreieck OA_2F und aus A_2F als Hypotenuse das rechtwinklige Dreieck DFA_4 bestimmt. Nun hat man über OD als Hypotenuse das rechtwinklige Dreieck ODE zu konstruieren, von dem die Kathete OE zugleich Kathete in einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse $OA_1 = OA_2$ und dem Winkel c ist. Verlängert man also OC über O, trägt an der Verlängerung c an, schneidet den Schenkel durch einen Kreisbogen um O mit OA_2 in M und fällt die Senkrechte MN auf OC, so hat man in den Kreis, dessen Durchmesser OD ist, ON als Sehne einzutragen. Die Aufgabe ist also nur lösbar, wenn $ON \leqq OD$ ist. Im ersten Fall gibt es zwei Punkte E, also zwei Ecken, in dem besondern Falle $ON = OD$ fällt E auf D und man erhält eine rechtwinklige Ecke mit $\beta = 90^0$. Die weitere Konstruktion ist nach den vorigen Aufgaben ohne weiteres klar.

6) Gegeben eine Seite, ein an- und der ihr gegenüberliegende Winkel: b, β, γ. Diese Aufgabe ist mit Hilfe der Polarecke auf die vorige zurückzuführen. Auch sie erfordert wie diese eine Determination.

§ 12. Berechnung der Ecken. Sphärische Trigonometrie.

1. Sind von einer Ecke die drei Seiten a, b, c gegeben, so kann man nach Aufgabe 1) in § 11, die Winkel im Netz konstruieren (Fig. 270 S. 526). Ist nun die beliebige Strecke $OA_1 = OA_2 = r$, wobei r als der Radius der Kugel betrachtet werden kann, die man um den Scheitel der Ecke beschreiben muß, um das der Ecke zugeordnete sphärische Dreieck (§ 8 Nr. 1) zu erhalten, so ist $OE = r\cos c$, $OF = r\cos b$, $A_2F = A_4F = r\sin b$. Setzt man $DF = q$, so ist in dem rechtwinkligen Dreieck A_4FD

$$\cos\gamma = \frac{q}{r\sin b} \quad .$$

Um q zu berechnen, fällt man von F (Fig. 273) die Senkrechte FG auf OB und zieht von D die Parallele DH zu OB. Dann ist $GE = OE - OG$: da nun $\angle DFH = a$, so hat man

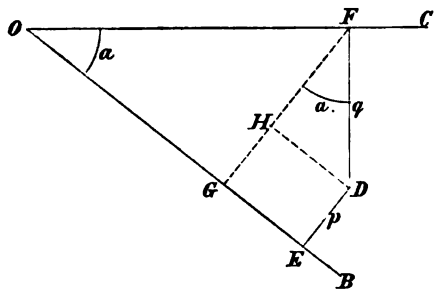


Fig. 278.

$$GE = HD = q \sin a \quad ,$$

$$OG = OF \cdot \cos a = r \cos b \cdot \cos a \quad ,$$

also

$$q \sin a = r \cos c - r \cos a \cos b \quad ,$$

$$q = r \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a}$$

und

$$1) \qquad \cos \gamma = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} \quad .$$

Auf analoge Weise würde man $DE = p$ bestimmen, dann aus dem rechtwinkligen Dreieck DEA_3

$$\cos \beta = \frac{p}{r \sin c} = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}$$

und durch Buchstabenvertauschung

$$\cos a = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

erhalten können. Diese drei Gleichungen enthalten den Cosinussatz der sphärischen Trigonometrie, der dazu dient, die Winkel eines sphärischen Dreiecks aus den drei Seiten zu berechnen.

Da die Lösung der trigonometrischen Aufgabe, das Viereck $OEDF$ zu berechnen, allgemein ist, so gilt der Cosinussatz für jede hohle Ecke. Doch ist es für den Anfänger eine empfehlenswerte Übung, sich zu überzeugen, daß in verschiedenen möglichen Fällen, z. B. wenn a oder eine andre Seite der Ecke oder ein Winkel stumpf ist, der Wert für $\cos \gamma$ sich in gleicher Form ergibt, vorausgesetzt, daß man die Vorzeichen der Funktionen gehörig beachtet.

Das Vorzeichen des Cosinus gibt an, ob der Winkel spitz oder stumpf ist; man hat z. B. für

$$\cos c - \cos a \cos b \gtrless 0 \quad , \quad \gamma \lessgtr 90^0 \quad .$$

In dem besondern Falle $\gamma = 90^0$ wird also

$$2) \qquad \cos c = \cos a \cos b$$

sein, d. h. in einem rechtwinkligen sphärischen Dreieck ist der Cosinus der Hypotenuse gleich dem Produkt der Cosinus der Katheten. Dieser Satz, der an der Figur leicht abzuleiten ist (vgl. auch § 3 Nr. 4), dient analog dem pythagoreischen Lehrsatz der Planimetrie dazu, aus zwei Seiten eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks die dritte zu berechnen.

Aus den rechtwinkligen Dreiecken A_3ED und A_1FD (Fig. 270 S. 526), die in den Katheten $A_3E = A_1F$ übereinstimmen, erhält man noch

$$A_3E \cdot \sin \beta = A_1F \cdot \sin \gamma$$

oder

$$r \sin c \cdot \sin \beta = r \sin b \cdot \sin \gamma \quad ,$$

woraus

$$\frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

folgt. Da für a und α dieselbe Beziehung gelten muß, so erhält man den Satz

$$3) \qquad \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} = M \quad ,$$

den Sinussatz der sphärischen Trigonometrie. Die Konstante M heißt der Modul des sphärischen Dreiecks. Im Falle $\gamma = 90^0$ ergibt sich daraus für ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck mit der Hypotenuse c:

$$4) \qquad \sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c} \quad , \qquad \sin \beta = \frac{\sin b}{\sin c} \quad ,$$

wodurch die Winkel zweideutig bestimmt sind. Eine eindeutige Bestimmung gibt auch hier der Cosinussatz. Setzt man in

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

nach 2)

$$\cos \alpha = \frac{\cos c}{\cos b} \quad ,$$

so erhält man nach einfacher goniometrischer Umformung

$$5) \qquad \cos \alpha = \frac{\tan b}{\tan c} \quad ,$$

und entsprechend

$$\cos \beta = \frac{\tan a}{\tan c} \quad .$$

2. Der Cosinussatz drückt die Cosinus der Winkel eines sphärischen Dreiecks algebraisch durch die Seiten aus. Zur numerischen Berechnung wird er meist nur angewendet, wenn man einen Winkel bestimmen will. Das ist namentlich bequem, wenn Seiten und Winkel nur bis auf Minuten genau gegeben sind oder berechnet werden sollen, was bei praktischen Anwendungen der sphärischen Trigonometrie meist ausreicht. Besonders erleichtert wird die Rechnung, wenn man in den vierstelligen Tafeln, die dann benutzt werden können, auch eine Tabelle der sogenannten natürlichen Zahlen der trigonometrischen Funktionen zur Verfügung hat, wie in den vierstelligen Tafeln von Dr. F. G. Gauss, Halle a. S., 1900. Diese Tafeln haben auch noch den Vorteil, Interpolationen fast völlig überflüssig zu machen.

Beispiel 1:

$$a = 109^0 39', \quad b = 38^0 28', \quad c = 128^0 19'$$

$$\cos \gamma = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}, \quad \gamma = 180^0 - 52^0 29' = 127^0 31'$$

$\log(-\cos a) = 9{,}5267$	
$\log \sin a = 9{,}9739$	
$\log \cos b = 9{,}8937$	
$\log \sin b = 9{,}7938$	$\cos c = -0{,}6200$
$\log(-\cos a \cos b) = 9{,}4204$,	$-\cos a \cos b = 0{,}2633$
$\log(\cos a \cos b - \cos c) = 9{,}5523$	$\cos c - \cos a \cos b = -0{,}3567$
$\log \sin a \sin b = 9{,}7677$	
$\log(-\cos \gamma) = 9{,}7846$	

Die numerische Berechnung aller drei Winkel ist auch mit Benutzung dieser Tafeln meistens, wenn nicht alle Seiten spitz sind, wegen der Rücksicht auf die Vorzeichen der Cosinus, nicht zu empfehlen. Man kann durch folgende goniometrische Umformungen bequemere Formeln erhalten.

Es ist

$$1 + \cos\gamma = \frac{\sin a \sin b + \cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} = \frac{\cos c - \cos(a+b)}{\sin a \sin b}$$

$$= \frac{2 \sin \tfrac{1}{2}(a+b+c) \sin \tfrac{1}{2}(a+b-c)}{\sin a \sin b} ,$$

$$1 - \cos\gamma = \frac{\sin a \sin b - \cos c + \cos a \cos b}{\sin a \sin b} = \frac{\cos(a-b) - \cos c}{\sin a \sin b}$$

$$= \frac{2 \sin \tfrac{1}{2}(a-b+c) \sin \tfrac{1}{2}(c-a+b)}{\sin a \sin b} .$$

Nun ist

$$\sqrt{\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma}} = \tan \tfrac{1}{2}\gamma$$

und benutzt man die Abkürzung $a + b + c = 2s$, so erhält man

$$\tan \tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s \sin(s-c)}} ,$$

wobei die Quadratwurzel positiv zu nehmen ist. Durch Buchstabenvertauschung erhält man die entsprechenden Formeln für $\tan \frac{1}{2}\alpha$, $\tan \frac{1}{2}\beta$. Setzt man noch

$$\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}} = R ,$$

so lassen sich die drei Formeln darstellen in der Form:

6) $$\tan \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{R}{\sin(s-a)} , \quad \tan \tfrac{1}{2}\beta = \frac{R}{\sin(s-b)} , \quad \tan \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{R}{\sin(s-c)} .$$

Diese Formeln eignen sich gut zur numerischen Berechnung der drei Winkel auch bei Benutzung von fünf- oder mehrstelligen Tafeln. Es empfiehlt sich, die halben Winkel womöglich mit größerer Genauigkeit zu bestimmen, um die letzte Ziffer bei den ganzen Winkeln sicherer zu erhalten. Mit Benutzung vierstelliger Tafeln würde sich die Rechnung mit den Seiten in Beispiel 1 folgendermaßen gestalten:

Beispiel 2:

$$\begin{array}{lll} a = 109^\circ 39' & 2s = 276^\circ 26' & s - a = 28^\circ 34' \\ b = 38^\circ 28' & s = 138^\circ 13' & s - b = 99^\circ 45' \\ c = 128^\circ 19' & & s - c = 9^\circ 54' \end{array}$$

$$R = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}} ,$$

$$\tan \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{R}{\sin(s-a)} , \quad \tfrac{1}{2}\alpha = 36^\circ\ 6' , \quad \alpha = 72^\circ 12'$$

$$\tan \tfrac{1}{2}\beta = \frac{R}{\sin(s-b)} , \quad \tfrac{1}{2}\beta = 19^\circ 29' , \quad \beta = 38^\circ 58'$$

$$\tan \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{R}{\sin(s-c)} , \quad \tfrac{1}{2}\gamma = 63^\circ 45{,}7' , \quad \gamma = 127^\circ 31'$$

$\log \sin(s-a) = 9{,}6796$
$\log \sin(s-b) = 9{,}9937$
$\log \sin(s-c) = 9{,}2353$
$8{,}9086$
$\log \sin s = 9{,}8237$
$\log R^2 = 9{,}0849$
$\log R = 9{,}5425$
$\log \tan \frac{1}{2}\alpha = 9{,}8629$
$\log \tan \frac{1}{2}\beta = 9{,}5488$
$\log \tan \frac{1}{2}\gamma = 0{,}3072$

$\alpha + \beta + \gamma = 238^\circ 41'$
sphärischer Exzeß $\varepsilon = 58^\circ 41'$

Da $(1 + \cos\gamma)(1 - \cos\gamma) = \sin^2\gamma$ ist, so würde man, wenn

$$\sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)} = S$$

gesetzt wird, erhalten

$$7) \qquad \sin\gamma = \frac{2}{\sin a \sin b} \cdot S \ ,$$

entsprechend

$$\sin\alpha = \frac{2}{\sin b \sin c} \cdot S, \quad \sin\beta = \frac{2}{\sin a \sin c} \cdot S \ .$$

S heißt der Eckensinus. Die numerische Berechnung der Winkel durch diese Formeln würde im allgemeinen nicht zu empfehlen sein, da die Winkel durch ihren Sinus zweideutig bestimmt sind.

Man kann auch $\sin\gamma$ aus dem Cosinussatz bestimmen, denn es ist

$$\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = \frac{\sin^2 a \sin^2 b - (\cos c - \cos a \cos b)^2}{\sin^2 a \sin^2 b} \ .$$

Drückt man im Zähler dieses Bruches $\sin^2 a$ und $\sin^2 b$ durch $\cos^2 a$ und $\cos^2 b$ aus, so erhält man

$$8) \qquad \sin\gamma = \frac{1}{\sin a \sin b} \sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c} \ .$$

Durch Vergleichung mit 7) ergibt sich also

$$S = \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}$$

oder

$$4 \sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)$$
$$= 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c \ .$$

Legt man durch die Kante OA einer Ecke (Fig. 274) die Normalebene zur gegenüberliegenden Ebene der Ecke, so schneidet sie das zugeordnete sphärische Dreieck in dem Bogen $AA' = h_a$ eines größten Kreises, den man eine sphärische Höhe des sphärischen Dreiecks nennt. Dieser Bogen h_a wird gemessen durch den Winkel AOA', den Neigungswinkel der Kante OA zur gegenüberliegenden Ebene. Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck $AA'C$ ergibt sich nach Nr. 1, 4)

$$\sin\gamma = \frac{\sin h_a}{\sin b} \ ,$$

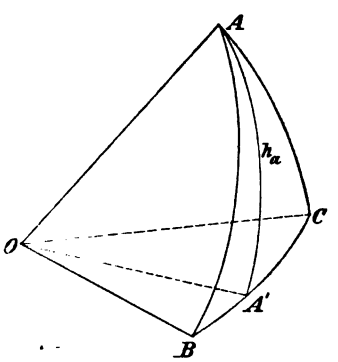


Fig. 274.

also

$$9) \qquad \sin h_a = \sin b \sin\gamma = \frac{2}{\sin a} \cdot S$$

und entsprechend

$$\sin h_b = \frac{2}{\sin b} \cdot S, \quad \sin h_c = \frac{2}{\sin c} \cdot S \quad .$$

3. Sind von einer Ecke die drei Winkel α, β, γ gegeben, so sind durch sie die Seiten der Polarecke $180^0 - \alpha$, $180^0 - \beta$, $180^0 - \gamma$ bestimmt und deren Winkel $180^0 - a$, $180^0 - b$, $180^0 - c$ sind durch den Cosinussatz zu berechnen. Man erhält

$$\cos(180^0 - c) = \frac{\cos(180^0 - \gamma) - \cos(180^0 - \alpha)\cos(180^0 - \beta)}{\sin(180^0 - \alpha)\sin(180^0 - \beta)}$$

oder

$$10) \qquad \cos c = \frac{\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

und entsprechend $\cos a$, $\cos b$. Dieser Satz ist also der Cosinussatz der Polarecke oder der Cosinussatz für die Seiten des sphärischen Dreiecks. In Bezug auf seine Anwendung gilt dasselbe wie in Nr. 2 für den Cosinussatz. Man kann auch zu bequemerer numerischer Rechnung die analoge Umformung vornehmen. Es ergibt sich nämlich:

$$1 + \cos c = \frac{\sin\alpha\sin\beta + \cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$= \frac{2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha + \beta)}{\sin\alpha\sin\beta} \quad ,$$

$$1 - \cos c = \frac{\sin\alpha\sin\beta - \cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} = -\frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$= -\frac{2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma)}{\sin\alpha\sin\beta} \quad .$$

Setzt man $\alpha + \beta + \gamma = 2\sigma$, so ergeben diese beiden Gleichungen die Formel

$$\cot\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{\cos(\sigma - \alpha)\cos(\sigma - \beta)}{-\cos\sigma\cos(\sigma - \gamma)}}$$

und entsprechend $\cot\frac{1}{2}a$, $\cot\frac{1}{2}b$. Setzt man noch

$$\sqrt{\frac{\cos(\sigma - \alpha)\cos(\sigma - \beta)\cos(\sigma - \gamma)}{-\cos\sigma}} = P \quad ,$$

so erhält man die drei Formeln abgekürzt:

$$11) \qquad \cot\tfrac{1}{2}a = \frac{P}{\cos(\sigma - \alpha)}, \quad \cot\tfrac{1}{2}b = \frac{P}{\cos(\sigma - \beta)}, \quad \cot\tfrac{1}{2}c = \frac{P}{\cos(\sigma - \gamma)} \quad .$$

Wegen $\sigma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) > 90^0$ ist $-\cos\sigma$ immer positiv.

Berechnet man, wie in Nr. 2, die Sinus der Seiten, so erhält man

$$12) \quad \sin a = \frac{2}{\sin\beta\sin\gamma} \cdot \Sigma, \quad \sin b = \frac{2}{\sin\alpha\sin\gamma} \cdot \Sigma, \quad \sin c = \frac{2}{\sin\alpha\sin\beta} \cdot \Sigma \quad ,$$

wobei

$$\Sigma = \sqrt{-\cos\sigma\cos(\sigma - \alpha)\cos(\sigma - \beta)\cos(\sigma - \gamma)}$$

der Polareckensinus ist. In der Tat geht der Eckensinus S in Σ über, wenn man a, b, c mit $180^0 - a$, $180^0 - \beta$, $180^0 - \gamma$ vertauscht. Außerdem hat man die Beziehung:

$$S = M \cdot \Sigma \quad ,$$

worin M der Modul des sphärischen Dreiecks (Nr. 1 3)) ist.

4. Kennt man von einem sphärischen Dreieck zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel: a, b, γ, so erhält man aus dem Cosinussatz auf γ angewendet:

$$13) \qquad \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \sin\gamma \quad ,$$

wodurch die dritte Seite c bestimmt ist. Damit kennt man die drei Seiten und kann dann, wenn nötig, die Winkel durch den Cosinussatz oder durch die Formeln 6) bestimmen. Für numerische Rechnung ist die Formel 13) unter der in Nr. 2 angeführten Voraussetzung brauchbar.

Beispiel:

$$a = 141^0\,46', \quad b = 114^0\,2', \quad \gamma = 119^0\,22'$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma, \quad c = 87^0\,33'$$

$$\begin{aligned} \log(-\cos a) &= 9{,}8951 \\ \log \sin a &= 9{,}7916 \\ \log(-\cos b) &= 9{,}6099 \\ \log \sin b &= 9{,}9606 \\ \log(-\cos\gamma) &= 9{,}6905 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \cos a \cos b &= 9{,}5050 & \cos a \cos b &= 0{,}3199 \\ \log(-\sin a \sin b \cos\gamma) &= 9{,}4427 & \sin a \sin b \cos\gamma &= -0{,}2772 \\ & & \cos c &= 0{,}0427 \end{aligned}$$

Sind von einem sphärischen Dreieck eine Seite und die beiden anliegenden Winkel: c, α, β gegeben, so gibt der Cosinussatz für die Seiten angewendet auf c

$$14) \qquad \cos\gamma = -\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \cos c \quad ,$$

wodurch der dritte Winkel γ bestimmt ist. Aus den drei Winkeln kann man dann die Seiten finden.

Die Anwendung der Formeln 13) und 14) für numerische Rechnung wird durch die Berücksichtigung der Vorzeichen der Cosinus unbequem. Sind in den beiden Aufgaben sämtliche Stücke zu berechnen, so bedient man sich besser andrer Formeln, die folgendermaßen abgeleitet werden können.

Aus den Formeln in Nr. 2 für $1 + \cos\gamma$ und $1 - \cos\gamma$ kann man, wenn man die Beziehung

$$1 + \cos\gamma = 2\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma, \quad 1 - \cos\gamma = 2\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma$$

benutzt und für alle drei Winkel anwendet, zunächst die sechs Formeln finden:

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}, \qquad \sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin a \sin c}}, \qquad \sin\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a \sin c}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}}; \qquad \sin\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a \sin b}},$$

aus denen sich die Beziehungen ableiten lassen:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\gamma}=\frac{\sin s}{\sin c},\qquad \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\gamma}=\frac{\sin(s-c)}{\sin c};$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\beta}=\frac{\sin(s-b)}{\sin c},\qquad \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}\gamma}=\frac{\sin(s-a)}{\sin c},$$

und aus diesen wieder:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\mp\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\gamma}=\frac{\sin s\mp\sin(s-c)}{\sin c},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\pm\cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\gamma}=\frac{\sin(s-b)\pm\sin(s-a)}{\sin c}.$$

Trennt man die Zeichen im Zähler der Brüche linker Hand, so erhält man mit Berücksichtigung der Bedeutung von s die vier Formeln

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma}=\frac{2\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}c}{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}c}{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}\gamma}=\frac{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(a-b)}{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}\gamma}=\frac{2\cos\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}(a-b)}{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c},$$

die gewöhnlich in der Form geschrieben werden:

15)
$$\begin{cases}\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}\gamma,\\ \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}\gamma,\\ \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}c=\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}\gamma,\\ \sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}c=\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}\gamma.\end{cases}$$

Sie heißen die Gausschen (Delambreschen) Gleichungen und entsprechen den Formeln von Mollweide für das ebene Dreieck (*Trigonometrie* § 8 Nr. 5). Eliminiert man aus ihnen durch geeignete Division je zweier entweder c oder γ, so erhält man die Neperschen Analogien, die entsprechend dem Tangentensatz (*Trigonometrie* § 8 Nr. 5) sind:

16)
$$\begin{cases}\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}\gamma,\\ \tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}\gamma,\\ \tan\frac{1}{2}(a+b)=\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\tan\frac{1}{2}c,\\ \tan\frac{1}{2}(a-b)=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\tan\frac{1}{2}c.\end{cases}$$

Das Beispiel zu der Aufgabe: gegeben a, b, γ, würde sich hiernach dadurch erledigen lassen, daß man zunächst aus den beiden ersten Neperschen

Analogien $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ und $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ und dann aus einer der beiden letzten oder aus einer der Gausschen Gleichungen $\frac{1}{2}c$ bestimmt.

Beispiel (Nr. 4):

$$a = 141^0\,46',\quad b = 114^0\,2',\quad \gamma = 119^0\,22'\ ;$$
$$\tfrac{1}{2}(a+b) = 127^0\,54',\quad \tfrac{1}{2}(a-b) = 13^0\,52',\quad \tfrac{1}{2}\gamma = 59^0\,41'$$

$$\tan\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}\gamma,\quad \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=180^0-42^0\,45'=137^0\,15'\Big\}\ \alpha=147^0\,19'$$

$$\tan\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}\gamma,\qquad \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=10^0\,4'\Big\}\ \beta=127^0\,11'$$

$$\cos\tfrac{1}{2}c=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\cos\tfrac{1}{2}\gamma,\qquad \tfrac{1}{2}c=43^0\,46',\ c=87^0\,32'$$

$\log\cos\frac{1}{2}(a-b) = 9{,}9872$	$\log\sin\frac{1}{2}(a-b) = 9{,}3796$
$\log[-\cos\frac{1}{2}(a+b)] = 9{,}7884$	$\log\sin\frac{1}{2}(a+b) = 9{,}8971$
$0{,}1988$	$9{,}4825$
$\log\cot\frac{1}{2}\gamma = 9{,}7670$	$\log\cot\frac{1}{2}\gamma = 9{,}7670$
$\log[-\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)] = 9{,}9658$	$\log\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = 9{,}2495$
$\log\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = 9{,}8317$	
$0{,}1555$	
$\log\cos\frac{1}{2}\gamma = 9{,}7031$	
$\log\cos\frac{1}{2}c = 9{,}8586$	

In ganz analoger Weise kann durch die Formeln 15) und 16), die in geeigneter Weise auszuwählen sind, die Aufgabe gelöst werden: wenn c, α, β gegeben sind, die fehlenden Stücke zu berechnen.

5. Die beiden Aufgaben von einem sphärischen Dreieck sind gegeben: entweder zwei Seiten und der einer Seite gegenüberliegende Winkel oder eine Seite, der gegenüberliegende und ein anliegender Winkel erfordern eine Determination.

Kennt man a, b, α, so gibt zunächst der Sinussatz (Nr. 1, 3)):

$$\sin\beta = \frac{\sin a}{\sin\alpha}\sin b\quad .$$

Die Aufgabe ist also unlösbar, sobald $\sin a < \sin b\sin\alpha$ ist. Wird $\sin a = \sin b\sin\alpha$, so ist das sphärische Dreieck rechtwinklig mit $\beta = 90^0$. Ist $\sin a > \sin b\sin\alpha$, so kann die Aufgabe zweideutig sein; ist indessen $\sin a \geq \sin b$, so ist zu bedenken, daß der größern Seite der größere Winkel gegenüberliegen muß: die Aufgabe ist also eindeutig. Ist aber $\sin a > \sin b\sin\alpha$ und zugleich $\sin a < \sin b$, so gibt es im allgemeinen zwei Dreiecke.

Hat man β bestimmt, so liefern zwei Seiten der Nepersche Analogien $\cot\frac{1}{2}\gamma$ und $\tan\frac{1}{2}c$.

Wendet man auf den gegebenen Winkel α den Cosinussatz an, so ist c zu bestimmen aus der goniometrischen Gleichung

$$\cos b\cos c + \sin b\cos\alpha\sin c = \cos a\quad ,$$

die entweder auf eine quadratische Gleichung für $\sin c$ führt, woraus ebenfalls die Notwendigkeit einer Determination einleuchtet — oder die durch Einführung eines Hilfswinkels (*Trigonometrie* § 14 Nr. 4) gelöst werden kann.

Beispiel 1:

$a = 72^0 42'$, $b = 117^0 36'$, $\alpha = 38^0 14'$; $\frac{1}{2}(b+a) = 95^0 9'$, $\frac{1}{2}(b-a) = 22^0 27'$

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{\sin a}\sin b,\ \beta = 180^0 - 35^0 4' = 144^0 56';\ \tfrac{1}{2}(\beta+\alpha) = 91^0 35',\ \tfrac{1}{2}(\beta-\alpha) = 53^0 21'$$

$\log\sin\alpha = 9{,}7916$	Hier ist $\sin a > \sin b$ und da $b > a$, so muß $\beta > \alpha$ sein, daher kann der zu $\log\sin\beta$ gehörige spitze Winkel nicht gebraucht werden. Die Aufgabe ist eindeutig.
$\log\sin a = 9{,}9799$	
$9{,}8117$	
$\log\sin b = 9{,}9475$	
$\log\sin\beta = 9{,}7592$	

$$\cot\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\sin\frac{1}{2}(b+a)}{\sin\frac{1}{2}(b-a)}\tan\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha),\quad \tfrac{1}{2}\gamma = 15^0 55{,}4',\quad \gamma = 31^0 51'$$

$$\tan\tfrac{1}{2}c = \frac{\sin\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}\tan\tfrac{1}{2}(b-a),\quad \tfrac{1}{2}c = 27^0 14{,}7',\quad c = 54^0 29'$$

$\log\sin\frac{1}{2}(b+a) = 9{,}9982$	$\log\sin\frac{1}{2}(\beta+\alpha) = 9{,}9998$
$\log\sin\frac{1}{2}(b-a) = 9{,}5819$	$\log\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha) = 9{,}9043$
$0{,}4163$	$0{,}0955$
$\log\tan\frac{1}{2}(\beta-\alpha) = 0{,}1284$	$\log\tan\frac{1}{2}(b-a) = 9{,}6162$
$\log\cot\frac{1}{2}\gamma = 0{,}5447$	$\log\tan\frac{1}{2}c = 9{,}7117$

Beispiel 2:

$a = 43^0 50'$, $b = 75^0 45'$, $\alpha = 23^0 59'$;

$\frac{1}{2}(b+a) = 59^0 47{,}5'$, $\frac{1}{2}(b-a) = 15^0 47{,}5'$

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{\sin a}\sin b,\ \beta_1 = 34^0 40',\ \beta_2 = 145^0 20'$$

$\frac{1}{2}(\beta_1+\alpha) = 29^0 19{,}5'$, $\frac{1}{2}(\beta_1-\alpha) = 5^0 20{,}5'$

$\frac{1}{2}(\beta_2+\alpha) = 84^0 39{,}5'$, $\frac{1}{2}(\beta_2-\alpha) = 60^0 40{,}5'$

$\log\sin\alpha = 9{,}6090$	Der zu $\log\sin\beta$ gehörige spitze Winkel ist größer als α; da $a < b$ ist, so ist sowohl der spitze Winkel als sein Supplement zu gebrauchen. Die Aufgabe ist zweideutig.
$\log\sin a = 9{,}8405$	
$9{,}7685$	
$\log\sin b = 9{,}9864$	
$\log\sin\beta = 9{,}7549$	

$$\cot\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\sin\frac{1}{2}(b+a)}{\sin\frac{1}{2}(b-a)}\tan\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha),\quad \tfrac{1}{2}\gamma_1 = 73^0 37',\quad \tfrac{1}{2}\gamma_2 = 10^0 8'$$

$$\gamma_1 = 147^0 14',\quad \gamma_2 = 20^0 16'$$

$$\tan\tfrac{1}{2}c = \frac{\sin\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}\tan\tfrac{1}{2}(b-a),\quad \tfrac{1}{2}c_1 = 56^0 23{,}3',\quad \tfrac{1}{2}c_2 = 18^0 5'$$

$$c_1 = 112^0 47',\quad c_2 = 36^0 10'$$

$\log\sin\frac{1}{2}(b+a) = 9{,}9367$	$\log\sin\frac{1}{2}(\beta_1+\alpha) = 9{,}6900$
$\log\sin\frac{1}{2}(b-a) = 9{,}4393$	$\log\sin\frac{1}{2}(\beta_1-\alpha) = 8{,}9689$
$0{,}4974$	$0{,}7211$
$\log\tan\frac{1}{2}(\beta_1-\alpha) = 8{,}9708$	$\log\sin\frac{1}{2}(\beta_2+\alpha) = 9{,}9981$
$\log\tan\frac{1}{2}(\beta_2-\alpha) = 0{,}2505$	$\log\sin\frac{1}{2}(\beta_2-\alpha) = 9{,}9405$
$\log\cot\frac{1}{2}\gamma_1 = 9{,}4682$	$0{,}0576$
$\log\cot\frac{1}{2}\gamma_2 = 0{,}7479$	$\log\tan\frac{1}{2}(b-a) = 9{,}4563$
	$\log\tan\frac{1}{2}c_1 = 0{,}1774$
	$\log\tan\frac{1}{2}c_2 = 9{,}5139$

Da in diesem Beispiel a, b, α spitz sind, so kann man c aus der goniometrischen Gleichung mit positiven Koeffizienten:

$$\cos b \cos c + \sin b \cos\alpha \sin c = \cos a$$

berechnen. Man dividiert die Gleichung durch $\cos b$ und bestimmt einen spitzen Hilfswinkel λ so, daß

$$\tan\lambda = \tan b \cos\alpha$$

wird: dann nimmt die Gleichung die Gestalt an:

$$\cos(c - \lambda) = \frac{\cos a}{\cos b} \cos\lambda \quad .$$

Die Zweideutigkeit ergibt sich daraus, daß $c - \lambda$ positiv oder negativ genommen werden kann. Die Rechnung würde sich auf folgende Weise für das obige Beispiel gestalten:

$$\tan\lambda = \tan b \cos\alpha\,, \quad \lambda = 74^0\,18'$$

$$\cos(c - \lambda) = \frac{\cos a}{\cos b}\cos\lambda\,, \quad c_1 - \lambda = \lambda - c_2 = 38^0\,17'; \quad c_1 = 112^0\,45', \quad c_2 = 36^0\,11'$$

$$\begin{aligned} \log\tan b &= 0{,}5952 \\ \log\cos\alpha &= 9{,}9608 \\ \log\tan\lambda &= 0{,}5560 \\ \log\cos\lambda &= 9{,}4278 \\ \log\cos a &= 9{,}8582 \\ &\quad 9{,}2860 \\ \log\cos b &= 9{,}3912 \\ \log\cos(c - \lambda) &= 9{,}8948 \end{aligned}$$

6. Eine für das sphärische Dreieck sehr wichtige Größe ist der sphärische Exzeß (vgl. § 9 Nr. 3)

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^0 \quad ,$$

der ohne weiteres bekannt ist, wenn die Winkel gegeben sind. Sind nur zwei Winkel gegeben, so wird man den dritten Winkel zunächst berechnen. Er kann aber auch direkt gefunden werden, wenn die drei Seiten oder zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind. Aus

$$\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^0 - \tfrac{1}{2}(\gamma - \varepsilon)$$

folgt

$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = \sin\tfrac{1}{2}(\gamma - \varepsilon)\,, \quad \sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = \cos\tfrac{1}{2}(\gamma - \varepsilon) \quad :$$

setzt man diese Werte in die Gaussschen Gleichungen 15) in Nr. 4), die diese Funktionen enthalten, ein, so ergibt sich

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\gamma - \varepsilon)}{\sin\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a + b)}{\cos\frac{1}{2}c}\,, \quad \frac{\cos\frac{1}{2}(\gamma - \varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a - b)}{\cos\frac{1}{2}c}\,,$$

woraus man durch korrespondierende Subtraktion und Addition erhält:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma - \sin\frac{1}{2}(\gamma - \varepsilon)}{\sin\frac{1}{2}\gamma + \sin\frac{1}{2}(\gamma - \varepsilon)} = \frac{\cos\frac{1}{2}c - \cos\frac{1}{2}(a + b)}{\cos\frac{1}{2}c + \cos\frac{1}{2}(a + b)}\,,$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\gamma - \varepsilon) - \cos\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}(\gamma - \varepsilon) + \cos\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a - b) - \cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(a - b) + \cos\frac{1}{2}c}\,,$$

oder, mit Benutzung der Abkürzung $a + b + c = 2s$:

$$\frac{\sin\frac{1}{4}\varepsilon\cos(\frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{4}\varepsilon)}{\cos\frac{1}{4}\varepsilon\sin(\frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{4}\varepsilon)} = \frac{\sin\frac{1}{2}s\sin\frac{1}{2}(s-c)}{\cos\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}(s-c)} ,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{4}\varepsilon\sin(\frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{4}\varepsilon)}{\cos\frac{1}{4}\varepsilon\cos(\frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{4}\varepsilon)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(s-a)\sin\frac{1}{2}(s-b)}{\cos\frac{1}{2}(s-a)\cos\frac{1}{2}(s-b)} .$$

Die Multiplikation dieser beiden Gleichungen ergibt, wenn man zugleich die Quadratwurzel zieht, die L'Huilliersche Formel:

17) $$\tan\frac{1}{4}\varepsilon = \sqrt{\tan\frac{1}{2}s\tan\frac{1}{2}(s-a)\tan\frac{1}{2}(s-b)\tan\frac{1}{2}(s-c)} .$$

Die Wurzel ist positiv zu nehmen, da wegen $\varepsilon < 360^0$ (§ 9 Nr. 3, Satz 6)) $\frac{1}{4}\varepsilon < 90^0$ sein muß.

Für das Beispiel 2 in Nr. 2, S. 530 ist:

$\frac{1}{2}s = 69^0\,6{,}5'$, $\frac{1}{2}(s-a) = 14^0\,17'$, $\frac{1}{2}(s-b) = 49^0\,52{,}5'$, $\frac{1}{2}(s-c) = 4^0\,57'$

$\tan\frac{1}{4}\varepsilon = \sqrt{\tan\frac{1}{2}s\tan\frac{1}{2}(s-a)\tan\frac{1}{2}(s-b)\tan\frac{1}{2}(s-c)}$, $\frac{1}{4}\varepsilon = 14^0\,40{,}3'$, $\varepsilon = 58^0\,41'$

$$\begin{aligned}
\log\tan\tfrac{1}{2}s &= 0{,}4183\\
\log\tan\tfrac{1}{2}(s-a) &= 9{,}4058\\
\log\tan\tfrac{1}{2}(s-b) &= 0{,}0743\\
\log\tan\tfrac{1}{2}(s-c) &= 8{,}9376\\
&\quad\;\overline{8{,}8360}\\
\log\tan\tfrac{1}{4}\varepsilon &= 9{,}4180
\end{aligned}$$

Da ferner

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) - 90^0$$

ist, so hat man

$$\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon = -\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) = \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}\gamma - \cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}\gamma ,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon = \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) = \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}\gamma + \cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}\gamma .$$

Setzt man die aus den Gaussschen Gleichungen sich ergebenden Werte

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}\cos\tfrac{1}{2}\gamma , \quad \cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}\sin\tfrac{1}{2}\gamma$$

in diese Formeln ein, so nehmen sie die Gestalt an:

$$\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b) - \cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}\sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c}\sin\gamma ,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos^2\frac{1}{2}\gamma + \cos\frac{1}{2}(a+b)\sin^2\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}c} .$$

Setzt man in der letzten

$$\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma = \tfrac{1}{2}(1+\cos\gamma) , \quad \sin^2\tfrac{1}{2}\gamma = \tfrac{1}{2}(1-\cos\gamma) ,$$

so verwandelt sie sich in:

$$\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\frac{1}{2}[\cos\frac{1}{2}(a-b) + \cos\frac{1}{2}(a+b)] + \frac{1}{2}[\cos\frac{1}{2}(a-b) - \cos\frac{1}{2}(a+b)]\cos\gamma}{\cos\frac{1}{2}c}$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b + \sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\gamma}{\cos\frac{1}{2}c} .$$

Dividiert man nun die beiden Werte für $\sin\frac{1}{2}\varepsilon$ und $\cos\frac{1}{2}\varepsilon$ durcheinander und Zähler und Nenner des entstehenden Bruchs durch $\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b$, so ergibt sich die Formel

$$18) \qquad \tan\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\tan\frac{1}{2}a\tan\frac{1}{2}b\sin\gamma}{1+\tan\frac{1}{2}a\tan\frac{1}{2}b\cos\gamma} \quad ,$$

durch die der sphärische Exzeß direkt aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel berechnet werden kann. Man kann sie auch schreiben:

$$\cot\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b}{\sin\gamma} + \cot\gamma \quad .$$

Für ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck mit $\gamma = 90^0$ erhält man aus 18):

$$19) \qquad \tan\tfrac{1}{2}\varepsilon = \tan\tfrac{1}{2}a\tan\tfrac{1}{2}b \quad .$$

Das Beispiel in Nr. 4 auf S. 533 und 535 würde ergeben:

$a = 141^0\,46'$, $b = 114^0\,2'$, $\gamma = 119^0\,22'$; $\frac{1}{2}a = 70^0\,53'$, $\frac{1}{2}b = 57^0\,1'$

$\cot\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b}{\sin\gamma} + \cot\gamma$, $\frac{1}{2}\varepsilon = 180^0 - 73^0\,4' = 106^0\,56'$, $\varepsilon = 213^0\,52'$

$\log\cot\frac{1}{2}a =$	9,5398
$\log\cot\frac{1}{2}b =$	9,8122
	9,3520
$\log\sin\gamma =$	9,9403
	9,4117

$\cot\gamma = -0{,}5627$

$\frac{\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b}{\sin\gamma} = 0{,}2581$

$\cot\frac{1}{2}\varepsilon = -0{,}3046$

§ 13. Mehrseitige Ecken.

1. Gehen von einem Punkte O aus, n Gerade OA, OB, OC, ... und legt man durch je zwei benachbarte Gerade eine Ebene, die man durch die Geraden begrenzt annimmt, so entsteht eine n-seitige Ecke $OABC\ldots$ Sie hat analog der dreiseitigen n Seiten und n Winkel. Zu ihr kann die ihr symmetrische Gegenecke und die Polarecke konstruiert werden. Man kann sich auch hier auf die Betrachtung hohler Ecken beschränken, deren Seiten und Winkel kleiner als 180^0 sind. Schneidet man die Ecke durch eine Ebene, die sämtliche Ebenen der Ecken schneidet, so erhält man als Schnittfigur ein n-Eck $ABCD\ldots$ und auf den Ebenen der Ecke die n Dreiecke AOB, BOC, COD, ... Nun ist die Summe der n Seiten der Ecke und der $2n$ Winkel, die mit ihnen in den Dreiecken liegen, gleich $n \cdot 180^0$; die Summe der $2n$ Dreieckswinkel aber ist größer als die der Winkel des n-Ecks, weil jeder Winkel des n-Ecks mit den beiden anliegenden Dreieckswinkeln die Seiten einer Ecke bilden und die Summe zweier Seiten einer Ecke größer ist als die dritte. Die Summe der Winkel eines n-Ecks ist aber $(n-2)\cdot 180^0$, folglich ist die Summe der Seiten der n-seitigen Ecke:

$$a + b + c + \ldots < n \cdot 180^0 - (n-2)\cdot 180^0 \quad ,$$

also

$$a + b + c + \ldots < 360^0 \quad .$$

Die Summe der Seiten einer hohlen mehrseitigen Ecke ist kleiner als vier Rechte. Wendet man diesen Satz auf die Polarecke an, die die Seiten $180^0 - a$, $180^0 - \beta$, $180^0 - \gamma$, ... hat, so ist

$$n \cdot 180^0 - (a + \beta + \gamma + \ldots) < 360^0 \quad ,$$

woraus folgt, ebensowohl

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots > (n - 2) \cdot 180^0 \quad ,$$

als

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots < n \cdot 180^0 \quad .$$

Die Summe der Winkel einer hohlen n-seitigen Ecke liegt zwischen $2n - 4$ und $2n$ Rechte.

Die Konstruktion und Berechnung einer n-seitigen Ecke muß durch geeignete Zerlegung auf die von dreiseitigen Ecken zurückgeführt werden.

2. Unter einer regelmäßigen Ecke versteht man eine solche, die gleiche Seiten und gleiche Winkel hat. Jede dreiseitige Ecke, deren drei Seiten einander gleich sind, ist also beispielsweise eine regelmäßige, dagegen kann bei mehrseitigen Ecken nicht aus der bloßen Gleichheit der Seiten auf die der Winkel oder umgekehrt geschlossen werden.

Es sei S (Fig. 275) eine regelmäßige n-seitige Ecke, und man habe die an zwei benachbarten Kanten SA, SB liegenden Flächenwinkel halbiert, so müssen die Halbierungsebenen einander in einer durch S gehenden Geraden SM schneiden. Es ist hierdurch eine dreiseitige Ecke $SABM$ entstanden, deren an SA und SB liegende Winkel als Hälften zweier nach Voraussetzung gleicher Winkel einander gleich sind. Hieraus folgt, daß auch die Seiten ASM, BSM gleich groß sein müssen. Konstruiert man nun die durch SM und die auf SB folgende Kante SC bestimmte Ebene, so sind in den beiden dreiseitigen Ecken $SABM$, $SBCM$ der Voraussetzung zufolge die Seiten ASB, BSC, ferner die Winkel an SB gleich groß, und die Seite BSM ist beiden gemeinschaftlich. Demnach muß auch der Neigungswinkel der Ebenen MSC, BSC dem von MSB, ASB gleich sein, woraus hervorgeht, daß er ebenfalls die Hälfte des Neigungswinkels von BSC und DSC ist. Nunmehr ergibt sich in gleicher Weise wie vorher, daß in der Ecke $SBCM$ die Seite MSC gleich der Seite MSB ist. Man lege nun eine neue Ebene durch SM und SD, beweise wie vorher, daß die Ecken $SCDM$ und $SBCM$ in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen und beweise daraus durch ganz entsprechende Schlußfolgerungen wie vorher, daß die Seiten MSD und MSC gleich sind. Da sich diese Beweisführung für jede etwa noch folgende durch SM und eine Kante der Ecke S gehende Ebene wiederholen läßt, so ergibt sich, daß die Gerade SM mit allen Kanten der Ecke gleiche Winkel bildet. Gleichzeitig ist gefunden worden, daß die durch SM und je eine Kante gehenden Ebenen die Winkel der Ecke halbieren, und es müssen daher auch umgekehrt die Halbierungsebenen der sämtlichen Winkel durch SM gehen. Somit hat man den Satz:

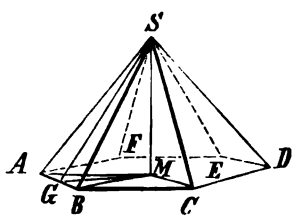


Fig. 275.

Die Halbierungsebenen der Winkel einer regelmäßigen Ecke schneiden einander sämtlich in einer durch den Scheitel der Ecke gehenden Geraden; diese Gerade bildet mit allen Kanten der Ecke gleiche Winkel. Sie heißt die Achse der Ecke.

3. Legt man durch einen beliebigen Punkt M von SM die zu SM senkrechte Ebene, welche die Kanten der Ecke in A, B, C, D, ... schneidet, so sind die Dreiecke SMA, SMB, SMC u. s. w. sämtlich kongruent, daher ist $MA = MB = MC \ldots$ und $SA = SB = SC \ldots$ Fällt man ferner von M auf irgend eine der Seiten des Vielecks $ABCD \ldots$, z. B. auf AB, die senkrechte Gerade MG, so muß MG die Seite AB halbieren und zu ihr senkrecht stehen. Zieht man noch SG, so halbiert SG den Winkel ASB und steht senkrecht auf AB. Die Ebene SGM steht senkrecht zur Kante AB und somit auch senkrecht zu der

durch diese gehenden Ebene *ASB*. Da man die gleichen Konstruktionen und Folgerungen auf jede der Ebenen der Ecke *S* anwenden und da man ferner die Folgerungen umkehren kann (weil jede Ebene, wie *SGM*, die einzige sein muß, welche die betreffenden Eigenschaften in Beziehung auf die zugehörigen Geraden und Flächen hat), so ergeben sich folgende Sätze:

Die durch die Achse und je eine der Halbierungslinien der Seiten einer regelmäßigen Ecke gehenden Ebenen stehen senkrecht zu der Ebene der zugehörigen Seite, und umgekehrt schneiden sich die auf den Flächen in den Halbierungslinien der Seiten errichteten senkrechten Ebenen in einer Geraden, nämlich in der Achse der Ecke.

Aus der Kongruenz der Dreiecke *SGM* u. s. w. folgt dann noch, daß die Achse auch mit allen Halbierungslinien der Seiten der Ecke gleiche Winkel bildet.

Dritter Abschnitt.

Die Polyeder.

§ 14. Grundformen der Polyeder.

1. Die Verbindung von vier oder mehr Ebenen miteinander führt neben Wiederholungen früher behandelter Raumgebilde auf ein neues, nämlich auf den vollständig durch Ebenen begrenzten Körper, das Polyeder.

Die Untersuchung der möglichen Lagen dreier Ebenen gegeneinander zeigte, daß sich mit ihnen kein Raumteil völlig begrenzen läßt, zugleich aber auch, daß die Hinzunahme einer vierten Ebene zu diesem Zwecke genügt, denn nimmt man auf jeder Kante einer dreiseitigen Ecke einen Punkt an (der nicht der Scheitel sein darf), so bildet die durch diese drei Punkte bestimmte Ebene mit den drei Ebenen der Ecke die Begrenzung eines Körpers.

Ein solcher von vier Ebenen begrenzter Körper heißt ein Tetraeder.

Da vier Ebenen mindestens nötig sind, um einen Körper zu begrenzen, so ist, was die Anzahl der begrenzenden Ebenen betrifft, das Tetraeder das einfachste Polyeder.

Im allgemeinen kann man sich ein Polyeder von einer beliebigen Anzahl von Ebenen begrenzt denken. Diese Ebenen werden als durch ihre gegenseitigen Schnittlinien selbst begrenzt angenommen und haben also die Gestalt ebener Vielecke. Die Seiten dieser Vielecke, also die Schnittlinien von je zwei Begrenzungsebenen sind die Kanten des Polyeders. Wenn drei oder mehr Begrenzungsebenen einen Punkt gemeinsam haben, also auch drei oder mehr Kanten zusammenstoßen, entsteht eine drei- oder mehrseitige Ecke des Polyeders. Die Seiten dieser Ecken sind die Winkel, die die aneinanderstoßenden Kanten des Polyeders miteinander bilden und ihre Winkel sind die Neigungswinkel anstoßender Begrenzungsebenen des Polyeders.

So ist z. B. das Tetraeder von vier ebenen Dreiecken begrenzt; es hat sechs Kanten und vier dreiseitige Ecken.

2. Ein in seinen metrischen Eigenschaften einfacheres Polyeder als das Tetraeder entsteht aus dem Dreikant und dem Vielkant.

Man kann den in § 7 d) gewonnenen Begriff des Dreikants erweitern, wenn man sich eine beliebige Anzahl von Parallelen im Raum denkt und durch je zwei benachbarte eine Ebene legt, die durch die Geraden selbst begrenzt wird. Das dadurch entstehende Raumgebilde ist ein Vielkant. Schneidet man ein n-Kant durch eine Ebene, die sämtliche Kanten trifft, so ist die Schnittfigur ein

n-Eck. In Fig. 276 wird das Vierkant durch eine beliebige Ebene in dem Viereck $ABCD$ geschnitten. Schneidet man das Vierkant noch durch eine der ersten Ebene parallele Ebene, so entsteht als Schnittfigur das Viereck $A'B'C'D'$. Da eine Ebene durch parallele Ebenen in Parallelen geschnitten wird (§ 5 Satz 2)), und Parallelen zwischen Parallelen gleich sind, so ist $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, ... und da Winkel mit parallelen gleichgerichteten Schenkeln gleich sind (§ 5 Satz 5)), so sind die Vierecke kongruent und die auf den Kanten des Vierkants liegenden Abschnitte einander gleich. Da die entsprechenden Ecken der kongruenten Vierecke auf Parallelen liegen, so sind sie affin (*Planimetrie* § 31 Nr. 2). Diese Betrachtung gilt ohne weiteres für ein n-Kant. Die Ebenen des n-Kants und die beiden parallelen Schnittebenen begrenzen ein Polyeder, ein n-seitiges Prisma.

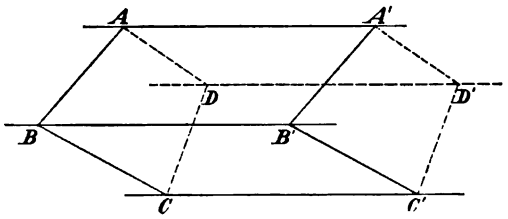


Fig. 276.

Ein n-seitiges Prisma ist begrenzt von zwei kongruenten n-Ecken und n Parallelogrammen. Die n-Ecke bilden die Endflächen oder Grund- und Endfläche, die Parallelogramme sind die Seitenflächen des Prismas. Das Prisma hat $3n$ Kanten, nämlich n Grundkanten, n Endkanten und n Seitenkanten. Jede Grundkante ist gleich der ihr parallelen Endkante und die Seitenkanten sind sämtlich gleich groß. Das n-seitige Prisma hat $2n$ dreiseitige Ecken.

3. Eine allgemeinere Form der Polyeder als das Tetraeder erhält man aus der mehrseitigen Ecke (§ 13).

Denkt man sich beliebig viele unbegrenzte Gerade durch denselben Punkt im Raume und legt durch je zwei benachbarte Gerade eine Ebene, die durch die Geraden begrenzt gedacht wird, so erhält man ein Raumgebilde, das aus einer mehrseitigen Ecke und ihrer Gegenecke besteht. Schneidet man dieses durch eine Ebene, die sämtliche Kanten trifft, so entsteht als Schnittfigur ein Vieleck.

In Fig. 277 wird eine der vierseitigen Ecken in dem Viereck $ABCD$ geschnitten. Legt man noch eine zu der ersten Schnittebene parallele Ebene, so kann diese entweder mit auf derselben Seite von O oder auf der entgegengesetzten liegen. Im ersten Falle entsteht als Schnittfigur das Viereck $A'B'C'D'$, im zweiten das Viereck $A''B''C''D''$. Dieselben in Nr. 2 benutzten Sätze zeigen, daß beide Vierecke dem Viereck $ABCD$ ähnlich sind und mit ihm perspektiv (*Planimetrie* § 31 Nr. 2) liegen. Für $ABCD$ und $A'B'C'D'$ ist der Scheitel O der äußere, für $ABCD$ und $A''B''C''D''$ der innere Ähnlichkeitspunkt. In beiden Fällen werden die Entfernungen entsprechender Ecken der Vielecke durch O im herrschenden Verhältnis der ähnlichen Vierecke, im ersten Fall außen, im zweiten innen geteilt.

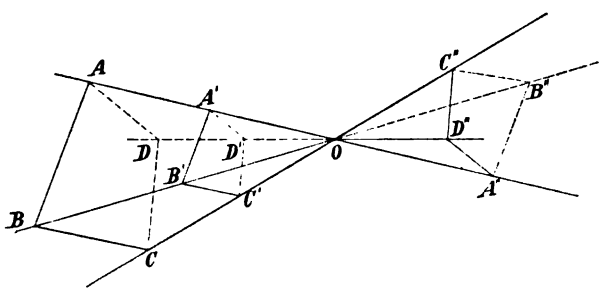


Fig. 277.

Dieselbe Betrachtung gilt allgemein für eine n-seitige Ecke. Durch die Ebenen einer n-seitigen Ecke und eine der Schnittebenen wird ein Polyeder begrenzt, eine n-seitige Pyramide.

Eine n-seitige Pyramide ist begrenzt von einem n-Eck und n Dreiecken. Das n-Eck ist die Grundfläche, die Dreiecke sind die Seitenflächen. Die

Pyramide hat $2n$ Kanten: n Grundkanten und n Seitenkanten, sowie n dreiseitige und 1 n-seitige Ecke an der Spitze der Pyramide. Das Tetraeder ist die dreiseitige Pyramide.

Die Ebenen einer n-seitigen Ecke begrenzen mit zwei parallelen Ebenen, die auf derselben Seite des Scheitels liegen, einen n-seitigen Pyramidenstumpf. Dieser ist begrenzt von zwei ähnlichen n-Ecken und n Trapezen. Das größere n-Eck wird gewöhnlich als die Grundfläche, das kleinere als die Endfläche betrachtet oder beide werden als Endflächen bezeichnet. Die Trapeze sind die Seitenflächen. Der n-seitige Pyramidenstumpf hat $3n$ Kanten, n Grundkanten, n Endkanten, n Seitenkanten und $2n$ dreiseitige Ecken. Das n-seitige Prisma ist von dieser Polyederform ein besonderer Fall, den man erhält, wenn man den Scheitel O der Ecke unendlich fern denkt, wodurch die n-seitige Ecke in das n-Kant übergehen würde.

Die Ebenen der n-seitigen Ecke und ihrer Gegenecke begrenzen mit zwei parallelen auf beiden Seiten des Scheitels liegenden Schnittebenen eine n-seitige Doppelpyramide, die man sich am zweckmäßigsten als Summe zweier n-seitiger Pyramiden denkt, deren Spitzen zusammenfallen und deren entsprechende Seitenkanten eine Gerade bilden.

4. Die bisher betrachteten Grundformen der Polyeder, die aus dem Vielkant und der vielseitigen Ecke entstehen, lassen sich als besondere Fälle einer allgemeinen Form betrachten. Sind in zwei parallelen Ebenen zwei beliebige Vielecke, von denen eins in eine Gerade oder in einen Punkt übergehen kann, gegeben und legt man durch je eine Seite des einen und eine Ecke des andern so viel Ebenen als nötig sind ein Polyeder zu begrenzen, so entsteht das Prismatoid. Es ist begrenzt außer von den beiden Vielecken als Endflächen, im allgemeinen von Dreiecken als Seitenflächen. Es können aber jedesmal zwei Dreiecke in einer Ebene zu einem Trapez zusammenfallen, wenn zwei Seiten der beiden Vielecke parallel sind. In Fig. 278 ist ein Prismatoid gezeichnet, dessen Endflächen das Fünfeck $ABCDE$ und das Dreieck FGH sind; da CD und GH parallel angenommen werden, so ist das Trapez $CDHG$ aus den beiden Dreiecken CDG und DGH oder CDH und CHG entstanden zu denken, die man erhalten würde, wenn die beiden Seiten CD und GH nicht parallel wären. Sind die Endflächen ein m- und ein n-Eck, so hat das Prismatoid jedenfalls $m+n$ Ecken, höchstens $m+n+2$ Flächen und höchstens $2(m+n)$ Kanten. Das Prismatoid in Fig. 278 hat aber nicht $5+3+2=10$, sondern nur 9 Flächen und nicht $2(5+3)=16$, sondern nur 15 Kanten. Haben die Endflächen gleich viel Seiten, die paarweise parallel sind, so wird das Prismatoid ein Obelisk, dessen Seitenflächen sämtlich Trapeze sind. Sind die Endflächen des Obelisken kongruent, so erhält man das Prisma; sind sie ähnlich, den Pyramidenstumpf. Da Dreiecke mit parallelen Seiten zugleich ähnlich sind, so ist der dreiseitige Obelisk immer ein dreiseitiger Pyramidenstumpf. Wird eine Endfläche des Prismatoids ein Punkt, so geht es in eine Pyramide über.

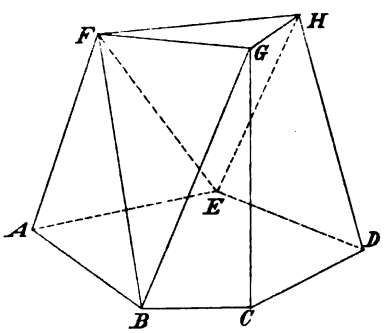


Fig. 278.

5. Unter einem konvexen oder Eulerschen Polyeder versteht man ein solches, dessen anstoßende Ebenen nur hohle Winkel miteinander bilden, so daß keine Begrenzungsfläche auch bei beliebiger Erweiterung das Polyeder durchschneidet.

Ein solches Polyeder läßt sich in Tetraeder zerlegen, deren gemeinschaftliche Spitze ein Punkt im Innern des Körpers ist, und von denen jedes zur

Grundfläche eine der Grenzflächen des Polyeders oder einen dreieckigen Teil einer solchen Grenzfläche hat. Umgekehrt kann man sich das Polyeder auch durch Aneinanderlegen solcher Tetraeder zusammengesetzt denken. Jedes einzelne Tetraeder hat nun vier Ecken, vier Flächen und sechs Kanten, und es ist also, wenn überhaupt die Anzahl der Ecken eines Polyeders durch e, die seiner Flächen durch f und die seiner Kanten durch k bezeichnet wird, für das Tetraeder

$$e + f = k + 2 \quad .$$

Denkt man sich nun an ein Tetraeder ein zweites so angelegt, daß zwei kongruente Flächen zusammenfallen, so wächst dadurch die Anzahl der Ecken um 1, die der Grenzflächen — da eine der frühern ins Innere fällt und drei neue hinzukommen — um 2, endlich die der Kanten um 3; es ist also jetzt $e = 5$, $f = 6$, $k = 9$, mithin wieder $e + f = k + 2$. In gleicher Weise wächst durch jede weitere Hinzufügung eines neuen Tetraeders, falls sonst keine Flächen zusammenfallen, die Zahl der Ecken um 1, die der Flächen um 2, die der Kanten um 3, so daß immer die Summe $e + f$ um 2 größer bleiben muß als k. — Fallen ferner die Grundflächen zweier Tetraeder in eine Ebene, so wächst zwar die Zahl der Flächen nur um 1, aber gleichzeitig verschwindet auch die eine Kante, in der die Grundflächen zusammenstoßen, und der Satz muß also auch dann seine Gültigkeit behalten. Hat endlich ein angelegtes Tetraeder noch mit einem andern der vorhergehenden eine Grenzfläche gemeinschaftlich, so fallen die betreffenden beiden Grenzflächen ins Innere des Körpers, es verändert sich also f nicht, während e und k um je 1 wachsen. Fallen endlich — bei dem letzten Tetraeder — alle drei Flächen mit solchen früherer Tetraeder zusammen, so vermindert sich f um 2 und zugleich fällt die Spitze der Tetraeder als Eckpunkt fort, zugleich aber vermindert sich auch die Zahl der Kanten um 3. Durch diese Betrachtungen überzeugt man sich, daß die Summe $e + f$ mit der Anzahl k der Kanten immer dieselbe Differenz 2 behalten muß, oder daß der obige Satz $e + f = k + 2$ für alle konvexen Polyeder gelten muß.

Dieser Satz heißt nach seinem Entdecker der Eulersche Lehrsatz.

Jede Begrenzungsfläche eines Polyeders hat als ebenes Vieleck ebensoviele Winkel als Seiten. Die Seiten sind die Kanten des Polyeders, aber jede Kante ist Seite von zwei anstoßenden Begrenzungsflächen. Mithin gibt es auf der Oberfläche eines Polyeders doppelt soviel Winkel als Kanten. Ist also w die Anzahl der Winkel, so ist

$$w = 2k, \quad k = \tfrac{1}{2} w \quad .$$

Da nun jede Begrenzungsfläche mindestens drei Winkel enthält, so muß

$$w > 3f, \quad k > \tfrac{3}{2} f$$

und da in jeder Ecke mindestens drei Kanten zusammenstoßen, so ist auch

$$w > 3e, \quad k > \tfrac{3}{2} e \quad .$$

Aus diesen Bedingungen, denen die natürlichen Zahlen e, f, k, w genügen müssen, geht hervor, daß es nicht möglich ist, eine beliebige Anzahl beliebiger Vielecke als Begrenzungsflächen von Polyedern zu nehmen. In einem besondern Falle lehrt dies die folgende Untersuchung.

6. Ein Polyeder heißt regelmäßig, wenn sämtliche Begrenzungsflächen kongruente regelmäßige Vielecke und sämtliche Ecken kongruent sind.

Da die Summe der Seiten einer Ecke kleiner als 360^0 sein muß, so kann man nicht sechs oder mehr gleichseitige Dreiecke zur Bildung einer Ecke aneinanderlegen, da schon bei sechs solchen Dreiecken die Summe der anstoßenden Seiten gleich $6 \cdot 60^0 = 360^0$ sein würde. Regelmäßige Polyeder, deren Grenzflächen Dreiecke sind, können also nur dreiseitige Ecken (mit der Winkelsumme $3 \cdot 60^0 = 180^0$) oder vierseitige (Winkelsumme $4 \cdot 60^0 = 240^0$), oder

fünfseitige (Winkelsumme $5 \cdot 60^0 = 300^0$) haben. Um ferner aus regelmäßigen Vierecken eine Ecke zusammenzusetzen, kann man nur drei Flächen benutzen, in welchem Falle die betreffende Winkelsumme $3 \cdot 90^0 = 270^0$ beträgt; für vier Flächen würde die Summe bereits 360^0, für mehr als vier Flächen also mehr als 360^0 betragen. In gleicher Weise kann ein von Fünfecken begrenztes regelmäßiges Polyeder nur dreiseitige Ecken (mit der Winkelsumme $3 \cdot 108^0 = 324^0$) haben. Aus regelmäßigen Sechsecken läßt sich auch nicht eine dreiseitige Ecke zusammensetzen, denn drei Winkel solcher Sechsecke betragen zusammen schon $3 \cdot 120^0 = 360^0$. Ebensowenig ist dies der Fall mit mehr als sechsseitigen regelmäßigen Vielecken, da die Winkel der regelmäßigen n-Ecke mit zunehmenden Werten von n immer größer werden. Es können also an regelmäßigen Polyedern nur fünf verschiedene Arten von Ecken vorkommen, und es entsteht nun die Frage, ob zu jeder dieser Arten auch ein regelmäßiges Polyeder, oder mehrere solcher Polyeder möglich sind.

a) Soll jede Ecke aus drei regelmäßigen Dreiecken gebildet werden, so hat man $w = 3e = 3f$, also $e = \frac{1}{3}w$, $f = \frac{1}{3}w$, $k = \frac{1}{2}w$, die Gleichung $e + f = k + 2$ liefert also $w = 12$, mithin $e = 4$, $f = 4$, $k = 6$.

Bildet man aus drei kongruenten, regelmäßigen Dreiecken ABC, ABD, ADC (Fig. 279) eine Ecke A, so begrenzen die drei freien Seiten BC, CD, BD der Dreiecke ein viertes, den ersten drei kongruentes Dreieck, dessen Ebene mit denen der drei ersten ein Polyeder einschließt. Die an den Punkten B, C, D entstehenden Ecken sind der Ecke A kongruent, und es ist nicht möglich, mittels einer andern Ebene als BCD solche kongruente Ecken an jenen Punkten zu erzeugen. Es gibt also nur ein von regelmäßigen Dreiecken begrenztes regelmäßiges Polyeder, dessen Ecken dreiseitig sind. Dieses ist das regelmäßige Tetraeder; es hat vier Flächen, vier Ecken und sechs Kanten.

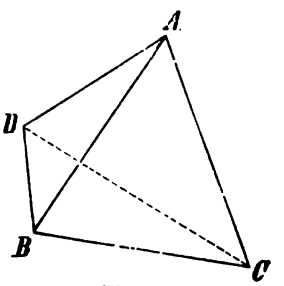


Fig. 279.

b) Sollen vier regelmäßige Dreiecke in einer Ecke zusammenstoßen, so ist $w = 4e = 3f$: $e = \frac{1}{4}w$, $f = \frac{1}{3}w$, $k = \frac{1}{2}w$, woraus $w = 24$, $e = 6$, $f = 8$, $k = 12$ folgt.

Bildet man aus vier kongruenten, regelmäßigen Dreiecken ABC, ACD, ADE, AEB eine Ecke A (Fig. 280), so stoßen an jedem der Punkte B, C, D, E zwei dieser Dreiecke unter demselben Neigungswinkel aneinander, wie im Punkte A, und es müssen sich also an jedem dieser Punkte noch zwei solche Dreiecke zu einer der Ecke A kongruenten Ecke anlegen lassen. Jedes dieser Dreiecke nimmt an der Bildung zweier dieser kongruenten Ecken zugleich teil, denn es muß z. B. das in C an CD angelegte Dreieck CDF in D an CD unter demselben Winkel, wie in C anliegen. Man hat also vier neue Dreiecke, die außerdem zu je zweien in einer Kante, z. B. CDF und BCF in CF, aneinanderliegen, und daher alle vier einen gemeinschaftlichen Eckpunkt F haben müssen. An diesem Punkte entsteht nun durch das Zusammentreffen der vier Dreiecke eine neue vierseitige Ecke, die dieselben Seiten und dieselben Winkel wie die andern hat. Somit gibt es auch hier ein bestimmtes regelmäßiges Polyeder. Dieses von Dreiecken begrenztes regelmäßiges Polyeder, dessen Ecken vierseitig sind, ist das regelmäßige Oktaeder und hat acht Flächen, sechs Ecken und zwölf Kanten.

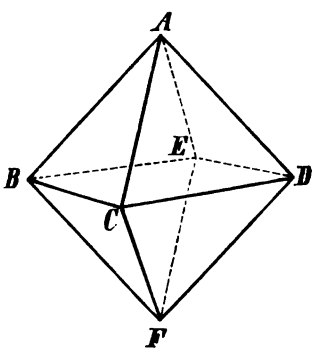


Fig. 280.

c) Wird jede Ecke aus fünf regelmäßigen Dreiecken gebildet, so muß $w = 5e = 3f$; $e = \frac{1}{5}w$, $f = \frac{1}{3}w$, $k = \frac{1}{2}w$ sein und daraus ergeben sich: $w = 60$, $e = 12$, $f = 20$, $k = 30$.

Bildet man aus fünf kongruenten, regelmäßigen Dreiecken eine Ecke A (Fig. 281), so erhält man fünf Punkte B, C, D, E, F, an deren jedem zwei Flächen der Ecke A unter demselben Neigungswinkel wie im Punkte A aneinanderstoßen. Daher müssen sich zu diesen zwei Flächen jedesmal noch drei weitere zu einer der Ecke A kongruenten Ecke hinzufügen lassen. Man erhält auf diese Weise im ganzen zehn neue Dreiecke, die wieder fünf freie Eckpunkte G, H, I, K, L liefern. An jedem stoßen bereits drei Dreiecke unter denselben Winkeln wie an den bisher gebildeten Ecken zusammen, und durch Hinzufügung von je zwei weitern Dreiecken an jedem dieser Eckpunkte, d. h. im ganzen von fünf neuen Dreiecken erhält man an jenen Punkten noch fünf den frühern kongruente Ecken. Die neu angelegten Dreiecke endlich stoßen in je einer Kante so zusammen, daß sie einen gemeinschaftlichen Eckpunkt M haben müssen, an dem endlich noch eine Ecke derselben Art entsteht. Es gibt also ein durch regelmäßige kongruente Dreiecke begrenztes Polyeder, das fünfseitige kongruente Ecken hat. Dieses Polyeder hat zwanzig Flächen, zwölf Ecken, dreißig Kanten und heißt das regelmäßige Ikosaeder.

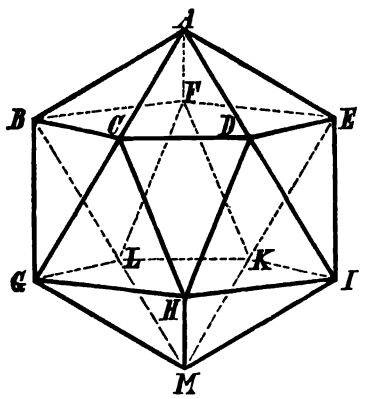


Fig. 281.

d) Wird jede Ecke von drei Quadraten gebildet, so ist $w = 3e = 4f$, also $e = \frac{1}{3}w$, $f = \frac{1}{4}w$ und $k = \frac{1}{2}w$; dann liefert die Gleichung $e + f = k + 2$ den Wert $w = 24$, woraus sich $e = 8$, $f = 6$, $k = 12$ ergeben.

Legt man drei kongruente Quadrate zu einer Ecke A zusammen (Fig. 282), so erhält man wieder in den Endpunkten B, C, D der Kanten Punkte, in denen durch Hinzufügung je einer neuen Fläche eine kongruente Ecke gebildet werden kann. Die drei neuen Flächen bilden untereinander wieder eine ebensolche Ecke und schließen mit den vorhergehenden ein Polyeder ein. Das regelmäßige Hexaeder (Würfel, Kubus) ist also das einzige von Quadraten begrenzte regelmäßige Polyeder.

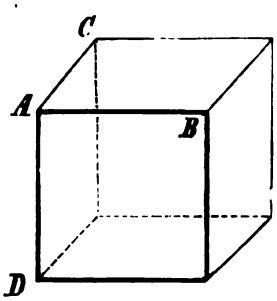


Fig. 282.

e) Endlich kann man jede Ecke aus drei regelmäßigen Fünfecken gebildet denken, damit setzt man fest, daß $w = 3e = 5f$ oder $e = \frac{1}{3}w$, $f = \frac{1}{5}w$, $k = \frac{1}{2}w$ sein soll und es ergeben sich: $e = 20$, $f = 12$, $k = 30$.

Legt man an ein ebenes regelmäßiges Fünfeck $ABCDE$ (Fig. 283) in einem seiner Eckpunkte A zwei ihm kongruente Fünfecke zu einer dreiseitigen Ecke an, so kann jedes zugleich zur Bildung einer ebensolchen Ecke an einem der anliegenden Eckpunkte B, E dienen und man erhält überhaupt durch Anlegen von je einem Fünfeck an jede Seite von $ABCDE$ fünf derartige kongruente Ecken. In jedem der freien Endpunkte einer der Kanten dieser Ecken, z. B. in F, stoßen zwei der Fünfecke unter demselben Winkel, wie an dem andern Endpunkt A aneinander, und es muß sich daher in F durch Einfügung eines weitern solchen Fünfecks eine der Ecke A kongruente Ecke bilden lassen. Auf diese Art erhält man im ganzen fünf neue Fünfecke, welche wieder paarweis mit einer

Seite zusammenstoßen, und deren freie Seite eine dem vorigen kongruentes Fünfeck begrenzen. Durch Hinzufügung der Ebene dieses Fünfecks müssen wieder fünf der frühern kongruente Ecken entstehen, und der Raum wird durch diese Ebene geschlossen. Es gibt also ein durch Fünfecke begrenztes regelmäßiges Polyeder. Es heißt regelmäßiges Dodekaeder, hat zwölf Grenzflächen, zwanzig dreiseitige Ecken und dreißig Kanten.

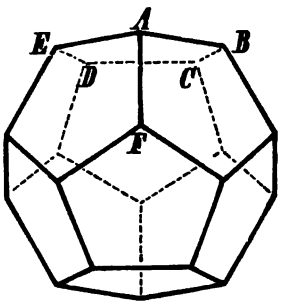


Fig. 283.

Es gibt also im ganzen fünf und nicht mehr Arten regelmäßiger Polyeder, welche die PLATONischen Körper genannt werden. Sie zeigen eine eigentümliche Beziehung in den Zahlen e, f, k. Die Eckenanzahl des Oktaeders ist gleich der Flächenanzahl des Hexaeders und umgekehrt, so daß die Kantenanzahl beider dieselbe ist. Die gleiche gegenseitige Beziehung zeigt das Ikosaeder und das Dodekaeder. Das Tetraeder entspricht sich gewissermaßen selbst, weil bei ihm $e = f$ ist.

Aus den vorstehenden Entwicklungen erkennt man noch, daß jedes regelmäßige Polyeder durch die Länge einer Kante vollständig bestimmt ist, so daß zwei regelmäßige Polyeder derselben Art, die in einer Kante übereinstimmen, kongruent sind.

§ 15. Das Prisma.

1. Aus der in § 14 Nr. 2 angegebenen Entstehung des Prismas folgt, daß zur Konstruktion dieses Polyeders zunächst die Grundfläche, wenn sie der Größe und Gestalt nach gegeben ist, in einer Ebene gezeichnet werden kann; z. B. in Fig. 284: $ABCDE$.

Dann würde die Lage der Seitenkanten zur Grundfläche bestimmt sein, wenn die an A zu bildende Ecke des Körpers gegeben wäre, was z. B. der Fall sein würde, wenn man die Winkel μ und ν kennt, die die durch A gehende Seitenkante mit den anstoßenden Grundkanten AB und AE bildet. Ist dann noch die Länge der Seitenkante $AF = s$ gegeben, so ist F bestimmt und man kann durch F die zur Ebene der Grundfläche parallele Ebene legen, die die Parallelen zu AF durch die übrigen Eckpunkte der Grundfläche schneidet. Die Schnittpunkte bestimmen die der Grundfläche kongruente Endfläche. Dann hat man noch durch je zwei benachbarte Seitenkanten eine Ebene zu legen, um das Prisma zu begrenzen.

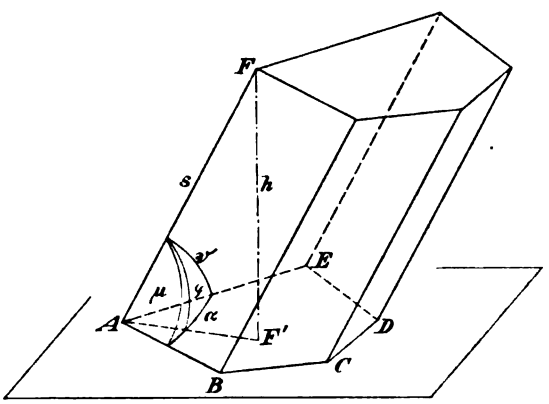


Fig. 284.

Ein n-seitiges Prisma ist also bestimmt durch die Grundfläche, eine an einem Eckpunkt der Grundfläche liegende Ecke und die Länge der Seitenkante. Fällt man von einem Punkte der Endfläche, z. B. F, das Lot FF' auf die Ebene der Grundfläche, so ist $FF' = h$ die Höhe des Prismas. Dann ist AF' die

Projektion der Seitenkante auf die Ebene der Grundfläche. Ist diese der Größe und Lage nach gegeben und kennt man die Höhe des Prismas, so läßt sich ebenfalls das Prisma konstruieren. Dieses ist also auch bestimmt durch die Grundfläche, die Projektion einer Seitenkante auf die Ebene der Grundfläche und die Höhe.

Da zur Bestimmung der Grundfläche des n-seitigen Prismas $2n - 3$ unabhängige Stücke gehören, so müssen zur Bestimmung des Prismas selbst in beiden Fällen noch drei Stücke gegeben sein. Ein n-seitiges Prisma ist also bestimmt durch $2n$ unabhängige Stücke.

Der Winkel $FAF' = \varphi$ ist der Neigungswinkel einer Seitenkante zur Ebene der Grundfläche, der bei allen Seitenkanten derselbe sein muß. Man hat dann die Beziehung

$$h = s \sin\varphi \quad .$$

Nun ist φ die sphärische Höhe des der Ecke A zugeordneten sphärischen Dreiecks, dessen Seiten α, μ, ν sind. Die Höhe steht auf der Seite α und man kann sie nach § 12, Nr. 2, Formel 9) finden, wenn man die schematische Bezeichnung dem vorliegenden Fall anpaßt. Man hat dann

$$h = \frac{2s}{\sin\alpha}\sqrt{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\mu+\nu)\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\mu+\nu)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\mu+\nu)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\mu-\nu)} \; .$$

2. Jede Ebene, die parallel den Endflächen eines Prismas ist und die Seitenflächen schneidet, bringt als Schnittfigur ein den Endflächen kongruentes Vieleck hervor. Man kann sich daher den Raum des Prismas erzeugt denken durch parallele Verschiebung der Fläche eines Vielecks, wenn die Ecken parallele Gerade beschreiben.

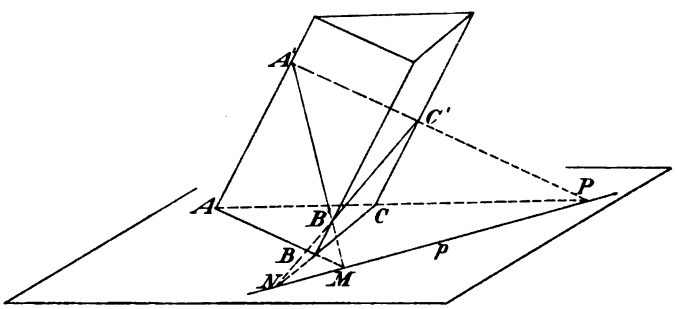


Fig. 285.

Jede beliebige Ebene, die die Seitenkanten eines n-seitigen Prismas schneidet, bildet auch eine Spur auf der Ebene der Grundfläche und die Schnittfigur mit den Seitenflächen des Prismas ist ein n-Eck. In Fig. 285 wird das dreiseitige Prisma mit der Grundfläche ABC durch eine Ebene, die auf der Ebene der Grundfläche die Spur p bildet, in dem Dreieck $A'B'C'$ geschnitten. Verlängert man die Seiten der Grundfläche, so werden sie p in M, N, P schneiden. Die Gerade ABM ist die Schnittlinie der Seitenfläche AB mit p und $A'B'$ ist die Schnittlinie dieser Seitenfläche mit der Schnittebene. Daraus folgt, daß die Verlängerung von $A'B'$ durch M gehen muß. Die entsprechenden Seiten der Grundfläche und der Schnittfigur müssen sich also auf der Spur p schneiden. Damit ist die Möglichkeit gegeben, die Schnittfigur einzuzeichnen, wenn die Spur p der Schnittebene und der Schnittpunkt auf einer Kante, z. B. A' gegeben ist, wodurch die Schnittebene bestimmt ist. Hat man M, N, P bestimmt, so geben $A'M$ und $A'P$ die Punkte B' und C'; als Kontrolle für die Richtigkeit der Zeichnung muß noch $B'C'$ durch N gehen.

Ist die Schnittebene auf einer Seitenkante des Prismas, also auch auf den übrigen, normal, so ist der Schnitt ein Normalschnitt des Prismas.

3. Einen besondern Fall erhält man bei der Bestimmung eines Prismas, wenn die gegebene Ecke zweifach rechtwinklig wird, d. h. wenn die Seitenkante AF auf den anstoßenden Grundkanten AB und AE, also auch auf der Ebene der Grundfläche normal ist. Dann sind auch alle übrigen Seitenkanten normal zur Ebene der Grundfläche und die Seitenflächen sind Rechtecke. Die Länge einer Seitenkante ist zugleich die Höhe des Prismas. Das Prisma heißt gerade und die allgemeine Körperform ist zum Unterschied als schiefes Prisma zu bezeichnen.

Ein n-seitiges gerades Prisma ist also begrenzt von zwei kongruenten n-Ecken und n Rechtecken. Es ist bestimmt durch Grundfläche und Höhe. Es gehören also zur Bestimmung eines solchen $2n - 2$ unabhängige Stücke. Schneidet man ein gerades Prisma durch eine beliebige Ebene, so kann die Grundfläche als Projektion der Schnittfigur auf die Ebene der Grundfläche angesehen werden. Ist daher der Inhalt der Grundfläche G und bildet die Schnittebene mit der Ebene der Grundfläche den Neigungswinkel ε, so ist nach § 6 Nr. 3 der Inhalt der Schnittfigur

$$F = \frac{G}{\cos\varepsilon} .$$

Ist die Grundfläche eines geraden Prismas ein regelmäßiges n-Eck, so ist das Prisma ein regelmäßiges. In einem solchen sind die Seitenflächen kongruente Rechtecke; alle Grund- und Endkanten sind gleich und alle $2n$ Ecken sind kongruente zweifach rechtwinklige.

4. Eine besondere Wichtigkeit besitzen die vierseitigen Prismen, deren Grundflächen Parallelogramme sind, und die demnach von sechs Parallelogrammen begrenzt werden. Man nennt ein solches Prisma ein Parallelepiped. Es seien $ABCD$, $EFGH$ (Fig. 286) die Grundflächen eines solchen Körpers, so sind $EFBA$ und $HGCD$ zwei Seitenflächen, deren Ebenen ebenfalls parallel sind, da EF zu HG und FB zu GC parallel ist. Die Seitenflächen $EFBA$, $HGCD$ sind ferner kongruent, denn es ist $EF = HG$, $\angle EFB = \angle HGC$, $FB = GC$, u. s. w. Da endlich die nicht in diesen beiden Flächen liegenden Kanten EH, FG, BC, AD parallel sind, so kann man den Körper auch als ein Prisma ansehen, das jene beiden Flächen zu Grundflächen hat. Entsprechendes gilt von den Flächen $FGBC$ und $EHDA$. Somit ergeben sich folgende Eigenschaften des Parallelepipeds:

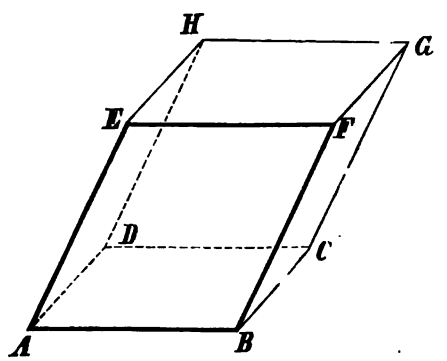


Fig. 286.

Die sechs Grenzflächen eines Parallelepipeds bilden drei Paare, so daß die Flächen eines jeden Paares einander gegenüberliegen, der Lage nach parallel, und kongruente Parallelogramme sind. Jede dieser Flächen kann als die Grundfläche des Parallelepipeds angenommen werden. Die zwölf Kanten des Körpers bilden entsprechend drei Gruppen, so daß die vier Kanten einer jeden Gruppe unter sich parallel und gleich sind; mittels eines beliebigen ebenen Schnitts durch das Parallelepiped, der zu vier solchen Kanten senkrecht steht und als Schnittfigur ein Parallelogramm liefert, dessen Winkel die Neigungswinkel der an den betreffenden Kanten liegenden Flächen sind, erkennt man, daß je zwei von den

zwölf Neigungswinkeln der Flächen des Parallelepipeds, die an gegenüberliegenden parallelen Kanten liegen, gleich groß, und je zwei an benachbarten parallelen Kanten liegende zueinander supplementär sein müssen. Die acht Ecken eines Parallelepipeds endlich bilden vier Paare A und G, B und H, C und E, D und F diametral gegenüberliegender Ecken, und je zwei solche stimmen in den Seiten und Winkeln überein. Dabei folgen die entsprechenden Stücke in umgekehrter Ordnung aufeinander; je zwei gegenüberliegende Ecken sind also symmetrisch.

Je zwei gegenüberliegende Eckpunkte, z. B. A, G, eines Parallelepipeds lassen sich durch eine ganz innerhalb des Körpers fallende Gerade verbinden. Die vier so entstehenden Geraden sind die Diagonalachsen des Parallelepipeds. Durch je zwei einander gegenüberliegende parallele Kanten, z. B. AE und CG, läßt sich ein ebener Schnitt legen, der jede von zwei parallelen Grenzflächen ($ABCD$, $EFGH$) in einer Diagonale schneidet. Die beiden betreffenden Diagonalen (AC, EG) sind parallel und gleich, die Schnittfigur ist ein Parallelogramm und ihre Diagonalen sind zwei Diagonalachsen des Körpers. Jeder der sechs auf diese Art möglichen Schnitte eines Parallelepipeds heißt ein Diagonalschnitt. Da jede der vier Diagonalachsen Diagonale in drei solchen Schnitten zugleich sein muß, z. B. AG in $ACGE$, $AFGD$ und $GBAH$, und die beiden Diagonalen eines Parallelogramms einander halbieren, so folgt, daß alle vier Diagonalachsen einander in einem Punkte schneiden, und daß sie einander in diesem Punkte halbieren. In demselben Punkte müssen die sechs Diagonalschnitte einander durchschneiden; die Schnittlinien je zweier Diagonalschnitte sind die Verbindungslinien der Schnittpunkte der Diagonalen je zweier parallelen Grenzflächen und die Diagonalachsen. Die ersten Verbindungslinien sind drei Gerade, die einander ebenfalls in dem gemeinschaftlichen Schnittpunkt der Diagonalachsen schneiden und halbieren. Jede dieser Verbindungslinien ist zwei Paaren paralleler Grenzflächen und den vier einander parallelen Kanten der letztern parallel und mit diesen Kanten von gleicher Länge.

In jedem Eckpunkt eines Parallelepipeds stoßen drei Kanten aneinander, z. B. in A die Kanten AB, AD, AE, die im allgemeinen nicht als einander gleich anzunehmen sind, und die je einer der drei Gruppen unter sich paralleler und gleicher Kanten angehören. Zwei gegenüberliegende Ecken werden von den spitzen und zwei andre von den stumpfen Winkeln der Parallelogramme gebildet. In den andern stoßen spitze und stumpfe Winkel zusammen.

Sind die Grenzflächen Rhomben, so ist das Parallelepiped ein Rhomboeder. Ein solches ist bestimmt durch eine Kante und einen, z. B. den spitzen, Winkel α einer Grenzfläche. Die Ecken, in denen drei spitze oder drei stumpfe Winkel zusammenstoßen, sind gleichseitig. Im ersten Falle ist der Ecke ein gleichseitiges sphärisches Dreieck zugeordnet, von dem jede Seite gleich α ist. Eine sphärische Höhe zerlegt das Dreieck in zwei rechtwinklige, mit der Hypotenuse α und der einen Kathete $\frac{1}{2}\alpha$. Ist also diese sphärische Höhe, d. i. der spitze Neigungswinkel einer Kante des Rhomboeders zu einer Begrenzungsfläche φ, so ist nach § 12 Nr. 1 Formel 2):

$$\cos\varphi = \frac{\cos\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha} \quad .$$

Jeder Winkel ψ des gleichseitigen sphärischen Dreiecks ist der spitze Neigungswinkel zweier anstoßender Begrenzungsflächen des Rhomboeders; für ihn hat man nach § 12 Nr. 1, Formel 4):

$$\sin\tfrac{1}{2}\psi = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{2\cos\frac{1}{2}\alpha} \quad .$$

Z. B. für $\alpha = 60^0$, erhält man:

$$\cos\varphi = \sqrt{\tfrac{1}{3}},\ \varphi = 54^0\,44'\,7''; \quad \sin\tfrac{1}{2}\psi = \sqrt{\tfrac{1}{3}}, \quad \psi = 70^0\,31'\,46'' \quad .$$

5. Die dreierlei Neigungswinkel der Grenzflächen eines Parallelepipeds können gleichzeitig alle drei schief, oder es kann eine Art aus rechten Winkeln bestehen, oder es sind zwei oder endlich alle drei rechte. Es können also beispielsweise zwei parallele von den als Seitenflächen angenommenen Grenzflächen zur Grundfläche senkrecht stehen, während die beiden andern schief zu ihr sind; ist auch das zweite Paar Seitenflächen senkrecht zu den Grundflächen, so ist das Parallelepiped ein gerades; ist endlich die Grundfläche eines geraden Parallelepipeds ein Rechteck, so stehen auch je zwei aneinanderstoßende Seitenflächen zueinander senkrecht, und das Parallelepiped heißt ein rechtwinkliges. In einem solchen sind alle Grenzflächen Rechtecke, und jede drei in einer Ecke zusammenstoßende Kanten stehen senkrecht zueinander; alle Ecken des Körpers sind also dreifach rechtwinklig. Sind a, b, c die Längen der anstoßenden Kanten eines rechtwinkligen Parallelepipeds, so ergibt sich mittels rechtwinkliger Dreiecke AGC, ABC (Fig. 287) aus

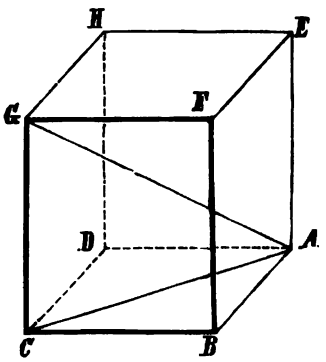


Fig. 287.

$$AG^2 = AC^2 + CG^2 , \quad AC^2 = AB^2 + BC^2 ,$$

daß die Länge einer jeden Diagonalachse

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

ist. Alle vier Diagonalachsen sind einander gleich.

Bildet die Diagonalachse AG mit den anstoßenden Kanten $AB = a$, $AD = b$, $AE = c$ die Winkel α, β, γ, so hat man

$$\cos\alpha = \frac{a}{d} , \quad \cos\beta = \frac{b}{d} , \quad \cos\gamma = \frac{c}{d} ,$$

woraus folgt

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{d^2} = 1 .$$

Da die Summe der Quadrate der drei Cosinus unabhängig von der Länge der Kanten ist, so läßt sich der Satz ausdrücken in der Form:

Die Winkel, die eine durch den Scheitel einer dreifach rechtwinkligen Ecke gehende Gerade mit den Kanten bildet, haben die Eigenschaft, daß sich die Quadrate ihrer Cosinus zu 1 ergänzen.

Dieser Satz bildet eine Verallgemeinerung des planimetrischen, daß eine Gerade, die durch den Scheitel eines rechten Winkels geht, mit den Schenkeln die Winkel α und β bildet, von der Eigenschaft, daß $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$ ist.

Der Satz dient dazu, aus zwei gegebenen Winkeln α, β, den dritten γ zu bestimmen. Es ist

$$\begin{aligned}\cos^2\gamma &= 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta = \sin^2\alpha - \cos^2\beta(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\\ &= \sin^2\alpha(1 - \cos^2\beta) - \cos^2\alpha\cos^2\beta = \sin^2\alpha\sin^2\beta - \cos^2\alpha\cos^2\beta\\ &= (\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta)(\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta) ,\end{aligned}$$

woraus sich endlich ergibt

$$\cos^2\gamma = -\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) .$$

Da α und β die Seiten einer rechtseitigen Ecke sind, deren dritte Seite 90^0 ist, so ist $\cos(\alpha + \beta)$ jedenfalls negativ; bei der Berechnung eines Beispiels fällt also das Minuszeichen auf der rechten Seite weg.

Die Komplemente von α, β, γ sind die Neigungswinkel der vom Scheitel der dreifach rechtwinkligen Ecke ausgehenden Geraden mit den Ebenen der Ecke. In Fig. 287 ist z. B. $\angle GAE = \gamma$ das Komplement zu $\angle GAC$, d. i. zum Neigungswinkel der Diagonalachse mit der auf der Kante c normalen Fläche $ABCD$.

Ist die Grundfläche eines rechtwinkligen Parallelepipeds ein Quadrat, und sind gleichzeitig die Seitenkanten den Grundkanten gleich, sind also alle sechs Flächen kongruente Quadrate, so ist das Parallelepiped ein Würfel oder Kubus (regelmäßiges Hexaeder, vgl. § 14 Nr. 6, d).

Bei einem Würfel von der Kante a ist die Diagonalachse $d = a\sqrt{3}$; sie bildet mit jeder anstoßenden Kante einen Winkel von $54^0\,44'\,7''$, mit jeder anstoßenden Würfelfläche das Komplement dieses Winkels, also $35^0\,15'\,53''$.

§ 16. Die Pyramide und der Pyramidenstumpf.

1. Um eine n-seitige Pyramide (§ 14 Nr. 3) zu konstruieren, kann man zunächst die Grundfläche, wenn sie der Größe und Gestalt nach gegeben ist, in einer Ebene zeichnen: z. B. in Fig. 288: $ABCDE$. Ist nun eine Ecke A der Grundfläche gegeben, z. B. durch die Winkel, welche die durch A gehende Seitenkante mit den anstoßenden Grundkanten AB und AE bildet, und die Länge s dieser Seitenkante, so ist die Spitze S bestimmt. Verbindet man diese mit den übrigen Eckpunkten der Grundfläche und legt durch je zwei benachbarte Verbindungslinien eine Ebene, so ist die Pyramide konstruiert.

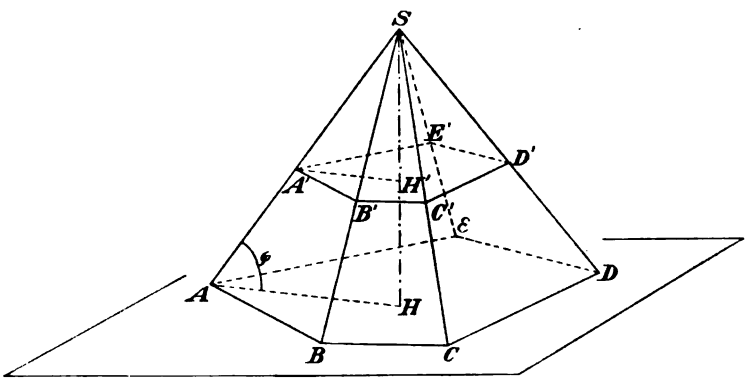


Fig. 288.

Fällt man von der Spitze S die Senkrechte SH auf die Ebene der Grundfläche, so ist $SH = h$ die Höhe der Pyramide, H der Höhenfußpunkt. Ist die Lage von H, welcher Punkt ins Innere der Grundfläche, auf deren Begrenzung oder außerhalb der Grundfläche fallen kann, bestimmt und außerdem die Höhe gegeben, so kann die Spitze der Pyramide gefunden und diese selbst konstruiert werden. Eine Pyramide ist demnach bestimmt durch die Grundfläche, den Höhenfußpunkt und die Höhe.

Verbindet man A mit H, so ist $\angle SAH = \varphi$ der Neigungswinkel der Seitenkante SA zur Ebene der Grundfläche; er kann auf gleiche Weise, wie in § 15 Nr. 1 der entsprechende Winkel beim Prisma berechnet werden.

Die Seitenkanten der Pyramiden und ihre Neigungswinkel zur Ebene der Grundfläche sind im allgemeinen verschieden. Sie könnten nur einander gleich sein, wenn die Dreiecke SAH, SBH, ... sämtlich kongruent wären, d. h. wenn sich um die Grundfläche ein Kreis beschreiben ließe und der Höhenfußpunkt

in den Mittelpunkt dieses Kreises fiele. Diese Bedingung ist in dem besondern Falle immer erfüllt, wenn die Grundfläche ein regelmäßiges n-Eck und der Höhenfußpunkt der Mittelpunkt des Vielecks ist. Eine solche Pyramide ist eine regelmäßige. Die Ecke an der Spitze ist regelmäßig (§ 13 Nr. 2). Die n-seitige regelmäßige Pyramide ist begrenzt von einem regelmäßigen n-Eck und n kongruenten gleichschenkligen Dreiecken. Sie ist bestimmt durch die Zahl n der Ecken der Grundfläche, die Grundkante und die Seitenkante oder die Höhe. Ist die Grundfläche einer regelmäßigen Pyramide drei-, vier- oder fünfseitig, so können die Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sein. Eine solche Pyramide ist durch die Kante bestimmt. Die regelmäßige dreiseitige Pyramide, deren Seitenflächen gleichseitig sind, ist das regelmäßige Tetraeder (§ 14 Nr. 6, a)). Die Höhe h einer solchen Pyramide ist Kathete in einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenuse die Kante a und dessen andre Kathete der Radius r des Umkreises der Grundfläche ist. Man findet also

$$h = \sqrt{a^2 - r^2} \quad .$$

Beim regelmäßigen Tetraeder ist nun

$$r = a\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,, \quad h = \sqrt{a^2 - \tfrac{1}{3}a^2} = a\sqrt{\tfrac{2}{3}} \quad .$$

Für die regelmäßige quadratische Pyramide mit gleichen Kanten hat man

$$r = a\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,, \quad h = \sqrt{a^2 - \tfrac{1}{2}a^2} = a\sqrt{\tfrac{1}{2}} = r \quad .$$

Denkt man sich zwei solche regelmäßige quadratische Pyramiden mit gleicher Kante so aneinander gesetzt, daß die Grundflächen sich decken, so erhält man ein regelmäßiges Oktaeder (§ 14 Nr. 6, b)).

Hat eine regelmäßige fünfseitige Pyramide gleiche Kanten, so ist

$$r = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2 + \tfrac{2}{5}\sqrt{5}}\,, \quad h = \sqrt{a^2 - \tfrac{1}{4}a^2\left(2 + \tfrac{2}{5}\sqrt{5}\right)} = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2 - \tfrac{2}{5}\sqrt{5}} \quad .$$

Eine solche Pyramide wird gebildet durch eine Ecke eines regelmäßigen Ikosaeders (§ 14 Nr. 6, c)) und die Ebene, die durch die fünf benachbarten Eckpunkte dieses Polyeders gelegt werden kann.

Aus zwei der drei Größen a, r, h kann man in diesen drei Fällen die Neigungswinkel der Seitenkanten zur Grundfläche berechnen.

2. Jede Ebene, die parallel der Grundfläche einer Pyramide ist und die Seitenkanten schneidet, bringt nach § 14 Nr. 3 als Schnittfigur ein der Grundfläche ähnliches Vieleck hervor, das mit ihr perspektiv so liegt, daß die Spitze der Pyramide der äußere Ähnlichkeitspunkt ist. Die Schnittfigur ist bestimmt durch den Schnittpunkt der Parallelebene mit einer Kante, z. B. A' auf AS (Fig. 288). Durch Parallele zu den entsprechenden Grundkanten erhält man die Seiten der Schnittfigur: $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$: die letzte Seite $E'A'$ muß parallel zu EA sein. Die Schnittebene schneidet auch die Höhe SH in H'; dieser Punkt ist bestimmt durch die Parallele $A'H'$ zu AH. Es würde daher die Schnittfigur auch gezeichnet werden können, wenn H' gegeben wäre.

Die Spitze S teilt AA' außen im herrschenden Verhältnis der beiden ähnlichen Vielecke. Sind also zwei entsprechende Strecken dieser Vielecke a und a', so ist

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{a'}{a} \quad :$$

wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $SA'H'$ und SAH ist aber auch, wenn $SH = h$, $SH' = h'$

$$\frac{h'}{h} = \frac{SA'}{SA} = \frac{a'}{a} \quad .$$

Sind die Inhalte von Grundfläche und Schnittfigur G und G', so ist

$$\frac{G'}{G} = \frac{a'^2}{a^2} = \frac{h'^2}{h^2}, \quad \frac{h'}{h} = \frac{\sqrt{G'}}{\sqrt{G}} .$$

Diese Beziehung dient dazu, den Inhalt eines Parallelschnitts zu berechnen, wenn das Verhältnis des Höhenabschnitts zur Höhe gegeben ist; oder aus dem Verhältnis der Inhalte von Parallelschnitt und Grundfläche den Abstand der Schnittebene von der Spitze zu finden.

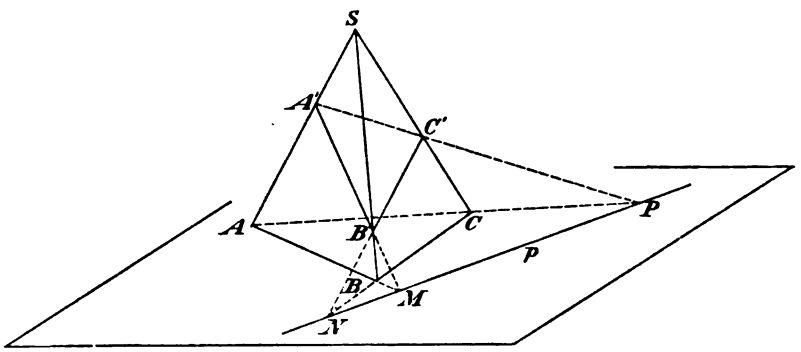


Fig. 289.

Eine beliebige Schnittebene einer Pyramide ist bestimmt durch ihre Spur auf der Ebene der Grundfläche und einen Punkt, z. B. den Schnittpunkt mit einer Seitenkante oder mit der Höhe. Dieselbe Betrachtung wie bei dem ebenen Schnitte durch ein Prisma in § 15 Nr. 2 zeigt, daß auch hier die Grundkanten und die entsprechenden Seiten der Schnittfigur sich auf der Spur der Ebene schneiden müssen. Damit kann man, wie Fig. 289 bei einem Tetraeder zeigt, die Schnittpunkte B' und C', sowie H' bestimmen, wenn die Spur p der Schnittebene auf der Ebene der Grundfläche und der Schnittpunkt A' auf der Seitenkante SA gegeben ist.

3. Durch eine der Grundfläche parallele Ebene wird die Pyramide in eine Pyramide und einen Pyramidenstumpf geteilt. Die Begrenzungsflächen der abgeschnittenen Pyramide sind den entsprechenden der ganzen der Reihe nach ähnlich und die Ecken beider sind in gleicher Anordnung kongruent, daher sind die beiden Pyramiden ähnlich zu nennen.

Der n-seitige Pyramidenstumpf ist für sich genommen bestimmt durch die Grundfläche, eine an einem Endpunkte liegende Ecke, die Länge der durch diesen Eckpunkt gehenden Seitenkante und das herrschende Verhältnis der Endflächen. Der Abstand der beiden Endflächen ist die Höhe des Pyramidenstumpfes. Dieser ist regelmäßig, wenn die Endflächen regelmäßig sind und die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte normal zu den Endflächen ist. Diese Verbindungslinie ist die Höhe des regelmäßigen Pyramidenstumpfes. Die Seitenflächen sind kongruente gleichschenklige Trapeze. Er ist bestimmt durch eine Endfläche, die Höhe und das herrschende Verhältnis der beiden Endflächen.

Durch Erweiterung der Seitenflächen eines Pyramidenstumpfes kann dieser zu einer Pyramide ergänzt werden. Die zugefügte Pyramide ist die Ergänzungspyramide. Sind $G_1 > G_2$ die Endflächen des Stumpfes, so wird, wenn man von der Spitze S (Fig. 290) der ergänzten Pyramide die Senkrechte zu den Endflächen zieht, diese, und zwar G_1 in H_1 und G_2 in H_2 schneiden, so daß

$H_1H_2 = h$ die Höhe des Stumpfes, SH_1 die Höhe der ergänzten und SH_2 die der Ergänzungspyramide ist.

Da S die Höhe H_1H_2 im herrschenden Verhältnis $\sqrt{G_1} : \sqrt{G_2}$ teilt, so ist

$$h_1 = h\frac{\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}}, \quad h_2 = h\frac{\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}} .$$

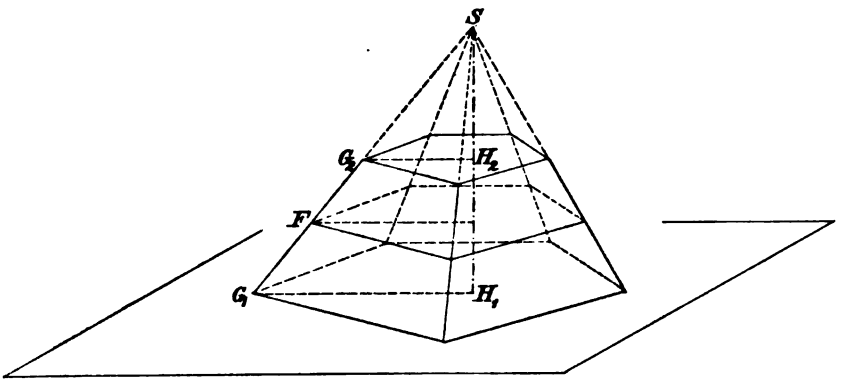


Fig. 290.

Eine zu den Endflächen parallele Ebene, die die Seitenkanten des Stumpfes schneidet, bringt eine Schnittfigur vom Inhalt F, die nach Nr. 2 konstruiert werden kann, hervor, so daß $G_1 > F > G_2$ ist. Sind x_1 und x_2 die Abstände dieser Schnittebene von G_1 und G_2, so hat man, wenn F als Parallelschnitt der ergänzten und der Ergänzungspyramide aufgefaßt wird nach Nr. 2

$$\frac{h_1 - x_1}{h_1} = \frac{\sqrt{F}}{\sqrt{G_1}}, \quad \frac{h_2 + x_2}{h_2} = \frac{\sqrt{F}}{\sqrt{G_2}} ,$$

woraus folgt:

$$\frac{x_1}{h_1} = \frac{\sqrt{G_1} - \sqrt{F}}{\sqrt{G_1}}, \quad \frac{x_2}{h_2} = \frac{\sqrt{F} - \sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2}} .$$

Wegen der Werte von h_1 und h_2 erhält man hieraus

$$x_1 = h\frac{\sqrt{G_1} - \sqrt{F}}{\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}}, \quad x_2 = h\frac{\sqrt{F} - \sqrt{G_2}}{\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}} .$$

Damit ist die Frage beantwortet, wo ein Parallelschnitt durch den Stumpf gelegt werden muß, der einen gegebenen Inhalt haben solle. Da aus den beiden letzten Beziehungen sich noch

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\sqrt{G_1} - \sqrt{F}}{\sqrt{F} - \sqrt{G_2}}$$

ergibt, so erhält man wegen $x_1 + x_2 = h$

$$\sqrt{F} = \frac{x_2}{h}\sqrt{G_1} + \frac{x_1}{h}\sqrt{G_2} ,$$

oder wenn das Verhältnis, in dem der Parallelschnitt die Höhe h teilt,

$$x_1 : x_2 = 1 : \lambda$$

gesetzt wird:

$$\sqrt{F} = \frac{\sqrt{G_1} + \lambda\sqrt{G_2}}{1+\lambda} ,$$

womit der Inhalt des Parallelschnitts bestimmt ist. Im besondern Falle des Mittelschnitts, der die Höhe halbiert, hat man

$$\sqrt{F} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{G_1} + \sqrt{G_2}) .$$

Vierter Abschnitt.

Krumme Flächen und runde Körper.

§ 17. Der Cylinder.

1. Man kann sich ein Vielkant (§ 14 Nr. 2) durch Bewegung einer Geraden beschrieben denken, die in stetiger Aufeinanderfolge durch alle Punkte des Umfangs eines n-Ecks geht und dabei beständig ihrer anfänglichen, die Ebene des Vielecks schneidenden Lage parallel bleibt. Wird bei dieser Konstruktion der Umfang des n-Ecks durch eine krumme Linie ersetzt, die als Leitlinie der einer beliebigen Richtung parallel bleibenden erzeugenden Geraden dient, so heißt die entstehende Fläche eine Cylinderfläche. Ist insbesondere die Leitlinie ein Kreis, so erhält man die gemeine Cylinderfläche, von der im folgenden allein die Rede ist und die kurz als Cylinderfläche bezeichnet werden soll.

Durch jeden Punkt einer Cylinderfläche läßt sich eine Gerade legen, die vollständig in die Fläche fällt, da die erzeugende Gerade bei ihrer Bewegung einmal durch diesen Punkt gegangen sein muß. Diese Geraden, die parallel sind, heißen die Seitenlinien der Cylinderfläche.

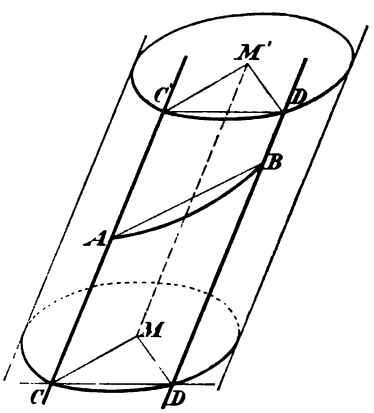


Fig. 291.

Die durch den Mittelpunkt des als Leitlinie dienenden Kreises gehende, den Seitenlinien parallele Gerade wird die Achse der Cylinderfläche genannt. Umgekehrt muß jede durch einen Punkt einer Cylinderfläche parallel zu der Achse gelegte Gerade ihrer ganzen Erstreckung nach in die Cylinderfläche fallen.

Jede andre Gerade, die zwei Punkte einer Cylinderfläche verbindet, hat mit dieser nur jene beiden Punkte gemeinsam, denn sind A, B (Fig. 291) zwei solche Punkte, so kann man durch jeden eine Seitenlinie CC', DD' legen, und die durch diese beideu Geraden bestimmte Ebene muß die Gerade AB ihrer ganzen Erstreckung nach enthalten. Sie muß ferner die Ebene des als Leitlinie dienenden Kreises M in einer Geraden schneiden, die durch die Fußpunkte CD jener Seitenlinien in dieser Ebene geht, also eine Sekante des Kreises M ist. Hätte nun die Gerade AB mit der Cylinderfläche irgend einen dritten Punkt E gemeinsam, so müßte die durch E bestimmte Seitenlinie zugleich ganz in die Schnittebene $CDD'C'$ fallen, und der Schnittpunkt dieser Seitenlinie mit der Ebene von M müßte ein Punkt sein, den die Sekante CD neben den Punkten C und D mit dem Kreise M gemeinschaftlich hätte, was unmöglich ist. — Man sieht zugleich, daß die von A und B begrenzte Strecke der betreffenden Geraden ganz innerhalb und jede ihrer Verlängerungen ganz außerhalb der Cylinderfläche fallen muß.

Hiernach kann außer den Seitenlinien keine gerade Linie in einer Cylinderfläche gezogen werden, vielmehr ist durch jeden Punkt der Fläche nur eine Gerade in ihr möglich. Die Cylinderfläche ist also in keinem ihrer Teile eben; sie ist eine in sich zurückkehrende krumme Fläche.

2. Jede einer Seitenlinie oder der Achse parallele Ebene, welche die Cylinderfläche schneidet, muß mit ihr zwei Seitenlinien gemein haben, denn wäre eine krumme Schnittlinie oder wäre außer zwei Seitenlinien noch irgend ein andrer Punkt beiden Flächen gemeinsam, so müßten auch die sämtlichen durch die Punkte der krummen Linie, oder durch den andern Punkt gehenden Seitenlinien ihrer ganzen Länge nach in die Schnittebene fallen, und somit auch der Schnittpunkt jeder solchen Seitenlinie mit der Ebene des Leitkreises M ein dritter Punkt sein, den die Sekante CD mit dem Kreise M gemeinschaftlich hätte.

Geht ein solcher Schnitt durch die Achse, so heißt er ein Achsenschnitt der Cylinderfläche.

Jede Ebene, die durch eine Seitenlinie einer Cylinderfläche und durch eine Tangente des Leitkreises geht, hat mit der Cylinderfläche nur diese Seitenlinie gemeinsam, und liegt sonst außerhalb der Cylinderfläche; denn läge irgend ein Punkt der Ebene außer jener Seitenlinie auf oder innerhalb der Cylinderfläche, so müßte diese Ebene die Ebene des Leitkreises in einer Sekante schneiden. Eine solche Ebene, die mit einer Cylinderfläche nur eine Gerade gemeinsam hat, heißt eine Tangentialebene der Cylinderfläche, und diese Gerade heißt ihre Berührungslinie.

Zwei Tangentialebenen einer Cylinderfläche schneiden sich in einer außerhalb der Fläche liegenden der Achse parallelen Geraden und umgekehrt können durch eine solche Gerade zwei Tangentialebenen an die Cylinderfläche gelegt werden.

Eine der Achse parallele Ebene wird überhaupt die Cylinderfläche schneiden, berühren oder meiden, je nachdem ihre Spur auf der Ebene des Leitkreises diesen schneidet, berührt oder meidet.

Jede eine Cylinderfläche schneidende Ebene, die einer Seitenlinie oder der Achse nicht parallel ist, muß sämtliche Seitenlinien schneiden und daher eine geschlossene krumme Schnittlinie liefern. Ist die Ebene eines solchen Schnitts der Ebene der Leitlinie parallel, so ist die Schnittlinie ein Kreis; denn ist M' (Fig. 291) der Schnittpunkt der Achse mit der Ebene des Schnitts, und verbindet man diesen Punkt mit beliebigen Punkten C', D' der Schnittlinie, so kann man durch jede der Geraden $M'C'$, $M'D'$ und durch die Achse einen Schnitt legen, der die Cylinderfläche in einer Seitenlinie CC', DD' und die Ebene des Leitkreises in einem Radius MC, MD schneiden muß. Infolge des Parallelismus der Ebenen M und M' sind je zwei zusammengehörige Schnittlinien $M'C'$ und MC, $M'D'$ und MD parallel, und außerdem ist MM' jeder der Linien CC', DD' parallel und daher sind die Vierecke $CMM'C'$, $DMM'D'$ Parallelogramme. Es muß daher $M'C' = MC$, $M'D' = MD$, und da $MC = MD$ ist, auch $M'C' = M'D'$ sein. Der Punkt M' ist also von allen Punkten der Schnittlinie gleich weit entfernt und diese ist ein Kreis.

Durch den vorstehenden Beweis ist gleichzeitig dargetan, daß alle Kreise, die durch Schnittebenen entstehen, die der Ebene des Leitkreises parallel sind, unter sich und dem Leitkreise kongruent sind, und daß ihre Mittelpunkte auf der Achse liegen.

Man kann daher eine Cylinderfläche auch erzeugen durch parallele Verschiebung eines Kreises, dessen Mittelpunkt eine Gerade beschreibt.

3. Ein durch eine Cylinderfläche und die parallelen Ebenen zweier Schnittkreise begrenzte Körper heißt ein Cylinder, der ihn begrenzende Teil der Cylinderfläche sein Mantel, die beiden begrenzenden Ebenen die Endflächen oder Grund- und Endfläche des Cylinders. Der Abstand der Endflächen ist die Höhe, die Verbindungslinien ihrer Mittelpunkte die Achse. Der durch die

Schnittkreise begrenzte Teil einer Seitenlinie der Cylinderfläche ist eine Seitenlinie des Mantels. Die Seitenlinien sind einander gleich und gleich der Achse und bilden dieselben Neigungswinkel mit den Endflächen.

Ein Cylinder ist bestimmt durch den Radius r des Grundkreises, die Achse a und deren spitzen Neigungswinkel α zur Ebene der Grundfläche. Projiziert man den Endpunkt Q der Achse OQ (Fig. 292) auf die Ebene der Grundfläche in Q', so ist $\angle QOQ' = \alpha$, $QQ' = h$ die Höhe des Cylinders. Es ist dann

$$h = a \sin\alpha \quad .$$

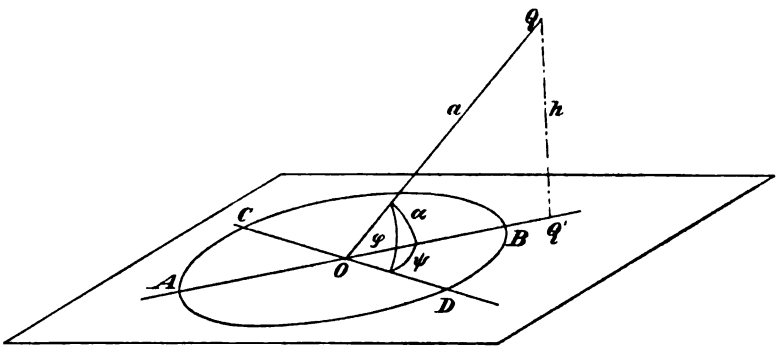


Fig. 292.

Die Achsenschnitte eines Cylinders sind Parallelogramme, von denen zwei gegenüberliegende Seiten Durchmesser der Endflächen und die beiden andern Seitenlinien des Mantels sind. Sie stimmen also alle in den Seiten aber nicht in den Winkeln überein. Schneidet ein Achsenschnitt den Grundkreis in dem Durchmesser CD (Fig. 292) und bildet die Achse mit ihm den spitzen Winkel $QOC = \varphi$, so ist der Inhalt des Achsenschnitts

$$F = 2\,a\,r \sin\varphi \quad .$$

Der kleinste Winkel, den die Achse mit einer durch O gehenden Geraden der Ebene des Grundkreises bildet, ist ihr Neigungswinkel α mit dieser Ebene. Dieser ist in dem Achsenschnitt enthalten, dessen Spur auf der Ebene der Grundfläche die Projektion OQ' der Achse auf diese Ebene ist. Dieser Achsenschnitt heißt Hauptachsenschnitt des Cylinders. Er ist auf den Ebenen der Endflächen normal, enthält also außer den Neigungswinkeln der Cylinderachse zu diesen, die Höhe des Cylinders. Schneidet dieser Hauptachsenschnitt den Grundkreis in dem Durchmesser AB und bildet CD mit diesem den Winkel ψ, so ist $OBDQ$ eine rechtwinklige Ecke mit der Hypotenuse φ und den Katheten α und ψ, es ist daher nach § 12, Nr. 1, 2)

$$\cos\varphi = \cos\alpha \cos\psi \quad .$$

Hieraus ergibt sich wieder, daß α der kleinste Wert für φ ist, daß also der Hauptachsenschnitt den kleinsten Inhalt

$$F_1 = 2\,a\,r \sin\alpha = 2\,h\,r$$

hat und daß 90^0 der größte Wert für φ ist. Ist also CD senkrecht zu AB, so erhält man den größten Achsenschnitt, dessen Inhalt

$$F_2 = 2\,a\,r$$

ist, als den, der auf dem Hauptachsenschnitt normal ist. Er ist der einzige, der die Gestalt eines Rechtecks hat. Da $\cos\varphi = \cos(-\varphi)$ ist, so haben zwei

Achsenschnitte, deren Spuren zu AB symmetrisch liegen, gleichen Inhalt. Der Hauptachsenschnitt ist also Symmetrieebene des Cylinders, d. h. er schneidet diesen in zwei symmetrische Teile.

Ein Cylinder ist durch seinen Hauptachsenschnitt vollständig bestimmt.

4. Schneidet man einen Cylinder durch eine zum Hauptachsenschnitt normale Ebene, die auf ihm die Spur CD (Fig. 293) bildet, während AB die Spur des Hauptachsenschnitts auf der Ebene der Grundfläche ist, so daß $\angle CAB + \angle CDB = 180^0$, also $\angle CAB = \angle ACD$ ist, und legt durch einen beliebigen Punkt P der Schnittfigur eine zur Grundfläche parallele Ebene, der den Cylinder in einem zum Grundkreis kongruenten Kreis mit dem Durchmesser $A'B'$ schneidet, so ist die Schnittlinie PE der beiden Ebenen normal zu $A'B'$. Daher ist in dem Kreise mit dem Durchmesser $A'B'$

$$PE^2 = A'E \cdot B'E \quad .$$

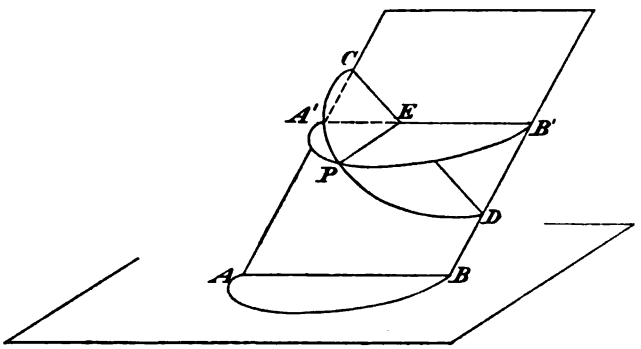


Fig. 293.

Nun ist aber wegen der Gleichheit der Winkel $EA'C$ und ECA', sowie $EB'D$ und EDB'

$$A'E = CE, \quad B'E = DE \quad ,$$

also

$$PE^2 = CE \cdot DE \quad ,$$

d. h. die Schnittfigur ist ein Kreis. Ein Cylinder hat also außer den zur Ebene des Grundkreises parallelen Schnitten noch eine zweite Art von parallelen Kreisschnitten: die Wechselschnitte. Die Mittelpunkte der Wechselschnitte liegen ebenfalls auf der Achse des Cylinders.

5. Diese Beziehungen vereinfachen sich sehr wesentlich in dem besondern Falle, daß die Achse und die Seitenlinien des Cylinders auf den Endflächen normal und daher gleich der Höhe sind. Ein solcher Cylinder ist der gerade, während die allgemeine Form im Gegensatz der schiefe Cylinder genannt wird. Beim geraden Cylinder sind alle Achsenschnitte kongruente Rechtecke. Daher läßt er sich erzeugen durch Rotation eines Rechtecks um eine Seite. Diese wird zur Achse des Cylinders; die gegenüberliegende Seite beschreibt den Mantel und die beiden andern Seiten die Endflächen. Der gerade Cylinder ist daher auch Rotationscylinder. Er ist bestimmt durch seinen Achsenschnitt, d. h. durch ein Rechteck, dessen anstoßende Seiten der Durchmesser $2r$ des Grundkreises und die Höhe h des Cylinders ist.

Jeder der Achse parallele ebene Schnitt ist ein Rechteck, dessen anstoßende Seiten eine Sehne des Grundkreises und die Höhe des Cylinders sind.

Eine Tangentialebene des geraden Cylinders ist normal zu dem Achsenschnitt, der durch die Berührungslinie geht.

6. Zieht man auf dem Mantel eines Cylinders beliebig viele Seitenlinien, so lassen sich diese als Seitenkanten eines dem Cylinder eingeschriebenen Prismas betrachten, dessen Endflächen denen des Cylinders eingeschrieben sind. Ebenso kann man die durch diese Seitenlinien gelegten Tangentialebenen des Mantels als Seitenflächen eines dem Cylinder umschriebenen Prismas ansehen, dessen Endflächen denen des Cylinders umschrieben sind. Die Seitenkanten des umschriebenen Prismas sind als Schnittlinien zweier Tangentialebenen des Mantels der Cylinderachse parallel. Je nachdem der Cylinder schief oder gerade ist, wird auch das eingeschriebene oder umschriebene Prisma schief oder gerade sein. Denkt man sich die Anzahl der Seitenlinien des Mantels unendlich groß, so sieht man, daß der Cylinder als die Grenze zu betrachten ist, der sich ein eingeschriebenes oder umschriebenes Prisma bei unendlich wachsender Seitenzahl nähert.

Umgekehrt läßt sich nur dann einem Prisma ein Cylinder um- oder einschreiben, wenn sich den Endflächen des Prismas ein Kreis um- oder einschreiben läßt. Dies ist z. B. immer der Fall, wenn die Endflächen regelmäßig sind.

§ 18. Der Kegel und der Kegelstumpf.

1. Eine mehrseitige Ecke mit ihrer Gegenecke kann man sich durch Bewegung einer Geraden erzeugt denken, die an dem Umfange eines n-Ecks gleitet und dabei immer durch einen festen Punkt S außerhalb der Ebene des n-Ecks geht. Ersetzt man den Umfang des n-Ecks durch eine Kurve als Leitlinie, so beschreibt die erzeugende Gerade eine Kegelfläche. Der feste Punkt S heißt die Spitze der Fläche.

Ist die Leitlinie ein Kreis, so erhält man die gemeine Kegelfläche. In der Elementarmathematik kann nur diese behandelt werden, und daher soll im folgenden unter einer Kegelfläche schlechthin eine gemeine verstanden werden.

Die Kegelfläche besteht aus zwei durch die Spitze getrennten symmetrischen Teilen, von denen jeder einen nach einer Seite offenen unendlichen Raum umschließt. Durch jeden Punkt einer Kegelfläche läßt sich in dieser eine Gerade legen, denn die erzeugende Gerade muß bei ihrer Bewegung einmal durch jenen Punkt gegangen sein. Diese Geraden, die demnach alle durch die Spitze gehen, sollen die Seitenlinien der Kegelfläche heißen. Jede Seitenlinie des einen der beiden zusammengehörigen Teile einer vollständigen Kegelfläche ist in ihrer Verlängerung über die Spitze zugleich Seitenlinie des andern Teils. Umgekehrt muß jede Gerade, welche die Spitze mit einem andern Punkt der Kegelfläche verbindet, ihrer ganzen Erstreckung nach in diese Fläche fallen.

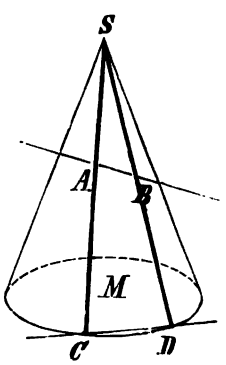


Fig. 294.

Jede andre Gerade, die zwei Punkte einer Kegelfläche verbindet, hat mit ihr nur diese beiden Punkte gemein, denn sind zunächst A, B (Fig. 294) zwei solche auf verschiedenen Seitenlinien und auf demselben Teile der Kegelfläche liegende Punkte, so kann man durch jeden eine Seitenlinie SA, SB legen, und die durch diese beiden Seitenlinien bestimmte Ebene muß die Gerade AB ihrer ganzen Erstreckung nach enthalten. Sie muß ferner die Ebene des als Leitlinie dienenden Kreises M in einer Geraden schneiden, die durch die Schnittpunkte C, D jener Seitenlinien mit dieser Ebene geht, also eine Sekante ist. Hätte nun die Gerade AB mit der Kegelfläche irgend einen dritten Punkt E gemeinsam, so müßte auch die durch S und E bestimmte Seitenlinie ganz in die Schnittebene SCD fallen, und der Schnittpunkt dieser Seitenlinie mit der Ebene von M müßte ein dritter Punkt sein, den die Sekante CD mit

dem Kreise M gemein hätte, was unmöglich ist. — Man erkennt gleichzeitig, daß das von A und B begrenzte Stück der durch diese Punkte gehenden Geraden ganz innerhalb des von der Kegelfläche umschlossenen Raumes fallen muß, während die Verlängerungen der Geraden über A und B ganz außerhalb dieses Raumes liegen. — Liegen ferner A und B auf verschiedenen Hälften der Kegelfläche, so läßt sich der Beweis in ganz entsprechender Art führen; nur erkennt man hier, daß die Strecke AB ganz außerhalb der von der vollständigen Kegelfläche umschlossenen Räume und jede der Verlängerungen ganz innerhalb eines dieser Räume liegt.

Aus dem vorigen Satze folgt, daß außer den Seitenlinien keine Geraden in einer Kegelfläche gezogen werden können, daß also durch jeden ihrer Punkte, der nicht die Spitze ist, nur eine Gerade in der Fläche möglich ist. Die Kegelfläche ist also in keinem Teil eben; sie ist eine in sich zurückkehrende krumme Fläche.

2. Jede durch die Spitze einer Kegelfläche gelegte Ebene muß, wenn sie mit der Kegelfläche noch einen Punkt gemeinsam hat, die ganze Seitenlinie dieses Punktes mit ihr gemeinsam haben; jede durch die Spitze gehende Schnittebene einer Kegelfläche, die also durch irgend einen Punkt innerhalb des Kegelraums geht, schneidet die Kegelfläche in zwei Seitenlinien. Außer diesen Seitenlinien kann sie mit der Kegelfläche keinen Punkt gemeinsam haben. Die Richtigkeit dieser Behauptungen ergibt sich leicht aus der vorhergegangenen Beweisführung mittels der Sekante CD, welche die Schnittlinie der Schnittebenen mit der Ebene des Leitkreises M sein muß.

Die Gerade, die durch die Spitze S und den Mittelpunkt M des Leitkreises geht, heißt die Achse der Kegelfläche. Jeder ebene Schnitt der Fläche, der durch die Achse geht, heißt ein Achsenschnitt.

Jede durch die Spitze S gehende Ebene, welche die Ebene des Leitkreises in einer Tangente dieses Kreises schneidet, hat mit der Kegelfläche nur die durch den Berührungspunkt der Tangente gehende Seitenlinie gemein und heißt deshalb eine Tangentialebene der Kegelfläche. Jene Seitenlinie ist ihre Berührungslinie. Der Beweis des Satzes folgt im wesentlichen daraus, daß ein gemeinschaftlicher Punkt beider Flächen außerhalb jener Schnittlinie auch eine zweite gemeinschaftliche Seitenlinie zur Folge haben würde, wodurch eine Sekante als Schnittlinie der Ebene mit der des Leitkreises bedingt sein würde.

Zwei Tangentialebenen einer Kegelfläche müssen sich in einer Geraden schneiden, die durch die Spitze geht und außerhalb des von der Fläche umschlossenen Raumes liegt. Umgekehrt kann man durch eine solche Gerade immer zwei Tangentialebenen an die Kegelfläche legen.

Im allgemeinen wird eine Ebene, die durch die Spitze der Kegelfläche geht, diese in zwei Seitenlinien schneiden oder in einer Seitenlinie berühren oder sie meiden, je nachdem ihre Spur auf der Ebene des Leitkreises diesen schneidet oder berührt oder meidet.

Jede die Kegelfläche schneidende Ebene, die nicht durch die Spitze geht, liefert eine krumme Schnittlinie, denn wäre irgend ein Teil gerade, so müßte die durch diesen Teil und die Spitze gehende Ebene alle die durch diesen Teil gehenden Seitenlinien enthalten, was nach dem vorigen nicht möglich ist. Diese Kurven führen den Namen Kegelschnitte. Sie werden behandelt in § 20 Nr. 6.

In dem besondern Falle, daß die Schnittebene der Ebene des Leitkreises parallel ist, ist die Schnittlinie ein Kreis. Ist nämlich M' (Fig. 295) der Punkt, in dem die Achse der Kegelfläche die Schnittebene trifft, M der Mittelpunkt des Leitkreises und $C'M'$ die Verbindungslinie des Punktes M' mit einem beliebigen Punkte C' der Schnittlinie, so kann man eine Ebene durch SM und

und $M'C'$ legen, welche die Kegelfläche in einer Seitenlinie SC und die Ebene des Leitkreises in einem zu $C'M'$ parallelen Radius CM schneiden muß. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $SM'C'$ und SMC folgt:

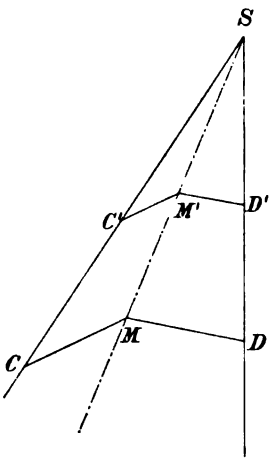


Fig. 295.

$$\frac{M'C'}{MC} = \frac{SM'}{SM} .$$

Für jede andre Verbindungslinie von M' mit einem Punkte D' der Schnittlinie erhält man in gleicher Weise, wenn MD der zu $M'D'$ parallele Radius ist,

$$\frac{M'D'}{MD} = \frac{SM'}{SM} .$$

Daher ist auch

$$\frac{M'C'}{MC} = \frac{M'D'}{MD}$$

und da $MC = MD$, so ist auch $M'C' = M'D'$, d. h. jede andre derartige Verbindungslinie ist der ersten $M'C'$ gleich. Hiermit ist nicht nur bewiesen, daß die Schnittlinie ein Kreis ist, sondern auch, daß die Mittelpunkte aller dieser Kreise auf der Achse liegen und daß der Radius eines solchen zum Radius des Leitkreises, oder daß die Radien je zweier solcher Kreise sich zueinander verhalten, wie die Abstände der Mittelpunkte von der Spitze. Für dieses Verhältnis kann man auch das der Abschnitte jeder andern von S durch die beiden Ebenen gezogenen Geraden und insbesondere auch das der Abschnitte einer Seitenlinie $SC' : SC$ sowie das der Abstände der beiden Flächen von der Spitze setzen. Die Flächen je zweier Kreise verhalten sich zueinander, wie die Quadrate dieser Abstände.

Der durch eine Kegelfläche und einer der Ebene des Leitkreises parallelen Ebene begrenzter Körper heißt ein Kegel (Konus), der durch eine Kegelfläche und zwei solchen Ebenen begrenzter Körper ein Kegelstumpf. Der einen Kegel oder einen Kegelstumpf begrenzende Teil der Kegelfläche heißt der Mantel des Kegels oder Stumpfs, die begrenzenden Kreisflächen sind die Grundflächen und werden bei dem Kegelstumpf auch als Grundfläche und Endfläche unterschieden. Die Begriffe Spitze, Achse, Seitenlinie, Achsenschnitte eines Kegels oder Kegelstumpfs erklären sich durch die entsprechenden der Kegelfläche. Die Höhe eines Kegels ist der Abstand der Spitze von der Ebene der Grundfläche, die Höhe eines Kegelstumpfs der Abstand der beiden Endflächen.

3. Ein Kegel ist bestimmt durch den Radius r des Grundkreises, den Höhenfußpunkt und die Höhe h. Die Fig. 292 (S. 558) kann auch für den Kegel gelten, wenn für Q die Spitze S des Kegels gesetzt wird. Man hat wie für den Cylinder die Beziehung

$$h = a \sin \alpha ,$$

wenn α der Neigungswinkel der Kegelachse zur Ebene des Grundkreises ist.

Die Achsenschnitte eines Kegels sind Dreiecke, deren Grundlinie ein Durchmesser des Grundkreises ist und die außerdem die Achse als Mittellinie haben. Verschieden ist in ihnen der Winkel φ, den diese mit der Grundlinie bildet. Ist CDS ein beliebiger Achsenschnitt, so ist dessen Inhalt

$$F = a r \sin \varphi$$

und die ihn begrenzenden Seitenlinien des Mantels

$$CS = \sqrt{a^2 + r^2 - 2 a r \cos \varphi} , \quad DS = \sqrt{a^2 + r^2 + 2 a r \cos \varphi} .$$

Für $\varphi = \alpha$ erhält man den Hauptachsenschnitt, der den kleinsten Inhalt

$$F_1 = a r \sin\alpha = h r \quad ,$$

für $\varphi = 90^0$ den auf ihm normalen Achsenschnitt, der den größten Inhalt

$$F_2 = a r$$

hat, und der ein gleichschenkliges Dreieck ist. Der Hauptachsenschnitt ist begrenzt von der kleinsten und größten Seitenlinie des Mantels, deren Längen

$$s_1 = \sqrt{a^2 + r^2 - 2 a r \cos\alpha} \, , \quad s_2 = \sqrt{a^2 + r^2 + 2 a r \cos\alpha}$$

sind; während der zum Hauptachsenschnitt normale Achsenschnitt die gleichen Seitenlinien

$$s_3 = \sqrt{a^2 + r^2}$$

enthält. Der Hauptachsenschnitt ist Symmetrieebene des Kegels.

Ein Kegelstumpf ist bestimmt durch den Radius der Grundfläche, die Projektion der Achse auf die Ebene der Grundfläche, die Höhe und das Verhältnis des Radius der Endfläche zu dem der Grundfläche. Durch Erweiterung des Mantels läßt sich der Stumpf zu einem Kegel ergänzen; der angefügte Kegel ist der Ergänzungskegel. Sind die Radien der Endflächen $r_1 > r_2$ und die Höhe h, so sind, weil die Spitze des Ergänzungskegels h im Verhältnis der Radien außen teilt, die Höhe des ergänzten und des Ergänzungskegels

$$h_1 = h \frac{r_1}{r_1 - r_2} \, , \qquad h_2 = h \frac{r_2}{r_1 - r_2} \, .$$

Legt man einen zu den Endflächen parallelen Kreisschnitt vom Radius ϱ, der die Höhe des Stumpfes in die Abschnitte x_1 und x_2 teilt, so findet man durch ähnliche Rechnung wie in § 16 Nr. 3 beim Pyramidenstumpf:

$$x_1 = h \frac{r_1 - \varrho}{r_1 - r_2} \, , \qquad x_2 = h \frac{\varrho - r_2}{r_1 - r_2} \, , \qquad \frac{x_1}{x_2} = \frac{r_1 - \varrho}{\varrho - r_2} \, ;$$

$$\varrho = \frac{x_2}{h} r_1 + \frac{x_1}{h} r_2 \quad ,$$

und wenn $x_1 : x_2 = 1 : \lambda$ ist:

$$\varrho = \frac{r_1 + \lambda r_2}{1 + \lambda} \, .$$

Der Radius des Mittelschnitts des Stumpfes ergibt sich im besondern

$$\varrho = \tfrac{1}{2}(r_1 + r_2) \, .$$

4. Schneidet man einen Kegel durch eine zum Hauptachsenschnitt ABS (Fig. 296) normale Ebene, die auf ihm die Spur CD hervorbringt, so daß

$$\angle\, CAB + \angle\, CDB = 180^0 \, , \quad \text{also} \quad \angle\, SAB = \angle\, SDC \quad \text{und} \quad \angle\, SBA = \angle\, SCD$$

ist und legt durch einen beliebigen Punkt P der Schnittfigur eine Ebene parallel zur Grundfläche, die den Kegel in einem Kreise vom Durchmesser $A'B'$ schneidet, so ist die Schnittlinie PE beider Ebenen normal auf dem Hauptachsenschnitt. Nun ist

$$PE^2 = A'E \cdot B'E \, .$$

Es ist aber $\triangle CA'E \sim \triangle B'DE$ und daher

$$\frac{A'E}{CE} = \frac{DE}{B'E}, \quad A'E \cdot B'E = CE \cdot DE \quad ,$$

also

$$PE^2 = CE \cdot DE \quad ,$$

woraus folgt, daß die Schnittfigur ein Kreis mit dem Durchmesser CD ist. Außer den zum Grundkreis parallelen Schnitten hat also der Kegel wie der Cylinder (§ 17 Nr. 4) noch eine zweite Art von parallelen Kreisschnitten, die Wechselschnitte. Die Mittelpunkte dieser Kreise liegen auf einer zweiten Achse SN des Kegels, die im $\triangle ABS$ die Gegentransversale zu SN ist, weil $\angle ASM = \angle BSN$ sein muß.

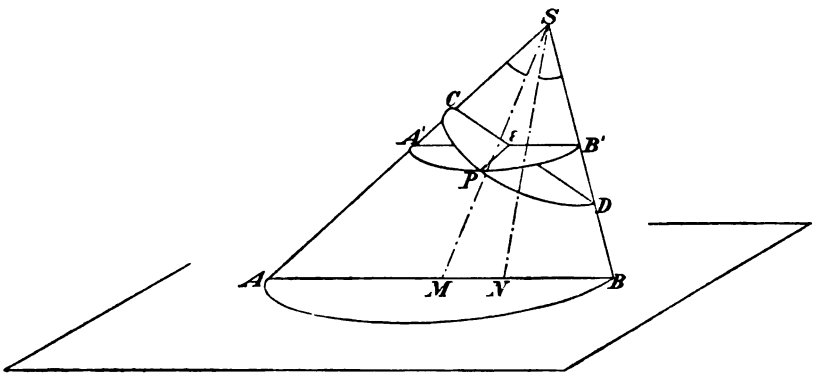


Fig. 296.

5. Einfachere Körperformen erhält man in dem besondern Falle, daß die Achse des Kegels normal zur Grundfläche ist: den geraden Kegel, und daß die Achse des Kegelstumpfs normal zu den Endflächen ist: den geraden Kegelstumpf. Dann sind die Achsenschnitte sämtlich kongruente gleichschenklige Dreiecke oder gleichschenklige Trapeze. Der gerade Kegel ist daher Rotationskegel, denn er kann erzeugt werden durch Rotation eines rechtwinkligen Dreiecks um eine Kathete. Diese wird die Achse des Rotationskegels, die andre Kathete beschreibt die Grundfläche, die Hypotenuse den Mantel des Kegels. Ist also die Hypotenuse s, die zugleich Seitenlinie des Mantels ist, so gilt die Beziehung

$$r^2 + h^2 = s^2 \quad ;$$

auch läßt sich aus zwei der drei Größen r, h, s eine Funktion des Winkels bestimmen, den die Seitenlinie mit der Grundfläche bildet. Durch den Achsenschnitt ist der Kegel selbst völlig bestimmt. Ebenso läßt sich ein gerader Kegelstumpf durch Rotation eines rechtwinkligen Trapezes um die auf den parallelen Seiten senkrechte Seite erzeugen. Zwischen den Radien $r_1 > r_2$ der Endflächen, der Höhe h und der Seitenlinie s des Stumpfes gilt dann die Beziehung

$$(r_1 - r_2)^2 + h^2 = s^2 \quad .$$

6. In einen Kegel lassen sich Pyramiden einschreiben, so daß die Spitze einer solchen Pyramide mit der Spitze des Kegels zusammenfällt und die Grundfläche der Pyramide der Grundfläche des Kegels eingeschrieben ist. Die Kanten einer solchen Pyramide sind Seitenlinien des Kegels, die Seitenflächen der Pyramide Schnittflächen des Kegels. Die Pyramide ist schief oder gerade, je nachdem der Kegel schief oder gerade ist.

Um einen Kegel lassen sich Pyramiden beschreiben, so daß die Spitze einer solchen Pyramide mit der Spitze des Kegels zusammenfällt und die Grundfläche der Pyramide der Grundfläche des Kegels umschrieben ist. Die Seitenflächen der Pyramide sind Tangentialebenen des Kegels.

Jeder Kegel kann als die Grenze betrachtet werden, der sich eine eingeschriebene oder umschriebene Pyramide bei unendlicher Zunahme der Seitenzahl ohne Ende nähert.

Den eingeschriebenen und umschriebenen Pyramiden eines Kegels entsprechen in ganz gleicher Weise eingeschriebene und umschriebene Pyramidenstumpfe eines Kegelstumpfs.

§ 19. Die Kugel.

1. In § 1 ist die Kugelfläche bereits definiert worden als die Fläche, deren Punkte gleich weit von einem festen Punkte, dem Mittelpunkt, entfernt sind. Diese Entfernung ist der Radius der Kugel. Da man von dem Mittelpunkt nach allen Richtungen Radien ziehen kann, so kann man auch einen solchen ziehen, der die Verlängerung eines Radius über den Mittelpunkt hinaus ist und der ebenfalls einen Punkt der Fläche treffen muß. Zwei solche Radien zusammen bilden einen Durchmesser und seine Endpunkte sind Diametralpunkte der Kugelfläche. Jede durch den Mittelpunkt gehende Verbindungslinie zweier Punkte der Fläche muß also durch den Mittelpunkt halbiert werden. Daraus ergibt sich die Eigenschaft, daß die Kugelfläche eine geschlossene Fläche sein, also schon selbst einen Raum vollständig begrenzen muß. Der von einer Kugelfläche begrenzte Körper ist die Kugel. Wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist, verwendet man häufig den Namen Kugel auch für die Kugelfläche. Die Kugel ist durch ihren Mittelpunkt und den Radius vollständig bestimmt.

2. Jede Ebene, die durch den Mittelpunkt der Kugel geht, schneidet diese in einem größten Kreise, dessen Mittelpunkt der Kugelmittelpunkt, dessen Radius der Kugelradius ist. Alle größten Kreise der Kugel sind kongruent. Zieht man in einem größten Kreise einen Durchmesser, so kann man durch diesen unendlich viele größte Kreise legen und da alle kongruent sind, so folgt, daß die Kugel durch Rotation eines Halbkreises um den begrenzenden Durchmesser erzeugt werden kann. Der Durchmesser ist dann die Achse der Kugel, seine Diametralpunkte die Pole und die Achsenschnitte, die größten Kreise, die alle möglichen Lagen des rotierenden Halbkreises in sich fassen, die Meridiane der Kugel. Diese, wie auch noch weitere Benennungen bei der Kugel sind aus der Geographie herübergenommen, wo sie sich auf die Erdkugel beziehen, die eine physikalische Achse hat, um die sie rotiert. In der Stereometrie kann dagegen jeder Durchmesser als Achse der Kugel festgelegt werden. Die Kugel ist durch einen Achsenschnitt, von dem nur der rotierende Halbkreis gezeichnet zu werden braucht, vollständig bestimmt.

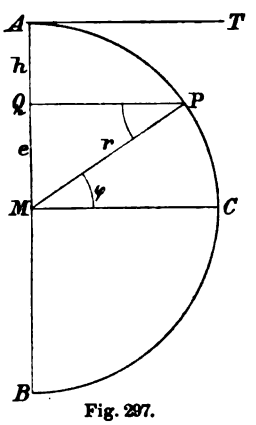


Fig. 297.

3. Es sei in Fig. 297 AB die Kugelachse, also der über AB um den Mittelpunkt M mit dem Radius $MA = MB = r$ beschriebene Halbkreis der halbe Achsenschnitt einer Kugel. Zieht man von einem beliebigen Punkte P des rotierenden Halbkreises die Senkrechte $PQ = \varrho$, die Ordinate des Punktes P auf die Achse, so wird diese in die beiden Abschnitte, Abscissen, $AQ = h$ und $BQ = 2r - h$ geteilt. Bei der Rotation der Figur um die Achse AB beschreibt PQ einen Kreis, dessen Ebene

normal zur Achse und dessen Mittelpunkt Q, dessen Radius PQ ist. Die Ebene dieses Kreises kann man ansehen als Schnittebene einer Kugel, die normal auf einem Durchmesser ist; da man aber zu jeder solchen Schnittebene einen normalen Durchmesser der Kugel ziehen kann, so ergibt sich der Satz:

Jeder ebene Schnitt durch eine Kugel ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf dem zur Schnittebene normalen Kugeldurchmesser liegt und umgekehrt:

Die Senkrechte vom Kugelmittelpunkt auf einen ebenen Schnitt der Kugel schneidet diesen in seinem Mittelpunkt.

Die Ordinaten aller Punkte des rotierenden Halbkreises beschreiben ein System von Parallelkreisen der Kugel, die im allgemeinen kleiner sind als die größten Kreise. Nur der durch die Ordinate MC im Mittelpunkte, die gleich dem Radius ist, beschriebene Parallelkreis ist ein größter Kugelkreis: er heißt der Aequator der Kugel. Jeder größte Kreis einer Kugel kann als Aequator betrachtet werden; der auf ihm senkrechte Kugeldurchmesser ist dann die Achse der Kugel und seine Endpunkte sind die Pole des größten Kreises. Irgend einer der Parallelkreise ist bestimmt durch die Abscisse h, denn es ist sein Radius

$$\varrho = \sqrt{h\,(2\,r - h)} \quad ,$$

oder durch die Entfernung $MQ = e$ vom Mittelpunkt der Kugel:

$$\varrho = \sqrt{r^2 - e^2} \quad ,$$

oder auch durch den Winkel $PMC = \varphi$, die Breite des Punktes P, d. i. den Neigungswinkel des Kugelradius MP zur Ebene des Aequators:

$$\varrho = r \cos\varphi \quad .$$

In dem besondern Falle $h = 0$, also $e = r$, $\varphi = 90^0$ wird $\varrho = 0$, d. h. die Tangente AT in dem Pole A an den rotierenden Halbkreis beschreibt eine Ebene, die mit der Kugel nur den Punkt A gemeinsam hat. Diese Ebene ist eine Tangentialebene der Kugel und A ihr Berührungspunkt und man hat den Satz:

Der Durchmesser der Kugel, der durch den Berührungspunkt geht, ist normal auf der Tangentialebene und umgekehrt:

Die Senkrechte vom Kugelmittelpunkt auf eine Tangentialebene geht durch den Berührungspunkt.

Würde man auf AB eine Senkrechte errichten, die weiter als AT vom Kugelmittelpunkt entfernt ist, so würde die Ebene, die sie beschreibt, keinen Punkt mit der Kugel gemein haben, so daß sich der Satz ergibt:

Eine Ebene schneidet, berührt oder meidet eine Kugel, je nachdem ihre Entfernung vom Mittelpunkt der Kugel kleiner als der Radius, gleich dem Radius oder größer als dieser ist.

4. Drei Punkte einer Kugelfläche können niemals in einer Geraden liegen; denn durch drei Punkte läßt sich eine Ebene legen und da diese die Kugelfläche in einem Kreise schneidet, auf dem die drei Punkte gleichzeitig liegen müßten, so ist die Unmöglichkeit des Gegenteils der vorstehenden Behauptung klar. Auf einer Kugelfläche läßt sich daher keine gerade Linie ziehen; die Kugelfläche ist eine krumme Fläche, die sich von den früher behandelten krummen (Cylinder- und Kegel-) Flächen dadurch wesentlich unterscheidet, daß sich durch keinen ihrer Punkte eine Gerade in der Fläche ziehen läßt. Sie kann daher auch nicht, wie diese, durch Bewegung einer Geraden erzeugt werden.

Durch drei auf einer Kugelfläche gegebene Punkte ist ein Kreis auf der Kugel bestimmt, denn durch drei Punkte ist eine Schnittebene der Kugel bestimmt. Dieser Kreis ist im allgemeinen kleiner als ein größter Kreis, denn ein

größter Kreis ist schon durch zwei Punkte der Kugelfläche und den Mittelpunkt bestimmt, oder durch zwei auf einer Kugelfläche gegebene Punkte läßt sich ein größter Kreis legen, und zwar nur einer, falls nicht jene beiden Punkte Diametralpunkte sind. Durch einen gegebenen Punkt auf einer Kugelfläche lassen sich unendlich viele größte Kreise legen, deren Ebenen einander sämtlich in dem durch diesen Punkt gehenden Durchmesser schneiden müssen. Überhaupt müssen zwei größte Kreise einer Kugel einander immer in Diametralpunkten schneiden, und es halbieren also sowohl ihre Umfänge als ihre Flächen einander.

5. Ein von Bogen größter Kreise einer Kugel begrenzter Teil ihrer Oberfläche heißt eine sphärische Figur; die Kreisbogen sind ihre Seiten und die Schnittpunkte der Kreisbogen die Eckpunkte. Die Betrachtung solcher sphärischen Figuren, die analog der Behandlung ebener Vielecke vorgenommen werden kann, heißt Sphärik. Berechnungen an diesen Figuren können mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie gemacht werden, deren Grundformeln in § 12 entwickelt worden sind.

Die einfachste sphärische Figur ist das sphärische Zweieck, d. h. ein von Hälften zweier größten Kreise begrenzter Teil der Kugelfläche. Die Ebenen dieser Kreise bilden an dem Durchmesser, der ihre Schnittlinie ist, einen Neigungswinkel, welcher der Centriwinkel oder schlechthin der Winkel des Zweiecks heißt. Zieht man durch einen der Eckpunkte des Zweiecks an jeden der Halbkreise die Tangente, so ist der Winkel dieser Tangenten der Winkel des Zweiecks, denn seine Schenkel stehen auf dem gemeinschaftlichen Durchmesser senkrecht. Der Winkel eines sphärischen Zweiecks kann jeden Wert zwischen 0^0 und 360^0 haben.

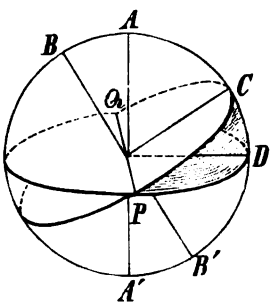


Fig. 298.

Konstruiert man zu jedem von zwei größten Kreisen PDQ, PCQ (Fig. 298) die Pole A, A' und B, B', so läßt sich durch diese ein dritter größter Kreis legen, dessen Ebene senkrecht zu den Ebenen der beiden ersten Kreise steht und diese in den Schenkeln des Winkels des Zweiecks schneidet. Es kann daher der Bogen CD dieses Kreises, der zwischen den zwei Seiten irgend eines der durch die ersten Kreise gebildeten sphärischen Zweiecks liegt, zur Messung des Winkels dieses Zweiecks dienen.

Solange nur von einem einzigen größten Kreise die Rede ist, kann zwischen seinen beiden Polen im allgemeinen kein Unterschied gemacht werden; sobald aber ein zweiter größter Kreis dazu tritt, und ein bestimmtes sphärisches Zweieck $PDCQ$ ins Auge gefaßt wird, kann man die beiden Pole eines jeden der Kreise dadurch unterscheiden, daß immer einer mit jenem Zweieck auf derselben durch diesen Kreis gebildeten, der andre auf der entgegengesetzten Halbkugel liegt. Jener möge dem Zweieck oder dem zugehörigen Flächenwinkel zugewandt, dieser ihm abgewandt heißen. Es gilt dann der Satz: Der Bogen des größten Kreises zwischen einem zugewandten und einem abgewandten Pol ist dem Winkel des Zweiecks gleich, der Bogen zwischen den beiden zugewandten oder zwischen den beiden abgewandten Polen ergänzt diesen Winkel zu 180^0. Sind nämlich A und B' die dem Zweieck $PDCQ$ zugewandten, also A' und B die ihm abgewandten Pole, so ist

$$\text{Bogen } AC + CD = \text{Bogen } BA + AC = 90^0 \quad ,$$

also

$$\text{Bogen } CD = \text{Bogen } BA \quad ,$$

und

$$\text{Bogen } ADB' = 180^0 - BA = 180^0 - CD \quad .$$

6. Eine von drei Bogen größter Kreise einer Kugel begrenzte sphärische Figur ist ein sphärisches Dreieck. Dasselbe hat also drei Seiten, drei Eckpunkte und drei Winkel. Ergänzt man jede Seite eines sphärischen Dreiecks zum vollständigen Kreise, so wird die ganze Kugelfläche in acht sphärische Dreiecke geteilt, die so beschaffen sind, daß jede Seite kleiner als ein Halbkreis und jeder Winkel kleiner als ein gestreckter ist. Jedes sphärische Dreieck andrer Art kann also durch Erweiterung einer oder mehrerer seiner Seiten in solche Dreiecke zerlegt werden, in denen diese Bedingungen erfüllt sind, und es dürfen daher im folgenden ausschließlich Dreiecke dieser Art vorausgesetzt werden. In diesem Falle ist jedem sphärischen Dreieck eine hohle Ecke am Mittelpunkte der Kugel zugeordnet (vgl. § 8 Nr. 1), deren Ebenen die Ebenen der Seiten des Dreieck sind und deren ebene Winkel als Centriwinkel durch die zugehörigen Seiten gemessen werden, während die Winkel des Dreiecks die Neigungswinkel der Ebenen der Ecke sind. Man kann daher die über die Ecken aufgestellten Sätze ohne weiteres auf die sphärischen Dreiecke übertragen, und es gelten also die folgenden Sätze:

Gleichen Seiten eines sphärischen Dreiecks liegen gleiche Winkel gegenüber, oder die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen sphärischen Dreiecks sind einander gleich. In jedem gleichseitigen sphärischen Dreieck sind alle drei Winkel gleich groß.

Umgekehrt liegen gleichen Winkeln eines sphärischen Dreiecks gleiche Seiten gegenüber; sind alle drei Winkel gleich groß, so ist das Dreieck gleichseitig.

Dagegen liegt der größern von zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks ein größerer Winkel und umgekehrt dem größern von zwei Winkeln die größere Seite gegenüber. Der größten von allen drei Seiten liegt also der größte Winkel und dem größten Winkel die größte Seite gegenüber.

Die Summe zweier Seiten eines sphärischen Dreiecks ist größer, die Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte Seite. — Die Summe aller drei Seiten ist kleiner als vier Rechte.

Zu jedem sphärischen Dreieck gehört ein zweites auf derselben Kugelfläche, dessen Eckpunkte Pole der Seiten des ersten sind und dessen Seiten die entsprechenden Winkel des Urdreiecks zu 180^0 ergänzen. Dieses Dreieck ist das Polardreieck des Urdreiecks. Die ihm und dem Urdreieck zugeordneten Ecken am Mittelpunkte sind Polarecken. Hieraus erklärt sich übrigens auch der schon in § 38 Nr. 3 gebrauchte Name Polarecke. Jedes sphärische Dreieck ist selbst Polardreieck zu seinem Polardreieck, und seine Seiten betragen mit den entsprechenden Winkeln des Polardreiecks zusammen 180^0.

Die Summe der Winkel eines sphärischen Dreiecks ist größer als zwei und kleiner als sechs Rechte.

Von den sieben sphärischen Dreiecken, die zu einem gegebenen durch Erweiterung seiner Seiten zu vollständigen Kreisen entstehen, liegen drei so, daß sie mit dem gegebenen je eine Seite gemeinsam haben; drei andre besitzen je einen Winkel, der Scheitelwinkel zu einem solchen des ersten Dreiecks ist; diese sechs Dreiecke sind Nebendreiecke des Urdreiecks. Das siebente liegt so, daß jeder seiner Eckpunkte mit einem Eckpunkt des Urdreiecks auf demselben Durchmesser liegt; es stimmt mit diesem in je zwei Seiten und in je zwei Winkeln überein, denn diese sind paarweise Scheitelwinkel. Die entsprechenden Stücke folgen jedoch in umgekehrter Ordnung aufeinander, und die beiden Dreiecke sind daher nicht kongruent, sondern symmetrisch. Sie sind Gegendreiecke.

Sphärische Dreiecke, die auf derselben Kugel oder auf kongruenten Kugeln liegen, sind kongruent oder symmetrisch, wenn sie übereinstimmen: 1) in den drei Seiten; 2) in den drei Winkeln; 3) in zwei Seiten und dem eingeschlosssenen

Winkel; 4) in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln; 5) in zwei Seiten und dem einer Seite gegenüberliegenden Winkel, falls die andern Winkel nicht zusammen zwei Rechte betragen; 6) in einer Seite, einem an- und dem gegenüberliegenden Winkel, falls die andern Seiten nicht zusammen einem größten Halbkreis gleich sind.

7. Wir fügen diesen Sätzen zur Vervollständigung noch die nachstehenden zu, die sich dann auch vom sphärischen Dreieck auf die Ecke übertragen lassen, um neben dem bisher befolgten Gang auch den umgekehrten als möglich auszuführen.

Ein gleichschenkliges sphärisches Dreieck wird durch den größten Kreis, der den Winkel an der Spitze halbiert, in zwei symmetrische Dreiecke geteilt, denn die beiden entstehenden Dreiecke *ACD*, *BCD* (Fig. 299) stimmen bei umgekehrter Ordnung der entsprechenden Stücke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein. Daher halbiert der winkelhalbierende Bogen auch die Grundlinie des Dreiecks und steht senkrecht auf ihr. — Umgekehrt muß, wie ebenfalls mit Hilfe der Symmetrie der entstehenden Dreiecke leicht bewiesen werden kann, der von der Spitze *C* eines gleichschenkligen sphärischen Dreiecks senkrecht zur Grundlinie *AB* gezogene größte Kreisbogen die Grundlinie und den Winkel an der Spitze halbieren, ferner der größte Kreisbogen, der die Spitze mit dem Halbierungspunkt der Grundlinie verbindet, zur Grundlinie senkrecht stehen und den Winkel an der Spitze halbieren und endlich läßt sich indirekt beweisen, daß der auf der Grundlinie in ihrem Halbierungspunkte senkrechte größte Kreis durch die Spitze geht und den Winkel an der Spitze halbiert.

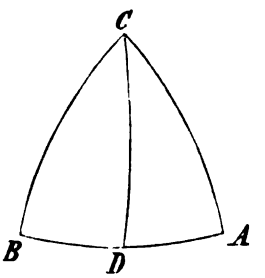


Fig. 299.

Die Spitzen aller gleichschenkligen sphärischen Dreiecke über derselben Grundlinie liegen hiernach auf dem die Grundlinie normal halbierenden größten Kreise. Umgekehrt ist jeder Punkt dieses Kreises von den beiden Endpunkten *A*, *B* der gegebenen Grundlinie gleich weit entfernt, wenn man unter der Entfernung zweier Punkte einer Kugelfläche den zwischen diesen Punkten liegenden Bogen des durch sie gehenden größten Kreises versteht, oder jener größte Kreis ist der geometrische Ort der von den gegebenen Punkten *A*, *B* gleich weit entfernten Punkte der Kugelfläche. Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes folgt, ähnlich wie bei dem ebenen Dreieck, daß die die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks normal halbierenden größten Kreise einander in einem Punkte schneiden, der von den drei Eckpunkten des Dreiecks gleich weit entfernt ist.

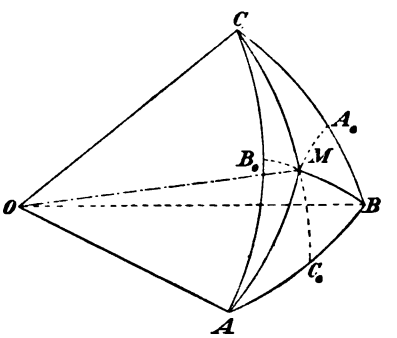


Fig. 300.

In dem sphärischen Dreieck *ABC* (Fig. 300) sei dieser Punkt *M*. Durch die drei Eckpunkte läßt sich eine Ebene legen, die die Kugel in einem Kreise schneidet, welcher der Umkreis des sphärischen Dreiecks genannt werden kann. Es ist dann *M* als der sphärische Mittelpunkt und jeder der Bogen $MA = MB = MC = r$ als der sphärische Radius dieses Umkreises zu bezeichnen. In der zugeordneten Ecke *OABC* würde *OM* die aus dem Scheitel der Ecke gezogene Gerade sein, die mit den Kanten der Ecke gleiche Winkel bildet, diese also in drei gleichschenklige Ecken zerlegt.

Da die drei sphärischen Dreiecke ABM, BCM, CAM gleichschenklig sind, so müssen ihre Basiswinkel gleich sein. Setzt man die schematische Bezeichnung der Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks (§ 8 Nr. 1) voraus, und sind die an den Seiten a, b, c liegenden Basiswinkel der gleichschenkligen sphärischen Dreiecke entsprechend ξ, η, ζ so ist

$$\xi + \eta = \gamma\,, \quad \xi + \zeta = \beta\,, \quad \eta + \zeta = \alpha \quad .$$

Aus der Addition dieser drei Gleichungen folgt, wenn $\alpha + \beta + \gamma = 2\sigma$ gesetzt wird:

$$\xi + \eta + \zeta = \sigma\,, \quad \xi = \sigma - \alpha\,, \quad \eta = \sigma - \beta\,, \quad \zeta = \sigma - \gamma \quad .$$

Ist nun MC_0 der den Winkel AMB normal halbierende Bogen, so ist in dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck AC_0M nach § 12 Nr. 1, 5):

$$\cos\zeta = \cos(\sigma - \gamma) = \frac{\tan\frac{1}{2}c}{\tan r}$$

oder

$$\cot r = \cos(\sigma - \gamma)\cot\tfrac{1}{2}c \quad .$$

Nach § 12 Nr. 3, 11) ist aber

$$\cot\tfrac{1}{2}c = \frac{\mathrm{P}}{\cos(\sigma - \gamma)}\,,$$

folglich

$$\cot r = \mathrm{P} = \sqrt{\frac{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{-\cos\sigma}} = \frac{\Sigma}{-\cos\sigma} \quad .$$

8. Der größte Kreis, der den von zwei andern größten Kreisen gebildeten Winkel halbiert, ist der geometrische Ort der von den andern Kreisen gleich weit entfernten Punkte der Kugelfläche; denn die von einem Punkte des halbierenden Kreises senkrecht zu den andern Kreisen gezogenen Bogen müssen infolge der Symmetrie der entstehenden rechtwinkligen Dreiecke gleich sein und umgekehrt, sind diese Bogen gleich, so muß durch den entsprechenden Kreis der betreffende Winkel halbiert werden. — Hieraus ergibt sich weiter, daß die drei größten Kreise, welche die drei Winkel eines sphärischen Dreiecks halbieren, einander in einem Punkte schneiden, der von den drei Seiten des Dreiecks gleich weit entfernt ist. Durch Halbierung der Außenwinkel des Dreiecks erhält man noch drei entsprechende Punkte.

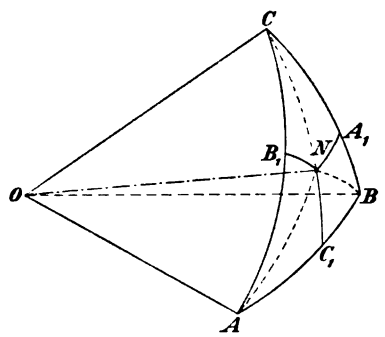


Fig. 301.

In dem sphärischen Dreieck ABC (Fig. 301) sei N der erste dieser Punkte; dann liegen die Fußpunkte A_1, B_1, C_1 der von N senkrecht zu den Seiten gezogenen Bogen in einer Ebene, die die Kugel in dem Inkreis des sphärischen Dreiecks schneidet. Es ist daher N der sphärische Mittelpunkt, und jeder der Bogen $NA_1 = NB_1 = NC_1 = \varrho$ der sphärische Radius dieses Inkreises. In der zugeordneten Ecke $OABC$ ist ON die durch den Scheitel gehende Gerade, die mit den drei Ebenen der Ecke gleiche Neigungswinkel bildet. Es seien nun die Abschnitte der Seiten $AB_1 = AC_1 = x$, $BA_1 = BC_1 = y$, $CA_1 = CB_1 = z$, so ist

$$x + y = c\,, \quad x + z = b\,, \quad y + z = a \quad .$$

Addiert man diese drei Gleichungen und setzt $a + b + c = 2s$, so erhält man

$$x + y + z = s\,, \quad x = s - a\,, \quad y = s - b\,, \quad z = s - c \quad .$$

Für das rechtwinklige Dreieck AC_1N erhält man durch Anwendung der Formeln 4) und 5) in § 12 Nr. 1

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sin\varrho}{\sin AN}, \quad \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\tan x}{\tan AN},$$

deren Division

$$\tan\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sin\varrho\cos x}{\cos AN\sin x}$$

liefert. Nun ist aber nach § 12 Nr. 1, 2):

$$\cos AN = \cos\varrho\cos x,$$

also ist

$$\tan\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\tan\varrho}{\sin x}, \quad \tan\varrho = \sin(s-a)\tan\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Nach § 12 Nr. 2, 6) ist aber

$$\tan\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{R}{\sin(s-a)};$$

es findet sich daher

$$\tan\varrho = R = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}} = \frac{S}{\sin s}.$$

Bezeichnet man die Stücke des Polardreiecks mit denselben Buchstaben unter Hinzufügung von Strichen, so ist

$$\tan\varrho' = \frac{S'}{\sin s'};$$

nun ist aber $S' = \Sigma$, $\sin s' = -\cos\sigma$, folglich ist

$$\tan\varrho' = \frac{\Sigma}{-\cos\sigma} = \cot r,$$

d. h. der sphärische Radius des Umkreises eines sphärischen Dreiecks und der sphärische Radius des Inkreises des Polardreiecks sind Komplemente.

Auch die Halbierungslinien je zweier Außenwinkel eines sphärischen Dreiecks schneiden sich mit der Halbierungslinie des dritten Innenwinkels in je einem Punkte. Diese drei Punkte sind die Mittelpunkte der drei sphärischen Ankreise.

9. Noch andre Sätze über das sphärische Dreieck, die solchen vom ebenen Dreieck analog sind und in entsprechender Weise bewiesen werden können, lassen sich in großer Anzahl aufstellen. Besondere Erwähnung verdienen noch die folgenden:

Stimmen zwei sphärische Dreiecke einer Kugel in zwei Seiten, aber nicht in den eingeschlossenen Winkeln überein, so liegt dem größern Winkel die größere Seite gegenüber. — Stimmen zwei sphärische Dreiecke einer Kugel in zwei Seiten aber nicht in den dritten Seiten überein, so liegt der größern Seite der größere Winkel gegenüber.

Daß in vielen Eigenschaften sphärischer Dreiecke eine Analogie mit Eigenschaften ebener Dreiecke nicht besteht, kann als Folge davon betrachtet werden, daß die Summe der Winkel eines sphärischen Dreiecks nicht, wie bei dem ebenen, einen konstanten Wert hat. Daher ist zunächst eine Einteilung der sphärischen Dreiecke nach den Winkeln in der Weise wie bei ebenen Dreiecken nicht möglich; es kann ein sphärisches Dreieck zwei oder drei rechte Winkel, oder gleichzeitig einen rechten und einen stumpfen Winkel haben u. dgl. m.

Doch nennt man solche sphärische Dreiecke rechtwinklig, die einen rechten Winkel haben und stellt ihnen die schiefwinkligen als solche gegenüber, in denen kein Winkel ein rechter ist. In jedem Dreieck, das drei rechte Winkel hat, sind alle Seiten Quadranten und umgekehrt, in jedem Dreieck, dessen drei Seiten Quadranten sind, müssen auch alle drei Winkel rechte sein. Ferner müssen in jedem Dreieck, das zwei rechte Winkel hat, die diesem gegenüberliegenden Seiten Quadranten sein, und die dritte Seite gibt dann das Bogenmaß des dritten Winkels. Auch dieser Satz läßt sich umkehren.

Um ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck ABC (Fig. 302) zu konstruieren, für das ein Winkel A durch zwei einander schneidende größte Kreise gegeben ist, hat man durch die Achse PP' eines dieser Kreise irgend einen dritten größten Kreis PCB zu legen. Es sei ferner PDE der zu den beiden ersten senkrechte größte Kreis, also DE das Bogenmaß des Winkels DAE, so ist für einen spitzen Winkel A dieser Bogen kleiner als 90^0. Jeder andre auf AE senkrechte Bogen CB aber ist kleiner als DE, denn PMD ist der Neigungswinkel von PM gegen die Ebene DCM, und also kleiner als der Winkel PMC. Mithin ist der Bogen CB um so mehr kleiner als 90^0. Ist dagegen der Winkel A ein stumpfer, so ergibt eine entsprechende Untersuchung, daß der Bogen DF, der ihn mißt, größer als 90^0 und kleiner als jeder andre in Frage kommende Bogen, die dem Winkel A gegenüberliegende Kathete also jedenfalls größer als 90^0 ist. Somit ergibt sich der Satz:

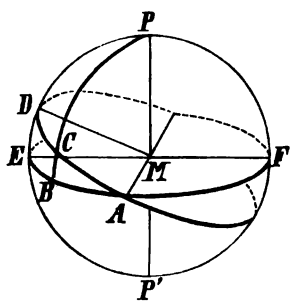


Fig. 302.

In jedem rechtwinkligen sphärischen Dreieck ist jede Kathete mit dem gegenüberliegenden Winkel gleichartig, d. h. zugleich kleiner oder größer als 90^0.

Soll ferner bei einem spitzen Winkel A eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks ABC nicht bloß die Kathete BC, sondern auch die Kathete BA kleiner als 90^0 sein, so muß B zwischen A und E, also C zwischen A und D liegen, also die Hypotenuse AC ebenfalls kleiner als 90^0 sein. Für eine zweite Kathete, die größer als 90^0 ist, ergibt sich entsprechend auch eine Hypotenuse, die größer als DA oder ebenfalls größer als 90^0 ist. Wenn ferner der Winkel A als stumpf angenommen wird, so wird in gleicher Weise die Hypotenuse kleiner oder größer als 90^0, je nachdem die andre Kathete stumpf oder spitz ist. Man hat also folgenden Satz gefunden:

Sind die Katheten eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks gleichartig, so ist die Hypotenuse kleiner als 90^0, sind sie ungleichartig, so ist die Hypotenuse größer als 90^0, oder mit andern Worten:

Ist eine Kathete kleiner als 90^0, so ist die andre mit der Hypotenuse gleichartig, ist eine Kathete größer als 90^0, so ist die andre mit der Hypotenuse ungleichartig

Mit Hilfe der Polardreiecke lassen sich aus den vorstehenden Sätzen entsprechende für ein sphärisches Dreieck ableiten, in dem eine Seite ein Quadrant ist. Ein solches Dreieck kann man ein rechtseitiges nennen.

Jedes schiefwinklige sphärische Dreieck läßt sich durch einen größten Kreisbogen, der von einem beliebigen Eckpunkt des Dreiecks aus senkrecht zur gegenüberliegenden Seite gezogen wird und der eine sphärische Höhe des sphärischen Dreiecks gibt, als Summe oder Differenz zweier rechtwinkligen Dreiecke darstellen. Aus den vorstehenden Sätzen folgt unmittelbar, daß der Fußpunkt dieser Höhe auf die gegenüberliegende Seite selbst oder auf deren Verlängerung fällt, je nachdem die dieser Seite anliegenden Winkel gleichartig oder ungleichartig sind.

In derselben Weise, wie die Eigenschaften des sphärischen Dreiecks und seiner Stücke, lassen sich diejenigen sphärischer Vierecke und Vielecke betrachten. Eine besondere Erwähnung verdienen die regelmäßigen sphärischen Vielecke, deren Seiten und deren Winkel sämtlich gleich sind, denen also regelmäßige Ecken (vgl. § 13 Nr. 2) am Mittelpunkt der Kugel entsprechen. In jedem solchen Vieleck gibt es einen Punkt, dessen sphärische Entfernungen von allen Seiten einander gleich sind. Derselbe Punkt ist in gleicher Weise von allen Eckpunkten des Vielecks gleich weit entfernt. Er ist der sphärische Mittelpunkt des sphärischen Um- und des sphärischen Inkreises des regelmäßigen Vielecks.

§ 20. Kugel mit Polyedern, Cylinder und Kegel.

1. Errichtet man im Mittelpunkte eines Kreises eine Normale zu seiner Ebene, so ist jeder Punkt dieser Normalen von allen Kreispunkten gleich weit entfernt; er kann daher als Mittelpunkt einer Kugelfläche betrachtet werden, die den Kreis in sich enthält. Da nun ein Kreis durch drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, bestimmt ist, so folgt der Satz:

Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kugeln, die durch drei Punkte gehen, ist die Normale, die im Mittelpunkt des durch die drei Punkte bestimmten Kreises zur Kreisebene errichtet wird.

Ist noch ein zweiter Kreis gegeben, den die Kugelfläche in sich enthält, so ist der Mittelpunkt der Kugel als Schnittpunkt der beiden Normalen zu den Kreisebenen in ihren Mittelpunkten bestimmt. Zwei solche Kreise erhält man, wenn außer drei Punkten A, B, C noch ein vierter Punkt D der Kugel, der nicht auf derselben Ebene liegt, gegeben ist. Verbindet man (Fig. 303) A mit B und beide Punkte mit C und D und konstruiert die Umkreismittelpunkte M und N der Dreiecke ABC und ABD, so liegen diese in den Mittelsenkrechten MK und NK. Diese bestimmen aber die Ebene des Neigungswinkels der beiden Dreiecksebenen, die auf beiden normal ist und daher die in M und N auf den Dreiecksebenen errichteten Normalen in sich enthält, diese schneiden sich also in einem Punkte O, der sowohl von A, B, C als von A, B, D gleich weit entfernt ist. O ist also der Mittelpunkt der Kugel, die durch die vier Punkte A, B, C, D geht. Es gilt also der Satz:

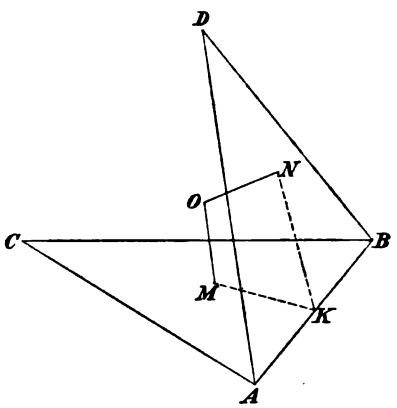


Fig. 303.

Eine Kugel ist bestimmt durch vier Punkte, die nicht in einer Ebene liegen.

Da diese vier Punkte die Ecken eines Tetraeders bilden, so hat also jedes Tetraeder eine Umkugel. Beschreibt man um die vier Flächen eines Tetraeders Kreise und errichtet im Mittelpunkt eines jeden eine Normale zur Kreisebene, so schneiden sich diese vier Normalen in einem Punkte, dem Mittelpunkt der Umkugel des Tetraeders. Der Radius der Umkugel ist die Entfernung dieses Schnittpunktes von einer Ecke.

Die Halbierungsebene des Neigungswinkels zweier Ebenen enthält die Punkte, die von beiden Ebenen gleich weit entfernt ist. Jeder dieser Punkte ist also Mittelpunkt einer Kugel, die beide Ebenen berührt. Halbiert man in einer Ecke die drei Winkel, so schneiden sich die drei Halbierungsebenen in einer durch den Scheitel gehenden Geraden, die alle Punkte enthält, die von den Ebenen

der Ecke gleich weit entfernt sind, also den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kugeln bildet, die die Ebenen der Ecke berühren. Konstruiert man in den vier Ecken eines Tetraeders diese vier Geraden, so müssen sich diese in einem Punkte schneiden, der von den vier Flächen des Tetraeders gleich weit entfernt ist. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt einer Kugel, der die vier Tetraederflächen berührt, der Mittelpunkt der Inkugel des Tetraeders.

Da es bei zwei unbegrenzten Ebenen zwei zueinander normale Halbierungsebenen der supplementären Neigungswinkel gibt, so bilden beide den geometrischen Ort der Mittelpunkte von Kugeln, die beide Ebenen berühren. Bei einem Tetraeder kann man nicht nur die innerhalb des Tetraeders liegenden Neigungswinkel seiner Seitenflächen durch eine Ebene halbieren, sondern auch deren Außenwinkel. Auf diese Art erhält man noch vier Kugeln, die je eine Seitenfläche selbst und die drei andern in ihren Erweiterungen berühren. Man kann sie die Ankugeln des Tetraeders nennen.

Im allgemeinen gibt es also fünf Kugeln, die vier Ebenen berühren.

2. Ein Polyeder mit mehr als vier Ecken und vier Flächen hat im allgemeinen weder eine Um- noch eine Inkugel. Nur wenn es einen Punkt gibt, der von allen Ecken des Polyeders gleich weit entfernt ist, hat dieses eine Umkugel, deren Mittelpunkt dieser Punkt ist und nur wenn ein Punkt existiert, der von allen Flächen gleich weit entfernt ist, hat das Polyeder eine Inkugel mit diesem Punkte als Mittelpunkt.

So läßt sich um ein gerades dreiseitiges Prisma und um ein regelmäßiges mehrseitiges Prisma eine Kugel beschreiben; ihr Mittelpunkt ist der Halbierungspunkt der Geraden zwischen den Mittelpunkten der Endflächen.

Um ein rechtwinkliges Parallelepiped läßt sich eine Kugel beschreiben, deren Mittelpunkt der Schnittpunkt der Diagonalachsen ist. Um eine Pyramide läßt sich eine Kugel beschreiben, wenn sich um ihre Grundfläche ein Kreis beschreiben läßt. Eine regelmäßige Pyramide hat eine Um- und eine Inkugel.

Bei einem regelmäßigen Polyeder (§ 14 Nr. 6) mögen drei in einer Ecke A zusammenstoßende Flächen 1, 2, 3 (Fig. 304) sein; 1 und 2 stoßen in der Kante AB, deren Mittelpunkt K ist, 2 und 3 in der Kante AC zusammen. Sind nun M und N die Mittelpunkte der regelmäßigen Vielecke 1 und 2, so bestimmen die Mittelsenkrechten MK und NK die Ebene des Neigungswinkels von 1 und 2, welche die Normalen in M und N auf diesen Ebenen in sich enthalten muß. Diese schneiden sich also in einem Punkte O; fällt man von diesem Punkte die Senkrechte OP auf die Ebene 3, so bestimmen ON und OP die Ebene des Neigungswinkels von 2 und 3, welche AC in L schneidet; NL und PL sind daher senkrecht zu AC und da N der Mittelpunkt der Fläche 2 ist, so ist L der Mittelpunkt von AC und $NK = NL$. Die beiden Vierecke $ONKM$ und $ONLP$ haben also diese beiden gleichen Seiten und die Seite ON gemeinsam und stimmen außerdem in den rechten Winkeln ONK und ONL, OMK und OPL und in den Winkeln NKM und NLP, den Neigungswinkeln der anstoßenden Polyederflächen, überein. Sie sind also kongruent und es ist $PL = MK$,

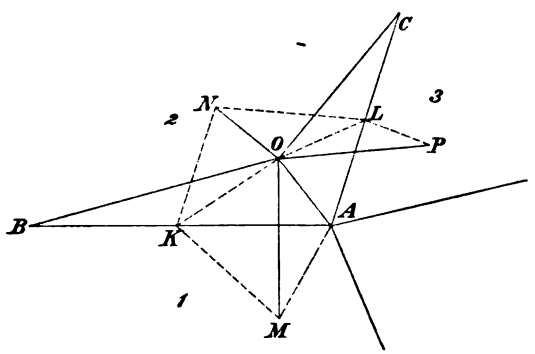


Fig. 304.

also P der Mittelpunkt von 3; ferner ist $OP = OM = ON$, d. h. O ist von den drei Flächen 1, 2, 3 des Polyeders gleich weit entfernt. Nun liegt O in den normalhalbierenden Ebenen der Kanten AB und AC, folglich ist $OA = OB$ und $OA = OC$; O ist also von den drei Ecken A, B, C gleich weit entfernt. Schließt man nun von zwei der Flächen 1, 2, 3 auf eine andre anstoßende und so fort, so erkennt man, daß O von allen Ecken und allen Flächen des Polyeders gleich weit entfernt sein muß. O ist der Mittelpunkt des Polyeders.

Jedes regelmäßige Polyeder hat also einen Mittelpunkt, der von allen Ecken und von allen Flächen gleich weit entfernt ist. Er ist der Mittelpunkt der Um- und Inkugel des Polyeders.

Man sieht auch, daß wegen der Kongruenz der rechtwinkligen Dreiecke OMK, ONK, ONL, OPL, $OK = OL$ sein muß. Der Mittelpunkt ist also auch von den Kanten gleich weit entfernt. Durch OK wird der Neigungswinkel MKN der beiden anstoßenden Flächen des regelmäßigen Polyeders halbiert.

3. Da ein regelmäßiges Polyeder durch die Kante vollständig bestimmt ist, so müssen sich die Radien der Um- und Inkugel aus ihr berechnen lassen. Es sei in Fig. 304 die Kante $AB = a$, der Radius der Umkugel $OA = r$, der Radius der Inkugel $OM = \varrho$. Wird nun jede Ecke von m regelmäßigen n-Ecken gebildet, so ist $MA = r'$ der Radius des Umkreises und $MK = \varrho'$ der des Inkreises eines regelmäßigen n-Ecks, also wenn

$$\frac{180^0}{n} = \nu$$

gesetzt wird:

$$r' = \frac{a}{2 \sin \nu}, \qquad \varrho' = \tfrac{1}{2} a \cot \nu \quad .$$

In dem rechtwinkligen Dreieck OMK ist $\angle OKM = \frac{1}{2}\varepsilon$, wenn mit ε der Neigungswinkel zweier anstoßender Polyederflächen bezeichnet wird; folglich ist

$$\varrho = \varrho' \tan \tfrac{1}{2} \varepsilon$$

und aus dem rechtwinkligen Dreieck OMA hat man

$$r = \sqrt{\varrho^2 + r'^2} \quad .$$

Um ε zu bestimmen, betrachtet man ein der regelmäßigen m-seitigen Ecke A zugeordnetes regelmäßiges sphärisches m-Eck, dessen sphärischer Mittelpunkt Q (Fig. 305) und von dem jede Seite gleich RS ist. Ist T der Mittelpunkt von RS, so sind QR und QT die sphärischen Radien des Um- und des Inkreises des sphärischen Vielecks. In dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck QTR ist

$$\angle RQT = \frac{180^0}{m} = \mu \quad .$$

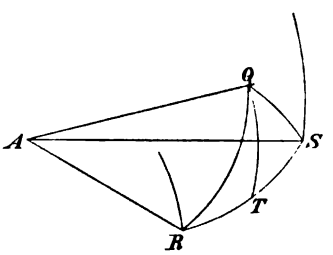


Fig. 305.

Die Seite RT ist die Hälfte des an der Ecke A des regelmäßigen n-Ecks liegenden Winkels, also

$$RT = 90^0 - \nu$$

und $\angle QRT = \frac{1}{2}\varepsilon$. Wendet man auf dieses Dreieck die Formeln 4) und 5) des § 12 Nr. 1 an, so erhält man:

$$\sin QRT = \frac{\sin QT}{\sin QR}, \qquad \cos RQT = \frac{\tan QT}{\tan QR} \quad ;$$

durch Division ergibt sich hieraus:

$$\frac{\sin QRT}{\cos RQT} = \frac{\cos QT}{\cos QR}$$

und da nach Formel 2) derselben Stelle

$$\cos QR = \cos QT \cos RT \quad ,$$

ist, so erhält man:

$$\frac{\sin QRT}{\cos RQT} = \frac{1}{\cos RT} \quad ,$$

oder

$$\frac{\sin \frac{1}{2}\varepsilon}{\cos \mu} = \frac{1}{\sin \nu} \quad ,$$

woraus sich wegen der Bedeutung von μ und ν

$$\sin \tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\cos \frac{180^0}{m}}{\sin \frac{180^0}{n}}$$

ergibt. Damit ist ε bestimmt und man hat nun

$$\varrho = \tfrac{1}{2} a \cot \frac{180^0}{n} \tan \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad .$$

Weiter ist mit Benutzung des Wertes von $\frac{1}{\sin \nu}$

$$r' = \tfrac{1}{2} a \frac{\sin \frac{1}{2}\varepsilon}{\cos \mu}$$

und

$$\varrho^2 = \tfrac{1}{4} a^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \nu} - 1 \right) \tan^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon = \tfrac{1}{4} a^2 \left(\frac{\sin^2 \frac{1}{2}\varepsilon}{\cos^2 \mu} - 1 \right) \quad :$$

mithin ergibt sich

$$r^2 = \varrho^2 + r'^2 = \tfrac{1}{4} a^2 \left(\frac{\tan^2 \frac{1}{2}\varepsilon}{\cos^2 \mu} - \tan^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon \right) = \tfrac{1}{4} a^2 \tan^2 \mu \tan^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad ,$$

also

$$r = \tfrac{1}{2} a \tan \frac{180^0}{m} \tan \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad .$$

Hiernach ergeben sich für die fünf regelmäßigen Polyeder folgende Werte:

1. Tetraeder:

$$m = 3 \, , \quad n = 3 \, ; \quad \sin \tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\cos 60^0}{\sin 60^0} = \sqrt{\tfrac{1}{3}} \, , \quad \varepsilon = 70^0 31' 46'' \quad .$$

Aus $\cos \varepsilon = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{1}{3}$ würde sich ergeben $\varepsilon = 70^0 31' 43''$; die Abweichung ist eine Folge der Unsicherheit der Sekundenziffer bei fünfstelligen Logarithmen. Weiter ist

$$\tan \tfrac{1}{2}\varepsilon = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \, , \quad r = \tfrac{1}{2} a \tan 60^0 \tan \tfrac{1}{2}\varepsilon = \tfrac{1}{2} a \sqrt{6} \, , \quad \varrho = \tfrac{1}{2} a \cot 60^0 \tan \tfrac{1}{2}\varepsilon = \tfrac{1}{12} a \sqrt{6} \, .$$

2. Hexaeder:

$$m = 3 \, , \quad n = 4 \, ; \quad \sin \tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\cos 60^0}{\sin 45^0} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \, , \quad \varepsilon = 90^0 \quad :$$

$$\tan \tfrac{1}{2}\varepsilon = 1 \, , \quad r = \tfrac{1}{2} a \tan 60^0 \tan \tfrac{1}{2}\varepsilon = \tfrac{1}{2} a \sqrt{3} \, , \quad \varrho = \tfrac{1}{2} a \cot 45^0 \tan \tfrac{1}{2}\varepsilon = \tfrac{1}{2} a \quad .$$

3. Oktaeder:

$$m = 4\,,\quad n = 3\,;\quad \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\cos 45^0}{\sin 60^0} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,,\quad \varepsilon = 109^0\,28'\,27''\,,$$

$$\cos\varepsilon = -\tfrac{1}{3}\,,\quad \varepsilon = 109^0\,28'\,17''\,:$$

$$\tan\tfrac{1}{2}\varepsilon = \sqrt{2}\,,\quad r = \tfrac{1}{2}a\tan 45^0\tan\tfrac{1}{2}\varepsilon = a\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,,\quad \varrho = \tfrac{1}{2}a\cot 60^0\tan\tfrac{1}{2}\varepsilon = a\sqrt{\tfrac{1}{6}}\,.$$

4. Dodekaeder:

$$m = 3\,,\quad n = 5\,;\quad \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\cos 60^0}{\sin 36^0} = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{10}\sqrt{5}}\,,\quad \varepsilon = 116^0\,33'\,44''\,:$$

$$\tan\varepsilon = -2\,,\quad \varepsilon = 116^0\,33'\,54''\,:$$

$$\tan\tfrac{1}{2}\varepsilon = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\,,\quad r = \tfrac{1}{2}a\tan 60^0\tan\tfrac{1}{2}\varepsilon = \tfrac{1}{4}a\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)\,,$$

$$\varrho = \tfrac{1}{2}a\cot 36^0\tan\tfrac{1}{2}\varepsilon = \tfrac{1}{4}a\sqrt{10 + \tfrac{2}{5}\sqrt{5}}\,.$$

5. Ikosaeder:

$$m = 5\,,\ n = 3\,;\ \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\cos 36^0}{\sin 60^0} = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 + \tfrac{2}{3}\sqrt{5}}\,,\ \varepsilon = 138^0\,11'\,36''\,;$$

$$\sin\varepsilon = \tfrac{2}{3}\,,\quad \varepsilon = 138^0\,11'\,22''\,;$$

$$\tan\tfrac{1}{2}\varepsilon = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}+3)\,,\quad r = \tfrac{1}{2}a\tan 36^0\tan\tfrac{1}{2}\varepsilon = \tfrac{1}{4}a\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\,,$$

$$\varrho = \tfrac{1}{2}a\cot 60^0\tan\tfrac{1}{2}\varepsilon = \tfrac{1}{12}a\sqrt{3}(\sqrt{5}+3)\,.$$

Bei den drei einfacheren regelmäßigen Polyedern sind die Resultate an der Figur ohne Trigonometrie leicht zu verifizieren. Beim regelmäßigen Tetraeder ist der Mittelpunkt der Schnittpunkt der vier Höhen, die sich gegenseitig im Verhältnis 3 : 1 teilen; ist also die Höhe h, so ist $r = \frac{3}{4}h$, $\varrho = \frac{1}{4}h$, wobei $h = a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}a\sqrt{6}$ ist. Der Mittelpunkt des Würfels ist der Schnittpunkt der Diagonalachsen, die sich gegenseitig halbieren, also ist $r = \frac{1}{2}d$, wenn $d = a\sqrt{3}$ die Diagonalachse ist; $\varrho = \frac{1}{2}a$ als Abstand des Mittelpunkts von einer Würfelfläche. Das regelmäßige Oktaeder besteht aus zwei regelmäßigen quadratischen Pyramiden; der Mittelpunkt der gemeinsamen Grundfläche ist der Mittelpunkt des Oktaeders; r ist also die halbe Diagonale der Grundfläche, ϱ ist der Abstand dieses Punktes von einer Seitenfläche.

4. Ist eine Kugel einem Cylinder oder Kegelstumpf umschrieben, so müssen die Endflächen der Kugel eingeschrieben sein. Es läßt sich daher um einen Cylinder und einen Kegelstumpf nur dann eine Kugel umschreiben, wenn sie gerade sind. Ihre Achsen fallen in einen Durchmesser der Umkugel und an dem der Kugel und dem eingeschriebenen Körper gemeinsamen Achsenschnitt lassen sich die Beziehungen zwischen den Bestimmungsstücken planimetrisch ableiten. Ein Kegel hat immer eine Umkugel, weil nach Nr. 1 eine Kugel durch den Grundkreis und die Spitze bestimmt ist.

Wenn man an einen Halbkreis, dessen Durchmesser AB ist (Fig. 306) in dem Punkte C, dessen Ordinate als Fußpunkt den Mittelpunkt M hat, eine Tangente legt, so beschreibt sie bei der Rotation um AB eine Cylinderfläche, die mit der Kugel den Aequator gemeinsam hat. Man kann sie Tangentialcylinderfläche oder kurz Tangentialcylinder der Kugel nennen. Ein Tangentialcylinder berührt eine Kugel in einem größten Kreise, dessen Ebene zu dem den Seitenlinien des Cylinders parallelen Durchmesser der Kugel normal ist. Die in C an den Halbkreis gelegte Tangente wird von den Tangenten, die in A und B gelegt

sind, in D und E geschnitten. Das Rechteck $ABED$ beschreibt bei der Drehung einen der Kugel umschriebenen Cylinder, dessen Achsenschnitt ein Quadrat ist. Ein Rotationscylinder hat daher eine Inkugel, wenn sein Achsenschnitt ein Quadrat ist.

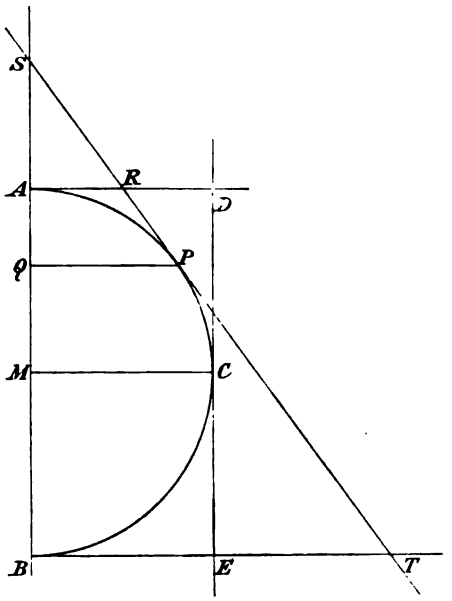


Fig. 306.

Läßt man die in einem beliebigen Punkt P an den Halbkreis gelegte Tangente mit dem Halbkreis rotieren, so beschreibt sie einen Tangentialkegel der Kugel. Dieser berührt die Kugel in einem Kreise, dessen Ebene auf der gemeinsamen Achse von Kegel und Kugel normal ist und dessen Spitze S in dieser liegt. Die in B an den Halbkreis gelegte Tangente schneidet die durch P gehende in T; dann beschreibt das rechtwinklige Dreieck SBT einen um die Kugel beschriebenen Kegel. Ein Rotationskegel hat stets eine Inkugel. Die Tangente in P wird auch von der in A gelegten in R geschnitten; dann entsteht durch Rotation des rechtwinkligen Trapezes $ABTR$ ein um die Kugel beschriebener gerader Kegelstumpf. Da die Tangenten, die man von einem Punkte an einen Kreis legen kann, einander gleich sind, so ist $RA = RP$, $TB = TP$ und $RA + TB = RT$; ein gerader Kegelstumpf hat also nur dann eine Inkugel, wenn die Summe der Radien seiner Endflächen gleich der Seitenlinie ist.

Alle Geraden einer Tangentialebene der Kugel, die durch den Berührungspunkt gehen, haben mit der Kugel nur diesen Punkt gemeinsam, sind also Tangenten der Kugel. Ebenso sind die Seitenlinien eines Tangentialcylinders und eines Tangentialkegels Kugeltangenten. Eine Tangentialebene der Kugel enthält alle Kugeltangenten, die durch einen Punkt der Kugel gehen; ein Tangentialcylinder enthält alle zueinander parallelen Kugeltangenten; ein Tangentialkegel enthält alle Kugeltangenten, die durch einen Punkt außerhalb der Kugel gehen. Da der Berührungskreis eines Tangentialkegels mit diesem einen Kegel begrenzt, dessen Seitenlinien sämtlich gleich SP sind, so sind die von einem Punkt außerhalb der Kugel an diese gelegten Tangenten, von dem Punkte bis zu dem Berührungspunkt auf der Kugel gerechnet, einander gleich.

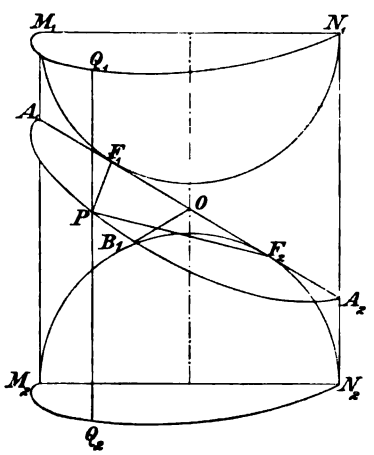


Fig. 307.

5. Wird ein Rotationscylinder durch eine beliebige Ebene geschnitten, so lassen sich zwei kongruente Kugeln konstruieren, welche die Cylinderfläche in zwei größten Kreisen und die Schnittebene in je einem Punkte berühren. In Fig. 307 sei derjenige Achsenschnitt des Cylinders in der Bildebene gezeichnet, der auf der Schnittebene normal ist. Dann müssen die Berührungspunkte F_1 und F_2 der Kugeln mit der Schnittebene in ihrer Spur A_1A_2 auf diesem Achsenschnitt

liegen. Da A_1A_2 eine Symmetrieachse der Schnittfigur sein muß, so ist nur der vordere Teil des Cylinders und der Schnittfigur gezeichnet. Die Berührungskreise der Kugeln mit dem Cylinder haben die Durchmesser M_1N_1 und M_2N_2, die Achsenschnitte der Kugeln berühren A_1A_2 in F_1 und F_2, wobei $A_1F_1 = A_2F_2$ und $A_1F_2 = A_2F_1$ sein muß. Dann ist wegen der Gleichheit der Tangenten, die von einem Punkte an einen Kreis gelegt werden können, $A_1F_1 = A_1M_1$ und $A_1F_2 = A_1M_2$ oder $A_2F_1 = A_1M_2$; mithin

$$A_1F_1 + A_1F_2 = A_1F_1 + A_2F_1 = A_1M_1 + A_1M_2$$

oder

$$A_1A_2 = M_1M_2 \quad .$$

Zieht man durch einen beliebigen Punkt P der Schnittkurve eine Seitenlinie, welche die Berührungskreise der Kugeln in Q_1 und Q_2 schneidet, so sind PQ_1 und PQ_2 Tangenten an die beiden Kugeln und verbindet man P mit F_1 und F_2, so sind PF_1 und PF_2 ebenfalls Kugeltangenten: daher ist nach Nr. 4 $PF_1 = PQ_1$, $PF_2 = PQ_2$, also

$$PF_1 + PF_2 = PQ_1 + PQ_2 = Q_1Q_2 \quad .$$

Da aber die Seitenlinien des durch die beiden Berührungskreise begrenzten Cylinders einander gleich sind, so ist

$$PF_1 + PF_2 = M_1N_1 = A_1A_2 \quad .$$

Die Schnittfigur ist also eine Kurve von der Eigenschaft, daß die Entfernungen jedes ihrer Punkte von zwei festen Punkten eine konstante Summe haben. Eine solche Kurve heißt eine Ellipse, F_1 und F_2 sind ihre Brennpunkte und die Verbindungslinien eines Ellipsenpunktes mit den Brennpunkten dessen Brennstrahlen.

Zu jedem Punkte P gibt es einen symmetrisch in Bezug auf A_1A_2 gelegenen Punkt P_1 auf der Rückseite des Cylinders. Da man aber einen weitern Punkt P_2 der Ellipse erhalten muß, wenn man die Brennstrahlen vertauscht, so liegen P und P_2 symmetrisch zu einer durch den Mittelpunkt O von A_1A_2, in dem die Cylinderachse von A_1A_2 geschnitten wird, senkrecht zu A_1A_2 gelegten Geraden B_1B_2, deren vordere Hälfte OB_1 ist. Die Ellipse ist also doppelt symmetrisch. Der Schnittpunkt O der beiden Symmetrieachsen ist ihr Mittelpunkt. Da OB_1 normal auf dem Achsenschnitt des Cylinders ist, so muß $OB_1 = r$ dem Radius der Cylindergrundfläche sein, dagegen ist $A_1O > r$ und zwar, wenn ω den Neigungswinkel der Schnittebene zur Cylinderachse bezeichnet,

$$A_1O = \frac{r}{\sin\omega} \quad .$$

Man nennt daher $A_1A_2 = 2\,A_1O$ die große, B_1B_2 die kleine Achse, A_1O die große, B_1O die kleine Halbachse der Ellipse. Bezeichnet man diese Halbachsen mit a und b, so hat man also

$$a = \frac{r}{\sin\omega}, \quad b = r, \quad \sin\omega = \frac{b}{a} \quad .$$

Die Summe der Brennstrahlen eines Ellipsenpunktes ist also gleich der großen Achse:

$$PF_1 + PF_2 = 2\,a \quad .$$

Die Endpunkte A_1, A_2 der großen Achse sind die Hauptscheitel, die Endpunkte B_1, B_2 der kleinen Achse die Nebenscheitel der Ellipse. Da ein Nebenscheitel von den beiden Brennpunkten gleich weit, nämlich um die große Halbachse a, entfernt sein muß, so müssen die Brennpunkte in einem Kreisbogen

liegen, der mit a um einen Nebenscheitel geschlagen wird. Man kann daher eine Ellipse planimetrisch konstruieren, wenn ihre Halbachsen gegeben sind. Damit ist $A_1A_2 = 2a$ zu zeichnen (Fig. 308) und durch O senkrecht dazu $B_1B_2 = 2b$ zu legen. Ein um B_1 mit a geschlagener Kreisbogen schneidet A_1A_2 in F_1 und F_2. Teilt man nun A_1A_2 in A_1M und MA_2 und schlägt mit diesen Strecken um F_1 und F_2 Kreisbogen, so erhält man vier Punkte der Ellipse. Da M beliebig ist, erhält man auf diese Weise eine beliebige Anzahl von Punkten der Kurve, die man durch einen stetigen Zug verbindet.

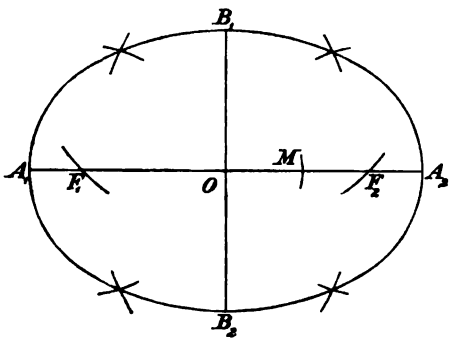


Fig. 308.

Jede Ellipse mit den Halbachsen $a > b$, läßt sich umgekehrt stereometrisch als Cylinderschnitt betrachten, d. h. als ebenen Schnitt eines Rotationscylinders. Dieser hat a als Radius der Grundfläche und er muß durch eine Ebene geschnitten werden, deren Neigungswinkel ω zur Cylinderachse so bestimmt ist, daß

$$\sin\omega = \frac{b}{a}$$

ist.

Der Kreis ist der besondere Fall des Cylinderschnitts, wenn $\omega = 90^0$, also $b = a = r$ ist. Der Kreis ist also eine Ellipse mit gleichen Halbachsen. Die Brennpunkte fallen im Mittelpunkte zusammen.

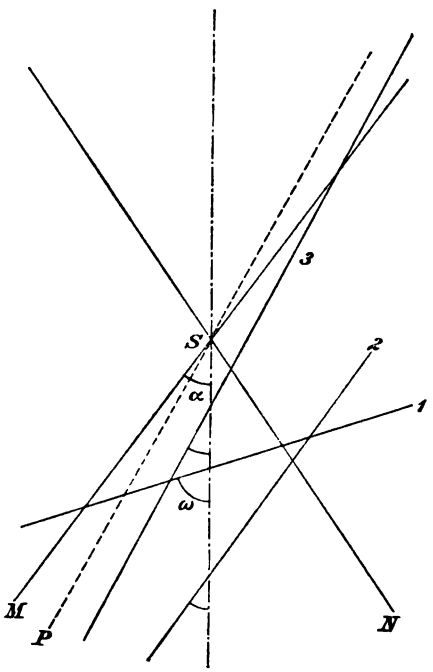


Fig. 309.

6. Ein Kegelschnitt ist ein ebener Schnitt eines Kegels. Eine Ebene kann durch einen Kegel im allgemeinen auf drei Arten gelegt werden, so daß sich drei verschiedene Formen von Kegelschnitten ergeben.

1. Die Ebene schneidet alle Seitenlinien des Kegels so, daß eine geschlossene Kurve entsteht;

2. die Ebene ist einer Seitenlinie parallel: dann hat die Kurve einen unendlich fernen Punkt, d. h. sie ist nicht geschlossen;

3. die Ebene ist mit zwei Seitenlinien parallel, die man erhält, wenn man eine ihr parallele Ebene durch die Spitze legt: dann wird der eine Teil der Seitenlinien erst in der Verlängerung über die Spitze hinaus, geschnitten; die Kurve hat zwei unendlich ferne Punkte, sie besteht aus zwei getrennten, auf beiden Hälften des vollständigen Doppelkegels liegenden Teilen, die beide nicht geschlossen sind.

Die Unterscheidung dieser drei Fälle ergibt sich am einfachsten beim Rotationskegel. Zeichnet man hier den Achsenschnitt MSN, der auf der Schnitt-

ebene normal ist, so ist seine Gestalt durch den Winkel α, den die Seitenlinie mit der Achse bildet, bestimmt. Die Spur der Schnittebene bildet dann mit der Achse den Winkel ω, den Neigungswinkel der Schnittebene zur Achse. Man hat dann den Fall 1, 2, 3 (Fig. 309), je nachdem

$$\omega \gtreqless \alpha \ .$$

Im Falle 1 sieht man, daß der Kegelschnitt geschlossen sein muß. Bei 2 ist die Schnittebene mit der Seitenlinie SM parallel, es werden also alle Seitenlinien außer dieser geschnitten. Im Falle 3 ist die Ebene mit den beiden Seitenlinien parallel, in denen eine durch S parallel zur Schnittebene gelegte Ebene SP die Kegelfläche schneidet. Die zwischen SN und SP liegenden Seitenlinien werden auf dem untern, die zwischen SP und SM liegenden auf dem obern Teile der vollständigen Kegelfläche geschnitten.

In jedem Falle ist die Spur der Schnittebene auf dem zu ihr normalen Achsenschnitt eine Symmetrieachse des Kegelschnitts; man nennt sie seine Hauptachse.

Im Falle 1 ist die Hauptachse durch die den Achsenschnitt begrenzenden Seitenlinien in A_1, A_2 begrenzt (Fig. 310). Es lassen sich wieder zwei Kugeln konstruieren, die den Kegel und die Schnittebene berühren. Die Berührungskreise mit dem Kegel haben die Durchmesser M_1N_1 und M_2N_2. Die Berührungspunkte F_1 und F_2 mit der Schnittebene liegen auf A_1A_2 und zwar, da die Achsenschnitte der Kugel für das Dreieck SA_1A_2 der In- und ein Ankreis sind, so, daß $A_1F_1 = A_2F_2$ (*Planimetrie* § 43 Nr. 1) oder $A_1F_2 = A_2F_1$ ist. Dann ist wie in Nr. 5 beim Cylinder $A_1A_2 = M_1M_2$. Zieht man durch den beliebigen Punkt P des Kegelschnitts die Seitenlinie SP des Kegels, die die Berührungskreise in Q_1 und Q_2 schneidet, so ist auch hier wie beim Cylinder $PF_1 + PF_2 = Q_1Q_2$ und da die Seitenlinien des von den Berührungskreisen begrenzten geraden Kegelstumpfs einander gleich sind, ist $PF_1 + PF_2 = M_1M_2 = A_1A_2$. Die geschlossene Form des Kegelschnitts ist also eine Ellipse; die Hauptachse ist die große Achse der Ellipse, F_1, F_2 sind ihre Brennpunkte. — Die zweite Form der Kegelschnitte heißt Parabel, die dritte Hyperbel.

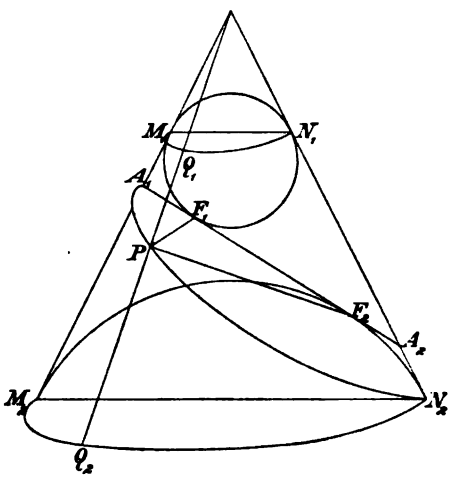


Fig. 310.

Auf eine gemeinsame Eigenschaft aller drei Kegelschnitte führt die folgende Betrachtung. Es sei AU (Fig. 311) die Hauptachse eines Kegelschnitts und F der Berührungspunkt der Kugel, die zugleich den Kegel und die Ebene des Kegelschnitts berührt. Verlängert man den Durchmesser MN des Berührungskreises und die Hauptachse bis zum Schnittpunkt C, so geht durch C die Schnittlinie der Ebene des Berührungskreises und des Kegelschnitts; diese ist auf dem in der Bildebene liegenden Achsenschnitt und auf MN und AU normal. Zieht man durch den beliebigen Punkt P des Kegelschnitts die Parallele zu AU, die diese Schnittlinie in R schneidet und durch S die Parallele, die MN in T schneidet, so ist durch PR und ST, die parallel sind, eine Ebene bestimmt, die mit der Ebene des Berührungskreises außer R und T noch den Punkt Q

gemeinsam hat, in dem die durch P gehende Seitenlinie SP den Berührungskreis schneidet. Daher liegen die Punkte R, Q, T auf einer Geraden und es ist $\triangle PQR \sim \triangle SQT$, woraus folgt:

$$\frac{PQ}{PR} = \frac{SQ}{ST} .$$

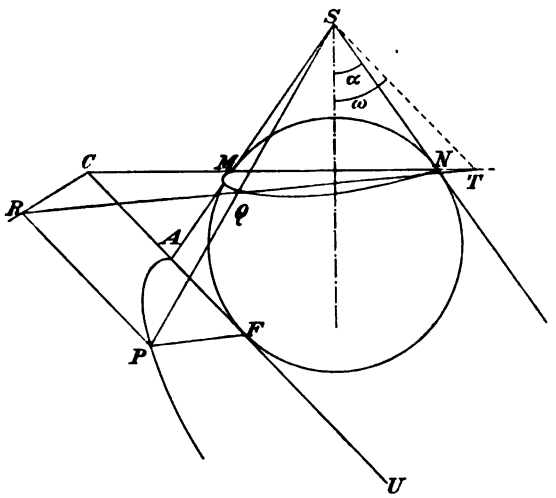


Fig. 311.

Verbindet man P mit F, so sind PF und PQ Kugeltangenten, also ist $PF = PQ$; ferner ist $SQ = SN$ als Seitenlinie eines Rotationskegels. Es ist also statt der obigen Proportion auch:

$$\frac{PF}{PR} = \frac{SN}{ST} .$$

Nun ist F ein fester Punkt auf der Hauptachse und PR ist der Abstand des Punktes von einer festen Geraden in der Ebene des Kegelschnitts, die auf der Hauptachse normal ist. Ebenso sind SN und ST für denselben Kegelschnitt konstant und daher auch der Wert des Verhältnisses

$$\frac{PF}{PR} = \varepsilon .$$

Jeder Punkt eines Kegelschnitts hat also die Eigenschaft, daß seine Entfernungen von einem festen Punkt und einer festen Geraden ein konstantes Verhältnis haben. Die feste Gerade ist eine Leitlinie des Kegelschnitts; der feste Punkt ein Brennpunkt.

Das konstante Verhältnis ε heißt die Charakteristik des Kegelschnitts; ihr Wert bestimmt seine Form. Ist α der Winkel, den die Seitenlinie des Kegels mit der Achse bildet, und ω der Neigungswinkel der Schnittebene zur Kegelachse, so bildet auch ST mit der Kegelachse den Winkel ω. Man sieht nun, daß je nachdem

$$\omega \gtrless \alpha ; \quad SN \lessgtr ST , \quad \varepsilon \lessgtr 1$$

ist. Im ersten Falle ist der Kegelschnitt eine Ellipse, im zweiten eine Parabel, im dritten eine Hyperbel. Im ersten und dritten Falle gibt es zwei den Kegel und die Schnittebene berührende Kugeln: die Ellipse und Hyperbel haben zwei Brennpunkte und zwei Leitlinien; im zweiten, besondern Falle gibt es nur eine solche Kugel: die Parabel hat nur einen Brennpunkt und eine Leitlinie, von denen jeder Parabelpunkt gleich weit entfernt ist. Der Kreis entsteht als Kegelschnitt als besonderer Fall der Ellipse, wenn $\omega = 90^0$ ist; die Brennpunkte fallen in dem Mittelpunkt des Kreises zusammen und es wird, da T unendlich fern liegt, $\varepsilon = 0$.

Da SN und ST Hypotenusen von zwei rechtwinkligen Dreiecken mit derselben Kathete sind, so hat man noch

$$\varepsilon = \frac{\cos\omega}{\cos\alpha}$$

Fünfter Abschnitt.

Die Oberfläche und das Volumen der Körper.

§ 21. Oberfläche der Polyeder, des Cylinders und Kegels.

1. Die Berechnung des Inhalts der Oberfläche eines Polyeders erfordert keine besondern stereometrischen Sätze, denn sie kann durch Addition der nach den betreffenden Sätzen der Planimetrie berechneten Inhalte der einzelnen Begrenzungsflächen geschehen.

Die Oberfläche eines rechtwinkligen Parallelepipeds mit den anstoßenden Kanten a, b, c ist

$$O = 2(ab + ac + bc) \quad .$$

Die Oberfläche eines n-seitigen regelmäßigen Prismas mit der Grundkante a und der Seitenkante b ist

$$O = \tfrac{1}{2} n a^2 \cot \frac{180^0}{n} + n a b \quad .$$

Die Oberfläche eines Tetraeders ist gleich der Summe der Inhalte von vier Dreiecken. Sind also die sechs Kanten eines solchen Körpers gegeben, und bezeichnen a, b, c die Grundkanten, a', b', c' die Seitenkanten, so daß die zu a' gehörige mit der zu a gehörigen keinen Punkt gemeinsam hat, und ebenso die Kanten b, b' und c, c' einander gegenüberliegen, so erhält man für $a = 14$, $b = 15$, $c = 13$, $a' = 37$, $b' = 40$, $c' = 44$ den Inhalt der Grundfläche

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 84$$

und ebenso die der Seitenflächen gleich $105\sqrt{7}$, 264, 240, also die gesuchte Oberfläche gleich $588 + 105\sqrt{7} = 865{,}8$.

Ist von einer regelmäßigen n-seitigen Pyramide mit der Grundkante a, der Neigungswinkel ψ, den die Seitenfläche mit der Grundfläche bildet, gegeben, so wird die Projektion einer Seitenfläche auf die Grundfläche berechnet, indem man den Inhalt der Seitenfläche mit $\cos\psi$ multipliziert (§ 6 Nr. 3); die Summe der Projektionen gibt aber die Grundfläche G, also wird die Summe der Seitenflächen erhalten, wenn man G durch $\cos\psi$ dividiert. Mithin hat man die Oberfläche

$$O = G + \frac{G}{\cos\psi}, \quad G = \tfrac{1}{4} n a^2 \cot \frac{180^0}{n} \quad .$$

Die Oberfläche O eines regelmäßigen Polyeders mit der Kante a wird berechnet, indem man den Inhalt F einer Begrenzungsfläche mit der Anzahl der Flächen multipliziert. Ist ein solches Polyeder von regelmäßigen Dreiecken begrenzt, so ist

$$F = \tfrac{1}{4} a^2 \sqrt{3} \quad ,$$

mithin erhält man für das Tetraeder:

$$O = a^2 \sqrt{3} \quad ,$$

für das Oktaeder

$$O = 2 a^2 \sqrt{3}$$

und beim Ikosaeder:

$$O = 5 a^2 \sqrt{3} \quad .$$

Die Oberfläche des Würfels ist

$$O = 6 a^2 \quad .$$

Der Inhalt eines regelmäßigen Fünfecks mit der Seite a ist (*Planmetrie* § 33 Nr. 4)

$$F = \tfrac{1}{4}a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \quad ,$$

also ist die Oberfläche des regelmäßigen Dodekaeders:

$$O = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \quad .$$

2. Die Oberfläche eines Cylinders besteht aus dem Mantel und den beiden Endflächen. Denkt man sich auf dem Mantel unendlich viele Seitenlinien gezogen, so wird er in unendlich viel unendlich kleine Flächenelemente zerlegt, die man als Parallelogramme ansehen kann. Schneidet man den Mantel längs einer Seitenlinie auf, so kann man diese Flächenelemente nebeneinander in eine Ebene gelegt denken. Der Mantel ist also in eine Ebene abwickelbar.

Die Abwicklungsfigur ist begrenzt von zwei parallelen Geraden, die gleich der Seitenlinie des Mantels sind, und zwei parallelen Kurven, deren Länge gleich dem Umfang des Grundkreises des Cylinders sind, deren sonstige Eigenschaften aber mit den Hilfsmitteln der Elementarmathematik nicht betrachtet werden können. Es ist daher auch nicht möglich, den Inhalt des Mantels elementar zu berechnen. Nur in dem besondern Falle des geraden Cylinders werden die Flächenelemente Rechtecke, die aneinander gelegt, wieder ein Rechteck bilden, dessen Grundlinie der rektifizierte Umfang des Grundkreises und dessen Höhe die Seitenlinie oder die Höhe des Cylinders ist. Bezeichnet also r den Radius der Grundfläche und h die Höhe, so ist der Mantel des geraden Cylinders:

$$M = 2\pi r h \quad ,$$

die Oberfläche also

$$O = 2\pi r h + 2\pi r^2 \quad .$$

Beispiele:

1. Ist der Mantel eines geraden Cylinders zu berechnen, dessen Höhe $h = 15{,}4$, und dessen Grundflächenradius $r = 22{,}6$ ist, so hat man

$$M = 2 \cdot 22{,}6 \cdot 15{,}4 \cdot \pi$$

auszurechnen. Wählt man für π behufs einer bloß ungefähren Berechnung den Näherungswert $3\frac{1}{7}$, so erhält man

$$M = \frac{2 \cdot 22{,}6 \cdot 15{,}4 \cdot 22}{7} = 2 \cdot 22{,}6 \cdot 2{,}2 \cdot 22 = 2187{,}68 \quad .$$

Rechnet man mit fünfstelligen Logarithmen und setzt dementsprechend $\pi = 3{,}14159$, so erhält man

$$\begin{array}{r} M = 2\pi r h = 2186{,}80 \\ \hline \log 2r = 1{,}65\,514 \\ \log h = 1{,}18\,752 \\ \log \pi = 0{,}49\,715 \\ \hline \log M = 3{,}33\,981 \end{array}$$

Man ersieht hieraus, daß das erste Resultat um mehr als 1 fehlerhaft war. Hierbei ist vorausgesetzt, daß die für r und h gegebenen Werte absolut genau seien; in der Praxis wird jedoch anzunehmen sein, daß die bis auf Zehntel etwa eines Centimeters angegebenen Zahlen bis zur Hälfte eines solchen Zehntels fehlerhaft sein können; in diesem Falle ist das Produkt $2\pi r h$ um fast 12 unsicher, so daß die Rechnung mit genauerem Werte von π nutzlos ist, und man als Resultat in runder Zahl 2190 anzunehmen hat.

2. Es sei der Mantel eines Cylinders zu berechnen, der einem gegebenen Würfel mit der Kante a umschrieben ist. Der Durchmesser der Grundfläche des Cylinders ist gleich der Diagonale eines Quadrats, dessen Seite a ist, also $a\sqrt{2}$, und die Höhe des Cylinders a. Demnach erhält man

$$M = \pi a\sqrt{2} \cdot a = \pi a^2\sqrt{2} \quad .$$

Die Oberfläche dieses Cylinders ist

$$O = \pi a^2\sqrt{2} + 2\pi \cdot \tfrac{1}{4}(a\sqrt{2})^2 = \pi a^2(\sqrt{2} + 1) \quad .$$

3. Die Gleichungen für M und O können als Beziehungen zwischen diesen Werten und denen von r und h zur Berechnung irgend einer dieser Größen dienen, wenn die andern gegeben sind.

Um z. B. die Dimensionen eines Rechtecks zu bestimmen, mit dem man den Mantel eines geraden Cylinders bekleiden kann, der mit einem regelmäßigen quadratischen Prisma gleiche Oberfläche und gleiche Höhe hat, wenn die Grundkante des Prismas a und die Seitenkante b gegeben sind, hat man

$$h = b, \quad O = 2a^2 + 4ab \quad ;$$

also ist

$$2a^2 + 4ab = 2\pi r(b + r) \quad ,$$

woraus

$$r^2 + br = \frac{a^2 + 2ab}{\pi} \quad ,$$

$$r = \pm\sqrt{\frac{a^2 + 2ab}{\pi} + \frac{b^2}{4}} - \frac{b}{2}$$

folgt. Von den beiden Werten für r ist der eine negativ und daher bei der Anwendung der quadratischen Gleichung auf die vorliegende eingekleidete Aufgabe nicht zu gebrauchen. Die gesuchten Seiten des Rechtecks sind also b und

$$2\pi r = \sqrt{4\pi(a^2 + 2ab) + \pi^2 b^2} - \pi b \quad .$$

3. Auch jeder Teil des Mantels eines geraden Cylinders, der von zwei Seitenlinien eingeschlossen ist, läßt sich durch Abwickeln in eine Ebene berechnen. Er ist gleich einem Rechteck, dessen Seiten die Seitenlinie des Cylinders, die gleich seiner Höhe ist, und der zwischen den Seitenlinien liegende Bogen des Grundkreises sind.

Ist z. B. die Oberfläche eines durch einen Achsenschnitt von einem geraden Cylinder abgeschnittenen Halbcylinders zu berechnen, so hat man

$$O = \pi rh + 2 \cdot \tfrac{1}{2}\pi r^2 + 2rh = r[\pi(h + r) + 2h] \quad .$$

Soll die krumme Fläche eines Ausschnitts eines geraden Cylinders berechnet werden, der zwischen zwei Achsenschnitten liegt, die den Neigungswinkel α bilden, so hat man

$$M = \pi rh \frac{\alpha^0}{180^0} \quad .$$

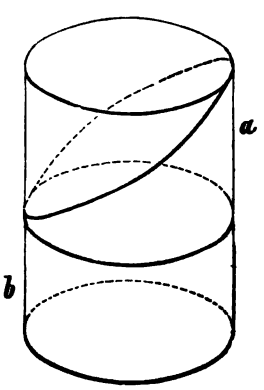


Fig. 312.

Wird ein gerader Cylinder durch eine der Grundfläche nicht parallele, jedoch diese nicht schneidende Ebene geschnitten, so kann man durch die Endpunkte der längsten und der kürzesten Seitenlinie eines abgeschnittenen Teils der Grundfläche parallele Ebenen legen (Fig. 312). Diese Ebenen schließen dann einen Cylinder ein, dessen durch die Schnittebene ent-

stehende Teile miteinander zur Deckung gebracht werden können. Hieraus folgt, daß der Schnitt den Mantel dieses Cylinders halbiert, und man erhält somit für den Mantel des schief abgeschnittenen geraden Cylinderstumpfs, wenn a und b die längste und kürzeste Seitenlinie sind,

$$M = 2\pi r b + \tfrac{1}{2} \cdot 2\pi r(a - b) = \pi r(2b + a - b) = \pi r(a + b)$$

oder

$$M = 2\pi r \frac{a + b}{2} ,$$

d. h. die gesuchte Fläche ist gleich dem Mantel eines vollständigen geraden Cylinders mit derselben Grundfläche, dessen Höhe gleich dem arithmetischen Mittel aus der längsten und der kürzesten Seitenlinie ist.

4. Die Oberfläche eines Kegels besteht aus dem Mantel und der Grundfläche. Denkt man sich die unendlich vielen Seitenlinien des Mantels gezogen, so wird dieser in unendlich viel unendlich kleine Flächenelemente zerlegt, die als Dreiecke anzusehen sind. Schneidet man den Mantel längs einer Seitenlinie auf, so kann man diese unendlich kleinen Dreiecke, deren Grundlinien unendlich kleine Bogenelemente des Grundkreises sind, in eine Ebene nebeneinander gelegt denken. Der Kegelmantel ist also, wie in Nr. 2 beim Cylindermantel gezeigt wurde, abwickelbar. Die Abwicklungsfigur des Kegelmantels ist begrenzt von zwei gleichlangen Geraden, die von einem Punkt ausgehen und die beide gleich der Seitenlinie sind, an der man den Mantel aufgeschnitten hat, und einer Kurve. Da man die Eigenschaften dieser Kurve elementar nicht betrachten kann, so ist es im allgemeinen nicht möglich, den Flächeninhalt des Kegelmantels zu bestimmen. Nur in dem besondern Falle des geraden Kegels werden die unendlich kleinen Dreiecke sämtlich gleichschenklig, da der gerade Kegel lauter gleiche Seitenlinien hat. Die den Mantel begrenzende Kurve wird daher ein Kreisbogen, dessen Radius diese Seitenlinie ist und der gleich der Peripherie des Grundkreises ist und der Mantel wird ein Kreissektor. Nach *Planimetrie* § 35 Nr. 2 wird ein Kreissektor berechnet wie ein Dreieck, dessen Grundlinie der Bogen und dessen Höhe der Radius ist. Hat nun der Grundkreis des Kegels den Radius r und ist s die Seitenlinie, so hat man den Inhalt des Mantels eines geraden Kegels

$$M = \tfrac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot s = \pi r s \quad ;$$

seine Oberfläche ist also

$$O = \pi r s + \pi r^2 \quad .$$

Beispiele:

1. Ist $r = 0{,}33$, $h = 9{,}64$ gegeben, so ist zunächst $s = \sqrt{r^2 + h^2}$ zu berechnen. Man erhält $s = 9{,}645$ und hieraus $M = 0{,}33 \cdot 9{,}645 \cdot \pi = 10$ rund.

2. Es sei die Oberfläche eines Körpers zu berechnen, der aus einem geraden Cylinder und zwei auf seinen Endflächen stehenden geraden Kegeln zusammengesetzt ist, deren Höhen den Radien der Endflächen gleich sind. Ist h die Höhe, r der Grundflächenradius des Cylinders, so erhält man

$$O = 2\pi r h + 2\pi r\sqrt{r^2 + r^2} = 2\pi r\left(h + r\sqrt{2}\right) \quad .$$

3. Den Inhalt des von zwei Seitenlinien eingeschlossenen Teiles des Mantels eines geraden Kegels erhält man in entsprechender Weise wie in dem gleichen Falle beim Cylinder in Nr. 3. Ist b die Länge des zugehörigen Bogens der Grundfläche, so ist

$$M = \tfrac{1}{2} b s \quad .$$

4. Ist außer dem Radius r des Grundkreises der Neigungswinkel α der Seitenlinie zur Grundfläche gegeben, so ist

$$s = \frac{r}{\cos\alpha} ,$$

mithin

$$M = \frac{\pi r^2}{\cos\alpha} , \quad O = \pi r^2 + \frac{\pi r^2}{\cos\alpha} .$$

Da πr^2 der Inhalt des Grundkreises und dieser als Projektion des Mantels anzusehen ist, so ist diese Formel analog der in Nr. 1 für die regelmäßige Pyramide gefundenen.

5. Hat der Kreissektor, der als Abwicklungsfigur des Mantels eines geraden Kegels entsteht, den Centriwinkel ω, so ist, da zu ihm im Kreise vom Radius s der Bogen $2\pi r$ gehört:

$$\omega = 360^0 \cdot \frac{2\pi r}{2\pi s} = 360^0 \cdot \frac{r}{s} = 360^0 \cdot \cos\alpha .$$

Ist also $\alpha = 60^0$, d. h. der Achsenschnitt ein gleichseitiges Dreieck, so ist der Mantel ein Halbkreis. Ist $\alpha \gtrless 60^0$, so ist der Mantel kleiner oder größer als ein Halbkreis.

6. Von einem geraden Kegel sei der Mantel M und der Inhalt F des Achsenschnitts gegeben. Zur Bestimmung der Unbekannten r und h hat man dann die Gleichungen:

$$r\sqrt{r^2 + h^2} = \frac{M}{\pi} , \quad rh = F ,$$

aus denen sich

$$r = \sqrt[4]{\frac{M^2}{\pi^2} - F^2} , \quad h = \frac{F}{r}$$

ergibt. Ferner erhält man noch die Seitenlinie

$$s = \frac{M}{\pi r}$$

und für ihren Neigungswinkel zur Grundfläche:

$$\sin\alpha = \frac{h}{s} = \frac{\pi F}{M} .$$

7. In eine Kugel vom Radius r ist ein gerader Kegel von der Höhe h eingeschrieben; wie groß ist der Mantel des Kegels? In dem gemeinsamen Achsenschnitt von Kugel und Kegel ist der Radius ϱ der Grundfläche des Kegels eine Ordinate zur Abscisse h, also

$$\varrho = \sqrt{h(2r - h)}$$

und die Seitenlinie des Kegels

$$s = \sqrt{2rh}$$

also

$$M = \pi\varrho s = \pi h\sqrt{2r(2r - h)} .$$

Ist der Mantel M dieses Kegels gegeben und der Winkel α gesucht, den die Seitenlinie mit der Grundfläche bildet, so hat man

$$s = 2r\sin\alpha , \quad \varrho = s\cos\alpha = 2r\sin\alpha\cos\alpha ,$$

mithin

$$M = 4\pi r^2 \sin^2\alpha\cos\alpha ;$$

es ist daher $\cos\alpha$ eine reelle Wurzel der kubischen Gleichung:

$$\cos^3\alpha - \cos\alpha + \frac{M}{4\pi r^2} = 0 \quad .$$

8. Ein gerader Kegel, dessen Grundflächenradius r ist, hat die Oberfläche O; wie groß ist der Radius ϱ der eingeschriebenen Kugel?

Aus der Gleichung

$$\pi r s + \pi r^2 = O$$

ergibt sich die Seitenlinie

$$s = \frac{O}{\pi r} - r$$

und aus ähnlichen Dreiecken die Proportion:

$$\frac{\varrho}{s - r} = \frac{r}{\sqrt{s^2 - r^2}} \quad ,$$

$$\varrho = r\sqrt{\frac{s - r}{s + r}} = r\sqrt{1 - \frac{2\pi r^2}{O}} \quad .$$

5. Der Mantel eines geraden Kegelstumpfs entsteht in der Abwicklung, wenn man von dem Mantel des ergänzten Kegels den des Ergänzungskegels wegnimmt. Da beide konzentrische Kreissektoren von gleichem Centriwinkel sind, so ist die Abwicklungsfigur des Mantels ein Ringsektor (Fig. 313), dessen begrenzende Bogen die Umfänge der Endflächen und dessen Breite die Seitenlinie des Kegelstumpfs ist. Der Inhalt eines Ringsektors ist gleich dem eines Trapezes, dessen parallele Seiten die rektifizierten begrenzenden Bogen und dessen Höhe die Breite des Ringes ist.

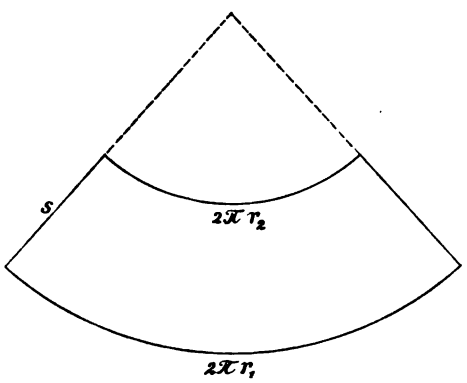


Fig. 318.

Haben also die Endflächen die Radien $r_1 > r_2$ und ist s die Seitenlinie, so ist der Mantel des geraden Kegelstumpfs

$$M = \frac{2\pi r_1 + 2\pi r_2}{2} \cdot s = \pi(r_1 + r_2)s$$

und seine Oberfläche

$$O = \pi(r_1 + r_2)s + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 \quad .$$

Beispiele:

1. Es sei die Höhe eines geraden Kegelstumpfs zu berechnen, dessen Mantel $M = 252$ ist, wenn außerdem die Peripherien der beiden Endflächen $p_1 = 25$, $p_2 = 17$ gegeben sind. Da $p_1 = 2\pi r_1$, $p_2 = 2\pi r_2$, so ist

$$\pi(r_1 + r_2) = \frac{p_1 + p_2}{2}, \quad \text{also} \quad M = \frac{p_1 + p_2}{2} s, \quad s = \frac{2M}{p_1 + p_2} \quad .$$

Mittels eines Achsenschnitts des Kegelstumpfs erhält man ferner

$$h = \sqrt{s^2 - (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{\frac{4M^2}{(p_1 + p_2)^2} - \frac{(p_1 - p_2)^2}{4\pi^2}} \quad .$$

Für das Zahlenbeispiel hat man

$$s = \frac{2 \cdot 252}{42} = \frac{252}{21} = 12 \quad ,$$

$$r_1 - r_2 = \frac{8}{2\pi} = \frac{4}{\pi}, \qquad h = \sqrt{144 - \frac{16}{\pi^2}} = 11{,}932 \quad .$$

2. Von einem geraden Kegelstumpf, der den Mantel M hat, ist die Differenz $r_1 - r_2 = d$ und der Neigungswinkel α der Seitenlinie zur Grundfläche gegeben; wie groß sind die Radien r_1 und r_2 der Endflächen? Aus dem Achsenschnitt findet man

$$s = \frac{d}{\cos\alpha} \quad ,$$

mithin ist

$$M = \pi (r_1 + r_2) \frac{d}{\cos\alpha}, \qquad r_1 + r_2 = \frac{M}{\pi d} \cos\alpha \quad ,$$

folglich ergeben sich

$$r_{1,2} = \tfrac{1}{2} \left(\frac{M}{\pi d} \cos\alpha \pm d \right) \quad .$$

3. Um eine Kugel vom Radius r ist ein gerader Kegelstumpf beschrieben, dessen Seitenlinie mit der Grundfläche den Winkel α bildet; wie groß ist seine Oberfläche? Wenn ein Kegelstumpf eine Inkugel hat, so ist (§ 20 Nr. 4)

$$s = r_1 + r_2 \quad ,$$

also

$$O = \pi (r_1 + r_2)^2 + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = 2\pi [(r_1 + r_2)^2 - r_1 r_2] \quad .$$

Nun ist

$$r_1 + r_2 = \frac{2r}{\sin\alpha}, \qquad r_1 r_2 = r^2 \quad ;$$

mithin ist

$$O = 2\pi r^2 \left(\frac{4}{\sin^2\alpha} - 1 \right) \quad .$$

4. Aus dem Umfang $2u$ des Achsenschnitts eines geraden Kegelstumpfs und der Höhe h ist die Oberfläche zu berechnen. Da $r_1 + r_2 + s = u$ gegeben ist, so hat man

$$r_1 + r_2 = u - s, \qquad (r_1 + r_2) s = us - s^2 \quad ;$$

also auch

$$r_1^2 + 2 r_1 r_2 + r_2^2 = u^2 - 2us + s^2 \quad ,$$

da aber $(r_1 - r_2)^2 = s^2 - h^2$ oder

$$r_1^2 - 2 r_1 r_2 + r_2^2 = s^2 - h^2$$

ist, so erhält man durch Addition der beiden letzten Gleichungen und Division mit 2:

$$r_1^2 + r_2^2 = \tfrac{1}{2}(u^2 - h^2) - us + s^2 \quad .$$

Nun ergibt sich die Oberfläche

$$O = \pi [(r_1 + r_2) s + r_1^2 + r_2^2] = \tfrac{1}{2}\pi (u^2 - h^2) \quad .$$

5. Wenn ein rechtwinkliges Trapez mit dem spitzen Winkel α und dem Inhalt F um die normale nichtparallele Seite rotiert, so beschreibt es einen geraden Kegelstumpf; die parallelen Seiten sind die Radien r_1 und r_2 der End-

flächen, die schiefe nichtparallele Seite ist die Seitenlinie s, die normale die Höhe h. Aus der Formel für den Inhalt des Trapezes ergibt sich

$$r_1 + r_2 = \frac{2F}{h} \quad ,$$

und außerdem ist

$$s = \frac{h}{\sin\alpha} \quad ,$$

mithin ist der Mantel

$$M = \pi(r_1 + r_2)s = 2\pi\frac{F}{\sin\alpha} \quad .$$

Die Formeln für die Mäntel des geraden Cylinders und des geraden Kegels sind besondere Fälle von der für den Mantel des geraden Kegelstumpfs. Setzt man in dieser $r_2 = 0$, so erhält man den Mantel des geraden Kegels; wird $r_1 = r_2$, so wird zugleich $s = h$ und man erhält den Mantel des geraden Cylinders. In der Tat haben alle drei Flächen gemeinsam, daß sie entstehen durch Rotation einer Strecke um eine Achse, die mit ihr in einer Ebene liegt und deren Endpunkte auf derselben Seite der Achse liegen. Haben die Endpunkte der Strecke von der Achse die Abstände r_1 und r_2, so gilt für die entstehende Fläche allgemein die Formel

$$M = 2\pi\frac{r_1 + r_2}{2}s \quad ,$$

wobei $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ der Abstand des Mittelpunkts der Strecke von der Rotationsachse ist.

§ 22. Volumen der Polyeder, des Cylinders und Kegels.

1. Die Größe des Raumes, den ein Körper einnimmt, heißt sein Volumen. Die Bestimmung des Volumens der Körper ist die Aufgabe der Volumetrie. Das Volumen eines Körpers messen, heißt das Verhältnis dieses Volumens zur Volumeneinheit bestimmen. Als Volumeneinheit dient der Würfel, dessen Kante die Längeneinheit, dessen Seitenfläche also die Flächeneinheit ist. Da die konventionelle Längeneinheit der Meter (*m*) ist, so nennt man die Volumeneinheit Kubikmeter (*cbm*, m^3).

Da der Würfel ein besonderer Fall des rechtwinkligen Parallelepipeds ist, so hat man zunächst die Aufgabe zu lösen, das Verhältnis der Volumina V_1 und V_2 von zwei rechtwinkligen Parallelepipeden zu bestimmen. Sind die anstoßenden Kanten der beiden Körper a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 gemessen, d. h. kennt man die Zahl der Längeneinheiten, die sie enthalten, so muß es eine Länge λ geben, die, wenn man sie nur hinreichend klein nimmt, bei jeder verlangten Genauigkeit in allen sechs Kanten ohne Rest enthalten ist (vgl. *Planimetrie* § 21 Nr. 4 und § 24 Nr. 1). Denkt man sich diese Länge auf den anstoßenden Kanten jedes der beiden Parallelepipede aufgetragen, so wird

$$a_1 = m_1\lambda \,, \quad b_1 = n_1\lambda \,, \quad c_1 = p_1\lambda \,; \quad a_2 = m_2\lambda \,, \quad b_2 = n_2\lambda \,, \quad c_2 = p_2\lambda$$

sein, wobei m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2 natürliche Zahlen sind. Legt man durch jeden Teilpunkt der Kanten Ebenen parallel zu den auf den Kanten senkrechten Ebenen der Parallelepipede, so werden die beiden Körper in kongruente Würfel von der Kante λ zerlegt, und zwar der Körper 1 in $m_1 n_1 p_1$, der Körper 2 in $m_2 n_2 p_2$;

mithin ist das Verhältnis der beiden Volumina

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{m_1 n_1 p_1}{m_2 n_2 p_2} \quad ,$$

oder

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{p_1}{p_2} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1 b_1 c_1}{a_2 b_2 c_2} \quad ,$$

d. h. die Volumina zweier rechtwinkliger Parallelepipede verhalten sich wie die Produkte aus den Zahlen der Längeneinheiten der drei anstoßenden Kanten.

Nimmt man nun als das zweite Parallelepiped die Volumeneinheit, d. h. ein Parallelepiped, dessen drei anstoßende Kanten 1 sind und welches das Volumen 1 hat, und hat das erste mit den anstoßenden Kanten a, b, c das Volumen V, so ist nach diesem Satze:

$$\frac{V}{1} = \frac{a b c}{1 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} \cdot \frac{c}{1} \quad ,$$

d. h. die Zahl der Volumeneinheiten eines rechtwinkligen Parallelepipeds ist gleich dem Produkt aus der Zahl der Längeneinheiten der drei anstoßenden Kanten. Da man die letzte Gleichung einfach schreiben kann:

$$1) \qquad V = a b c \quad ,$$

so spricht man den Satz in der abgekürzten Form aus:

Das Volumen eines rechtwinkligen Parallelepipeds ist gleich dem Produkt der drei anstoßenden Kanten.

Von einem Würfel mit der Kante a erhält man hiernach das Volumen

$$V = a^3 \quad ,$$

und umgekehrt, wenn das Volumen V eines Würfels gegeben ist, seine Kante

$$a = \sqrt[3]{V} \quad .$$

Hieraus erklärt sich die Benennung Kubus für die dritte Potenz und Kubikwurzel für die dritte Wurzel; ebenso die Bezeichnung m^3 für *cbm*.

Da $a b$ als der Inhalt der Grundfläche G des rechtwinkligen Parallelepipeds und c als die Höhe h angesehen werden kann, so kann man 1) auch in der Form schreiben:

$$1^*) \qquad V = G h \quad ,$$

d. h. das Volumen eines rechtwinkligen Parallelepipeds ist gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe.

Beispiele:

1. Wieviel Kubikmeter Sauerstoff enthält die Luft eines rechtwinkligen Zimmers, das 9,34 m lang, 5,82 m breit und 4,73 m hoch ist, wenn in 100 Teilen Luft 21 Teile Sauerstoff enthalten sind?

Man erhält $9{,}34 \cdot 5{,}82 \cdot 4{,}73 \cdot 0{,}21 = 54\ m^3$, mit einer Unsicherheit von weniger als $\frac{1}{5}\ m^3$, wenn die Messungen der Seiten bis auf 0,005 m genau waren.

2. Man soll ein rechtwinkliges Parallelepiped anfertigen, so daß sein Volumen 2080, seine Oberfläche 996, und der Umfang seiner Grundfläche 58 betrage. Wie lang sind die Kanten zu machen? Es seien x und y die Grundkanten, z die Seitenkante.

Zur Auflösung dieser Aufgabe erhält man die drei Gleichungen:

$$xyz = 2080 \quad ,$$
$$xy + xz + yz = \tfrac{1}{2} \cdot 996 = 498 \quad ,$$
$$x + y = \tfrac{1}{2} \cdot 58 \ = 29 \quad .$$

Aus der zweiten Gleichung folgt:

$$xy + (x + y)z = 498 \quad ,$$

und setzt man in diese $x + y = 29$ aus der dritten, $xy = \frac{2080}{z}$ aus der ersten ein, so erhält man die Gleichung

$$\frac{2080}{z} + 29z = 498 \quad ,$$

deren Auflösung

$$z = \frac{249 \pm 41}{29}, \quad z_1 = 10 \, , \; z_2 = \frac{208}{29}$$

gibt. Der erste Wert von z führt mittels der Gleichungen

$$xy = 208 \, , \quad x + y = 29$$

auf $x = 16$, $y = 13$, wenn man $x > y$ voraussetzt, der zweite führt mittels $xy = 290$, $x + y = 29$ auf komplexe Werte von x und y, und ist also nicht brauchbar. Somit sind die gesuchten Kanten 16, 13 und 10.

2. Das einfachste Verhältnis zweier gleichartiger Größen ist die Gleichheit. Zwei Körper heißen einander gleich, wenn sie gleiches Volumen haben. Denkt man sich zwei Körper zwischen parallelen Ebenen liegend, so kann man sie durch unendlich viele diesen Ebenen parallele Ebenen in eine unendlich große Zahl unendlich dünner Schichten zerlegen. Sind nun an jeder Stelle je zwei solche Schichten beider Körper einander gleich, so müssen auch die Summen der Schichten in beiden Körpern einander gleich sein. Das Volumen eines solchen Volumenelements hängt bei seiner unendlich kleinen Höhe nur von der Größe der Querschnitte ab, vorausgesetzt, daß sich diese in jedem der beiden Körper nach irgend einem Gesetze stetig ändert. Daraus erkennt man die Richtigkeit des Satzes von CAVALIERI:

Liegen zwei Körper zwischen zwei parallelen Ebenen und bringt jede zu diesen parallele Ebene in beiden Körpern gleiche Querschnitte hervor, so sind die Körper einander gleich.

Man könnte diesen Satz auch in der Planimetrie anwenden, um die Sätze über die Flächengleichheit zu begründen. Er würde sich da aussprechen lassen in der Form: Liegen zwei Figuren zwischen Parallelen und schneidet jede diesen beiden parallele Gerade die Figuren in gleichen Strecken, so sind die Figuren einander gleich (Fig. 314). Aus ihm würde sich sofort anschaulich die Gleichheit von zwei Parallelogrammen oder von zwei Dreiecken mit gleicher Grundlinie und Höhe ergeben. Im Interesse des Anfängers führt man jedoch in der Planimetrie seit EUKLID die Gleichheit auf die einfachere Kongruenz zurück, indem man zeigt, daß sich gleiche Figuren aus kongruenten, die nicht in demselben Sinne angeordnet werden, herstellen lassen. In der Stereometrie würde dieser Weg, schon bei den Grundformen der Polyeder, weitläufig und unbequem sein.

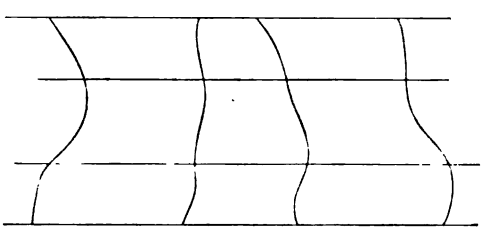


Fig. 314.

3. Zwei Prismen oder zwei Cylinder oder ein Prisma und ein Cylinder von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe genügen den Voraussetzungen des Satzes von CAVALIERI: sie lassen sich zwischen zwei parallele Ebenen legen, in denen die Endflächen der Körper liegen und da in jedem Körper alle den beiden Ebenen parallele Schnitte seiner Grundfläche kongruent sind, so sind sie in beiden Körpern einander gleich, wenn die Grundflächen einander gleich sind. Prismen oder Cylinder von gleicher Grundfläche und Höhe sind also einander gleich. Daher muß ein Prisma oder ein Cylinder gleich einem rechtwinkligen Parallelepiped von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe sein. Es ist daher das Volumen des Prismas und des Cylinders nach der Formel 1*) in Nr. 1

$$2) \qquad V = Gh \quad .$$

Für den gemeinen Cylinder, dessen Grundkreis den Radius r hat, ist $G = \pi r^2$, also

$$3) \qquad V = \pi r^2 h \quad .$$

Beispiele:

1. Ein regelmäßiges n-seitiges Prisma, dessen Kanten sämtlich gleich a sind, hat das Volumen

$$V = \tfrac{1}{4} a^3 \cot \frac{180^0}{n} \quad .$$

2. Aus einem Stoffe, der das spezifische Gewicht 0,5 hat, ist ein Prisma verfertigt, das 200,8 *kg* wiegt und 4 *dm* hoch ist. Wie groß ist die Grundfläche G? Es folgt aus der Gleichung

$$G \cdot 40 \cdot 0{,}5 = 200{,}8 \, , \quad G = 10{,}04 \ cm^2 \quad .$$

3. Eine Röhre aus Kupfer hat die Länge $l = 1{,}2$ *m*, den äußern Durchmesser $d = 75$ *cm* und das Gewicht $P = 90$ *kg*. Wie dick ist die Wandung und wieviel Wasser faßt die Röhre, wenn das spezifische Gewicht $s = 9$ ist? Das Volumen der Röhre ist die Differenz zweier Cylinder von der Höhe l mit den Radien $\frac{1}{2}d$ und $\frac{1}{2}d - x$, wenn x die Dicke der Wandung ist. Es ergibt sich also die Gleichung:

$$[\tfrac{1}{4}\pi d^2 l - \pi(\tfrac{1}{2}d - x)^2 l]\, s = P$$

oder

$$x^2 - dx + \frac{P}{\pi l s} = 0 \quad ,$$

welche die brauchbare Wurzel

$$x = \tfrac{1}{2}d - \sqrt{\tfrac{1}{4}d^2 - \frac{P}{\pi l s}}$$

liefert. Die andre Wurzel würde $> \frac{1}{2}d$ sein. Das Volumen der Höhlung ist dann

$$V = \pi(\tfrac{1}{2}d - x)^2 l = \tfrac{1}{4}\pi d^2 l - \frac{P}{s} \quad .$$

Das Zahlenbeispiel gibt $x = 3{,}55$ *mm*, $V = 520{,}14$ dm^3, also faßt die Röhre 520,14 *kg* Wasser.

4. Ein dreiseitiges Prisma vom Volumen V hat die Grundkanten a, b, c; es sind die Volumina des um- und des eingeschriebenen Cylinders zu berechnen.

Sind r und ϱ die Radien des Um- und des Inkreises der Grundfläche, so sind die Volumina der beiden Cylinder

$$C_u = \pi r^2 h \, , \quad C_e = \pi \varrho^2 h \quad .$$

Nun ist der Inhalt F der Grundfläche des Prismas aus den drei Seiten zu berechnen und man erhält aus

$$V = Fh, \quad h = \frac{V}{F}$$

und die Radien

$$r = \frac{abc}{4F}; \quad \varrho = \frac{F}{s}, \quad s = \tfrac{1}{2}(a+b+c) \; ;$$

mithin ergeben sich

$$C_u = \pi \frac{a^2 b^2 c^2}{16 F^3} V, \qquad C_e = \pi \frac{4F}{(a+b+c)^2} V \quad .$$

5. In eine Kugel vom Radius r ist ein gerader Cylinder beschrieben, der den Mantel M hat; wie groß ist sein Volumen V? Man erhält zu

$$\varrho h = \frac{M}{2\pi} \quad ,$$

worin ϱ der Radius des Grundkreises des Cylinders ist, aus dem gemeinsamen Achsenschnitt von Kugel und Cylinder die zweite Gleichung

$$\varrho^2 + \tfrac{1}{4}h^2 = r^2 \quad ,$$

also

$$\varrho + \tfrac{1}{2}h = \sqrt{r^2 + \frac{M}{2\pi}}, \quad \varrho - \tfrac{1}{2}h = \pm\sqrt{r^2 - \frac{M}{2\pi}} \quad ,$$

folglich

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{r^2 + \frac{M}{2\pi}} \pm \sqrt{r^2 - \frac{M}{2\pi}}\right)$$

und

$$V = \tfrac{1}{4}M\left(\sqrt{r^2 + \frac{M}{2\pi}} \pm \sqrt{r^2 - \frac{M}{2\pi}}\right) \quad .$$

Es gibt zwei Cylinder, bei denen ϱ und $\frac{1}{2}h$ untereinander vertauscht sind.

6. Das Volumen eines Prismas, dessen Grundfläche G ist und dessen Seitenkante s den Neigungswinkel φ mit der Ebene der Grundfläche bildet, ist

$$V = Gs \sin\varphi \quad .$$

Ist eine an der Grundfläche liegende Ecke bestimmt, so ist φ die sphärische Höhe des dieser Ecke zugeordneten sphärischen Dreiecks, die nach § 12 Nr. 2, 9) berechnet werden kann. Für ein Rhomboeder mit der Kante a und dem spitzen Kantenwinkel α erhält man z. B.

$$V = 2a^3\sqrt{\sin\tfrac{3}{2}\alpha \sin^3\tfrac{1}{2}\alpha} \quad .$$

4. Zwei Pyramiden oder eine Pyramide und ein Kegel oder zwei Kegel von gleicher Höhe kann man zwischen zwei parallele Ebenen legen, so daß die Grundflächen in die eine, die Spitzen in die andre fallen. Haben zwei solche Körper die Grundflächen G_1 und G_2 und bringt eine dritte zu den beiden Ebenen parallele Ebene die Schnittflächen F_1 und F_2 hervor, so muß nach § 16 Nr. 2

$$\frac{F_1}{G_1} = \frac{F_2}{G_2}$$

sein. Ist also $G_1 = G_2$, so muß auch $F_1 = F_2$ sein. Nach dem CAVALIERIschen Satze sind also Pyramiden oder Kegel von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe einander gleich.

Zwischen der Ebene der beiden Grundflächen und der Schnittebene liegen Pyramiden- oder Kegelstumpfe, die ebenfalls den Voraussetzungen des Satzes von CAVALIERI genügen. Es sind also auch Pyramiden- oder Kegelstumpfe von gleichen Endflächen und gleicher Höhe einander gleich.

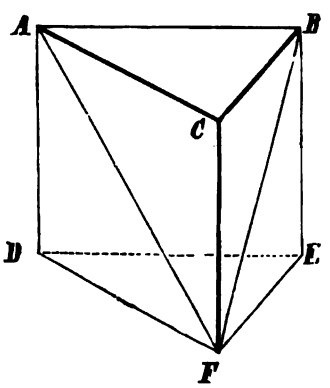


Fig. 315.

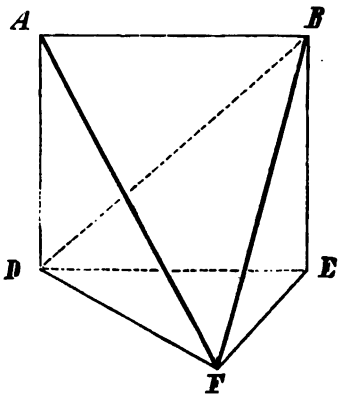


Fig. 316.

Ein dreiseitiges Prisma kann durch zwei ebene Schnitte in drei gleiche Tetraeder zerlegt werden. Legt man nämlich einen Schnitt durch eine Grundkante AB (Fig. 315) und die nicht in derselben Seitenfläche liegende Ecke F der andern Grundfläche des Prismas, so wird ein Tetraeder $ABCF$ abgeschnitten, das zur Grundfläche die Grundfläche ABC des Prismas hat, und dessen Höhe gleich der Höhe des Prismas ist. Der übrigbleibende Körper ist eine vierseitige Pyramide, deren Spitze F und deren Grundfläche die Seitenfläche $ABED$ des Prismas ist. Diese Pyramide kann mittels eines durch F und eine Diagonale DB ihrer Grundfläche gelegten Schnittes (Fig. 316) in zwei Tetraeder zerschnitten werden, deren Grundflächen DEB, DAB einander gleich sind, und die dieselbe Spitze F, also auch gleiche Höhen haben. Diese beiden Tetraeder sind also einander gleich. Das eine kann aber als ein Tetraeder betrachtet werden, das die Grundfläche DEF des Prismas zur Grundfläche und ihre Spitze in B, also auch gleiche Höhe mit dem Prisma hat. Dieses Tetraeder hat mit dem zuerst abgeschnittenen $ABCF$ gleiche Grundfläche und gleiche Höhe und ist ihm also auch gleich. Somit sind die drei Tetraeder einander gleich.

Umgekehrt kann ein Tetraeder $ABCF$ als der dritte Teil eines dreiseitigen Prismas betrachtet werden, das mit ihm gleiche Grundfläche G und gleiche Höhe h hat.

Daher ist das Volumen des Tetraeders

$$4) \qquad V = \tfrac{1}{3} G h \quad .$$

Da eine Pyramide oder ein Kegel gleich einem Tetraeder von gleicher Grundfläche und Höhe ist, so gilt die Formel 4) auch für das Volumen einer Pyramide oder eines Kegels mit der Grundfläche G und der Höhe h. Bei dem gemeinen Kegel, dessen Grundkreis den Radius r hat, ist noch

$$5) \qquad V = \tfrac{1}{3} \pi r^2 h \quad .$$

Ein Pyramidenstumpf, dessen Endflächen $G_1 > G_2$ sind und der die Höhe h hat, ist die Differenz der ergänzten und der Ergänzungspyramide, die die Höhen h_1 und h_2 haben; es ist also sein Volumen

$$V = \tfrac{1}{3} G_1 h_1 - \tfrac{1}{3} G_2 h_2 \quad .$$

Setzt man hierin die Werte für h_1 und h_2 aus § 16 Nr. 3 ein, so ergibt sich das Volumen des Pyramidenstumpfs

$$6) \qquad V = \tfrac{1}{3} h \frac{\sqrt{G_1^3} - \sqrt{G_2^3}}{\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}} = \tfrac{1}{3} h \left(G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2\right) .$$

Dieselbe Formel gilt auch für das Volumen des Kegelstumpfs, wobei man $G_1 = \pi r_1^2$, $G_2 = \pi r_2^2$ zu setzen hat, wenn $r_1 > r_2$ die Radien der Endflächen sind. Damit ergibt sich das Volumen des Kegelstumpfs

$$7) \qquad V = \tfrac{1}{3} \pi h \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1 - r_2} = \tfrac{1}{3} \pi h \left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right) .$$

Beispiele:

1. Das Volumen einer regelmäßigen n-seitigen Pyramide mit der Grundkante a und der Seitenkante b ist

$$V = \tfrac{1}{12} n a^2 b \cot\alpha \sin\beta ,$$

wenn

$$\alpha = \frac{180^0}{n}, \quad \cos\beta = \frac{a}{2 b \sin\alpha}$$

ist. Dabei ist β der Neigungswinkel der Seitenkante zur Grundfläche.

2. Ein regelmäßiger n-seitiger Pyramidenstumpf, dessen Grundkante a_1, dessen Endkante a_2 und dessen Höhe h ist, hat das Volumen

$$V = \tfrac{1}{3} \left(a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2\right) h \cot \frac{180^0}{n} .$$

3. Ein regelmäßiges Polyeder kann in kongruente regelmäßige Pyramiden zerlegt werden, deren Spitzen im Mittelpunkt des Polyeders liegen und deren Grundflächen die Seitenflächen des Körpers sind; die Höhe jeder Pyramide ist der Radius ϱ der Inkugel. Ist O die Oberfläche des Polyeders, so gibt die Summe dieser Pyramiden das Volumen des regelmäßigen Polyeders

$$V = \tfrac{1}{3} O \varrho .$$

Aus den in § 20 Nr. 3 für ϱ und in § 21 Nr. 1 für O aus der Kante a berechneten Werten erhält man für das regelmäßige

Tetraeder: $V = \tfrac{1}{12} a^3 \sqrt{2}$,

Hexaeder: $V = a^3$,

Oktaeder: $V = \tfrac{1}{3} a^3 \sqrt{2}$,

Dodekaeder: $V = \tfrac{1}{4} a^3 \left(15 + 7\sqrt{5}\right)$,

Ikosaeder: $V = \tfrac{5}{12} a^3 \left(\sqrt{5} + 3\right)$.

Für den Würfel ist das Resultat ohne weiteres bekannt. Das reguläre Tetraeder hat die Grundfläche $\tfrac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$ und die Höhe $a\sqrt{\tfrac{2}{3}}$. Das reguläre Oktaeder besteht aus zwei regelmäßigen quadratischen Pyramiden, deren Grundfläche a^2 und deren Höhe $a\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ ist.

4. Sind von einem Tetraeder drei anstoßende Kanten a, b, c und die Winkel ab, bc, ca, die sie miteinander bilden, gegeben und betrachtet man die Fläche der Kanten a, b als Grundfläche, so ist

$$G = \tfrac{1}{2} a b \sin ab , \quad h = c \sin\varphi ,$$

wenn c mit der Grundfläche den Neigungswinkel φ bildet. Dieser ist aber die

sphärische Höhe des der Ecke mit den Seiten ab, bc, ca zugeordneten sphärischen Dreiecks, also ist nach § 12 Nr. 2 Formel 9)

$$\sin\varphi = \frac{2}{\sin a\,b} \cdot S \quad ,$$

demnach ergibt sich das Volumen des Tetraeders

$$V = \tfrac{1}{3} G h = \tfrac{1}{3} a\,b\,c \cdot S \quad .$$

Aus der Analogie dieser Formel mit der für den Inhalt eines Dreiecks erklärt sich die Bezeichnung Eckensinus für die Größe S.

5. Ist um eine Kugel vom Radius r ein gerader Kegel beschrieben, dessen Seitenlinie mit der Grundfläche den Winkel α bildet, so ist, wenn der Grundkreis den Radius ϱ hat, die Höhe des Kegels $\varrho \tan\alpha$, also das Volumen des Kegels:

$$V = \tfrac{1}{3}\pi\varrho^3 \tan\alpha \quad ,$$

dabei ist

$$\varrho = r \cot\tfrac{1}{2}\alpha \quad .$$

Wenn man diesen Wert in V einsetzt, so kann man umformen:

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^3 \cot^2\tfrac{1}{2}\alpha \cdot \frac{2\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha} = \tfrac{1}{3}\pi r^3 \cot^2\tfrac{1}{2}\alpha \left(\frac{1}{\cos\alpha} + 1\right) \quad .$$

Nun ist die Oberfläche des Kegels

$$O = \pi\varrho\frac{\varrho}{\cos\alpha} + \pi\varrho^2 = \pi r^2 \cot^2\tfrac{1}{2}\alpha \left(\frac{1}{\cos\alpha} + 1\right) \quad ;$$

mithin hat man die Beziehung

$$V = \tfrac{1}{3} O r \quad .$$

6. Von einem geraden Kegelstumpf ist die Höhe h, die Seitenlinie s und der Mantel M gegeben; wie groß ist das Volumen V? Man hat

$$r_1 + r_2 = \frac{M}{\pi s}, \quad (r_1 - r_2)^2 = s^2 - h^2 \quad ;$$

da nun

$$r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2 = \tfrac{3}{4}(r_1 + r_2)^2 + \tfrac{1}{4}(r_1 - r_2)^2$$

ist, so ergibt sich

$$V = \tfrac{1}{12}\pi h \left(\frac{3M^2}{\pi^2 s^2} + s^2 - h^2\right) \quad .$$

7. Aus einer Pyramide mit der Grundfläche G und der Höhe h soll durch zwei der Grundfläche parallele Ebenen ein Pyramidenstumpf von der Höhe k und dem Volumen V herausgeschnitten werden. Sind die Endflächen des Stumpfes $F_1 > F_2$ und ist der Abstand der kleinern von der Spitze x, der größern also $x + k$, so hat man

$$V = \tfrac{1}{3} k (F_1 + \sqrt{F_1 F_2} + F_2)$$

und

$$\sqrt{F_1} = \frac{x + k}{h}\sqrt{G}, \quad \sqrt{F_2} = \frac{x}{h}\sqrt{G} \quad .$$

Durch Einsetzen erhält man für x die quadratische Gleichung

$$x^2 + k x - \frac{V h^2}{G k} + \tfrac{1}{3} k^2 = 0 \quad ,$$

welche die brauchbare Wurzel

$$x = \sqrt{\frac{V h^2}{G k} - 1\tfrac{1}{2} k^2} - \tfrac{1}{2} k$$

liefert. Die andre negative Wurzel würde die Bedeutung haben, daß man auch die Pyramide in der Erweiterung über die Spitze hinaus schneiden könnte.

8. Schneidet man einen Kegelstumpf, dessen Endflächen die Radien r_1 und r_2 haben und dessen Höhe h ist, durch eine zu den Endflächen parallele Ebene in einem Kreise vom Radius ϱ, so daß die Höhe in die beiden Abschnitte x_1 und x_2 geteilt wird, so haben die beiden Teile des Stumpfes die Volumina

$$V_1 = \tfrac{1}{3}\pi x_1 \frac{r_1^3 - \varrho^3}{r_1 - \varrho}, \quad V_2 = \tfrac{1}{3}\pi x_2 \frac{\varrho^3 - r_2^3}{\varrho - r_2} .$$

Nun gelten die Proportionen:

$$\frac{x_1}{r_1 - \varrho} = \frac{h}{r_1 - r_2}, \quad \frac{x_2}{\varrho - r_2} = \frac{h}{r_1 - r_2} ,$$

so daß man erhält

$$V_1 = \tfrac{1}{3}\pi h \frac{r_1^3 - \varrho^3}{r_1 - r_2}, \quad V_2 = \tfrac{1}{3}\pi h \frac{\varrho^3 - r_2^3}{r_1 - r_2} .$$

Das Verhältnis beider Teile ist

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{r_1^3 - \varrho^3}{\varrho^3 - r_2^3} .$$

Der Kegelstumpf wird also halbiert, wenn

$$r_1^3 - \varrho^3 = \varrho^3 - r_2^3, \quad \varrho = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(r_1^3 + r_2^3)}$$

ist. Die Entfernungen x_1 und x_2 des Schnittes von den Endflächen ergeben sich dann aus den obigen Proportionen.

9. Es sei das Volumen V eines Kegels zu berechnen aus dem Radius r des Grundkreises, der Achse a und dem Winkel γ an der Spitze des Hauptachsenschnittes. Der Hauptachsenschnitt enthält die kleinste Seitenlinie s_1, die größte s_2 und die Höhe h des Kegels; drückt man seinen Inhalt doppelt aus, so hat man

$$\tfrac{1}{2} s_1 s_2 \sin\gamma = r h, \quad s_1 s_2 = \frac{2 r h}{\sin\gamma}$$

und nach dem allgemeinen pythagoreischen Lehrsatz ist

$$4 r^2 = s_1^2 + s_2^2 - 2 s_1 s_2 \cos\gamma = s_1^2 + s_2^2 - 4 r h \cot\gamma .$$

Nun ist aber nach § 18 Nr. 3

$$s_1^2 + s_2^2 = 2 a^2 + 2 r^2 ;$$

so daß aus der vorigen Gleichung

$$h = \frac{a^2 - r^2}{2 r} \tan\gamma$$

und das Volumen

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h = \tfrac{1}{6}\pi r (a^2 - r^2) \tan\gamma$$

erhalten wird. Für $a = r$ wird der Ausdruck für V unbestimmt, weil dann $\gamma = 90^0$, $\tan\gamma = \infty$ ist. In der Tat ist in diesem Falle der Hauptachsenschnitt nicht bestimmt; es muß noch ein andres Bestimmungsstück gegeben sein. Für $a < r$ wird $\gamma > 90^0$, $\tan\gamma$ also negativ.

10. Es ist der Rotationskegel zu bestimmen, dessen Mantel M und dessen Volumen V gegeben ist. Ist x der Radius der Grundfläche, y die Höhe, so ergeben die beiden Gleichungen

$$\pi x\sqrt{x^2+y^2} = M, \quad \tfrac{1}{3}\pi x^2 y = V$$

durch Elimination von y die kubische Gleichung für x^2:

$$x^6 - \frac{M^2}{\pi^2}x^2 + \frac{9V^2}{\pi^2} = 0 \quad .$$

Ist φ der Neigungswinkel der Seitenlinie zur Grundfläche, so ist

$$\frac{\pi x^2}{\cos\varphi} = M, \quad x^2 = \frac{M}{\pi}\cos\varphi$$

und man erhält die kubische Gleichung für $\cos\varphi$:

$$\cos^3\varphi - \cos\varphi + \frac{9\pi V^2}{M^3} = 0 \quad .$$

5. Die Grundformen der Polyeder sind besondere Fälle des Prismatoids (§ 14 Nr. 4). Die bisher entwickelten Formeln der Volumetrie der Polyeder müssen also in der Formel für das Volumen dieser allgemeinen Polyederform, die in folgender Weise erhalten werden kann, als besondere Fälle enthalten sein.

Man lege durch das Prismatoid mit den Endflächen *ABCD* und *EFGH* (Fig. 317) eine von beiden Endflächen gleich weit abstehende parallele Ebene und nehme in dem entstehenden Mittelschnitt *IKLMN* einen beliebigen Punkt P an, der mit jedem Eckpunkt des Körpers durch eine Gerade verbunden wird. Diese Geraden können als die Kanten einer Anzahl von Pyramiden betrachtet werden, deren gemeinschaftliche Spitze P ist und in die das ganze Prismatoid geteilt wird. Zwei von diesen Pyramiden haben die halbe Höhe des Prismatoids zur Höhe und je eine der Endflächen zur Grundfläche. Bezeichnen wir die Flächeninhalte der Endflächen mit G_1 und G_2, die Höhe des Prismatoids durch h, so ist die Summe der Inhalte der beiden Pyramiden gleich $\frac{1}{3}G_1 \cdot \frac{1}{2}h + \frac{1}{3}G_2 \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{6}h(G_1 + G_2)$. Die übrigen Pyramiden haben die Seitenflächen des Prismatoids zu Grundflächen, und können vierseitig oder dreiseitig sein. Man braucht jedoch nur dreiseitige Pyramiden in Betracht zu ziehen, da jede vierseitige durch einen ebenen Schnitt, der durch die Spitze P und eine Diagonale der Grundfläche geht, in zwei Tetraeder zerlegt werden kann. Ist nun *EBF* die Grundfläche eines Tetraeders, so wird diese durch die Ebene des Mittelschnitts in zwei Pyramiden geteilt, die mit dem Tetraeder dieselbe Höhe haben. Daher verhält sich die kleinere dreiseitige Pyramide $P(BKL)$ zur ganzen $P(BEF)$ wie die Grundfläche *BKL* zur Grund-

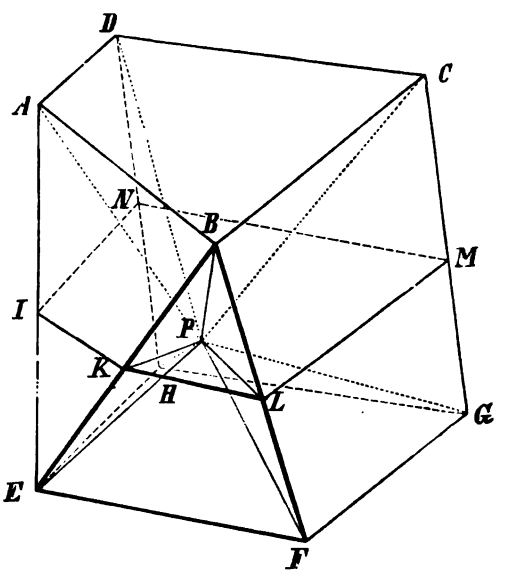


Fig. 317.

fläche BEF. Da nun der Mittelschnitt die Kanten BE, BF in K und L halbiert, so ist BEF viermal so groß als BKL und folglich auch das Tetraeder $P(BEF)$ viermal so groß als das Tetraeder $P(BKL)$. Die Pyramide $P(BKL)$ kann nun auch als eine solche betrachtet werden, deren Grundfläche PKL und deren Spitze B, deren Höhe also gleich $\frac{1}{2}h$ ist. Demnach ist der Inhalt dieser Pyramide gleich $\frac{1}{3}PKL \cdot \frac{1}{2}h$, und derjenige der Pyramide $P(BEF)$ also gleich $\frac{2}{3}PKL \cdot h$. Da sich diese Entwicklung auf jede der Pyramiden anwenden läßt, so folgt, daß die Summe ihrer Volumina gleich $\frac{2}{3}(PKL + PLM + PMN + \ldots)h$ ist. Die in der Klammer enthaltene Summe ist gleich dem Inhalt des Mittelschnitts M, also ist jene Pyramidensumme gleich $\frac{2}{3}Mh$. Addiert man hierzu die vorher berechnete Summe der beiden ersten Pyramiden, so erhält man das Volumen des Prismatoids

$$V = \tfrac{1}{6}h(G_1 + G_2) + \tfrac{2}{3}hM$$

oder

$$8) \qquad V = \tfrac{1}{6}h(G_1 + 4M + G_2) \quad .$$

Für das Prisma mit der Grundfläche G ist $G_1 = M = G_2 = G$, also $V = Gh$; bei der Pyramide mit der Grundfläche G ist $G_1 = G$, $M = \frac{1}{4}G$, $G_2 = 0$, also $V = \frac{1}{3}Gh$; für den Pyramidenstumpf mit den Endflächen G_1 und G_2 ist nach § 16 Nr. 3

$$\sqrt{M} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{G_1} + \sqrt{G_2}), \quad M = \tfrac{1}{4}(G_1 + 2\sqrt{G_1 G_2} + G_2) \quad ,$$

also

$$V = \tfrac{1}{3}h(G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2) \quad .$$

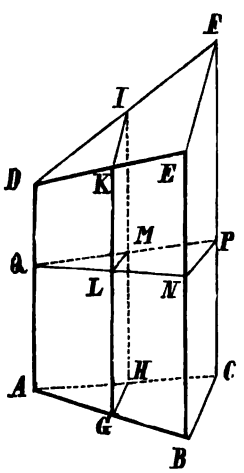


Fig. 318.

Da dieselben Volumenformeln auch für die den Polyedern entsprechenden runden Körper: Cylinder, Kegel, Kegelstumpf, gelten, so sind auch diese Körper in volumetrischer Beziehung als besondere Formen des Prismatoids anzusehen.

Beispiele:

1. Ein dreiseitiges Prisma sei durch eine der Grundfläche nicht parallele Ebene durchschnitten. Man soll das Volumen des schiefgeschnittenen Prismas berechnen.

Da die Kante DA der Fläche $BCFE$ (Fig. 318) parallel ist, so kann man den Körper als ein Prismatoid betrachten, dessen eine Endfläche $BCFE$, und dessen andre Grundfläche auf die Kante DA reduziert ist. Der Mittelschnitt hat dann zwei parallele Seiten KG, IH, ist also ein Trapez. Es sei nun NPQ ein Normalschnitt des Prismas und $PN = p$ seine Grundlinie, so ist seine Höhe h zugleich die des Prismatoids. Bezeichnen nun a, b, c der Reihe nach die parallelen Kanten AD, BE, CF, so erhält man

$$G_1 = \frac{b+c}{2} \cdot p; \quad G_2 = 0, \quad M = \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a+c}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}p \quad ,$$

also

$$V = \frac{1}{3}h\left(\frac{b+c}{4}p + \frac{2a+b+c}{4}p\right) = \frac{1}{3}hp \cdot \frac{1}{4}(b+c+2a+b+c)$$

$$= \frac{1}{3}hp \cdot \frac{a+b+c}{2} \quad .$$

Setzt man nun den Flächeninhalt des Normalschnitts NPQ

$$\tfrac{1}{2} h p = F \quad ,$$

so erhält man

$$V = \frac{a + b + c}{3} \cdot F \quad ,$$

d. h. das schiefgeschnittene dreiseitige Prisma ist gleich einem Prisma, dessen Grundfläche ein Normalschnitt, und dessen Höhe gleich dem arithmetischen Mittel der drei parallelen Kanten ist.

Man kann diesen Satz benutzen, um auch die Volumina schiefgeschnittener Prismen von mehr als drei Seiten zu berechnen, indem man diese Körper durch Schnitte in dreiseitige Prismen zerlegt.

2. Den Inhalt eines Kastens (Pontons) zu berechnen, dessen Grundflächen Rechtecke mit den Längen a_1, a_2 und den Breiten b_1, b_2 sind und dessen zu diesen Flächen senkrechte Tiefe h ist. $a_1 = 1{,}145\ m$, $b_1 = 0{,}875\ m$, $a_2 = 1{,}536\ m$, $b_2 = 0{,}910\ m$, $h = 0{,}234\ m$.

Das Prismatoid ist in diesem Falle ein Obelisk. Der Mittelschnitt ist ein Rechteck mit den Seiten $\frac{1}{2}(a_1 + a_2)$ und $\frac{1}{2}(b_1 + b_2)$; es ist also

$$G_1 = a_1 b_1 \ , \quad G_2 = a_2 b_2 \ , \quad M = \tfrac{1}{4}(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) \quad ,$$

mithin

$$V = \tfrac{1}{6} h [a_1 b_1 + a_2 b_2 + (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)] = 0{,}2801\ m^3 \quad .$$

Wenn $b_2 = 0$ ist, so reduziert sich die eine Endfläche auf die Kante a_2; es entsteht ein dachförmiger Körper, dessen Volumen, wenn man b für b_1 schreibt,

$$V = \tfrac{1}{6}(2 a_1 + a_2) b h$$

sich auch nach Beispiel 1 als das eines schiefgeschnittenen Prismas ergeben würde.

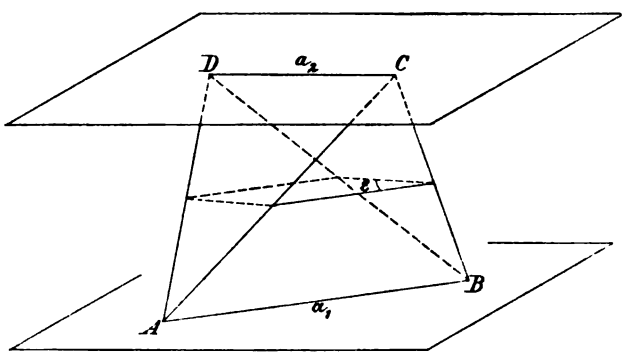


Fig. 819.

3. Zwei sich kreuzende Kanten $AB = a_1$, $CD = a_2$ des Tetraeders $ABCD$ (Fig. 319) bestimmen zwei parallele Ebenen. Das Tetraeder läßt sich daher als ein Prismatoid ansehen, von dem die beiden Endflächen auf die Kanten AB und CD reduziert sind. Der Mittelschnitt, dessen Ebene zu den beiden parallelen Ebenen dieser Kanten parallel ist, wird ein Parallelogramm, dessen anstoßende Seiten $\frac{1}{2} a_1$ und $\frac{1}{2} a_2$ den Winkel ε einschließen, der gleich dem Winkel ist, den die beiden sich kreuzenden Kanten miteinander bilden. Man hat also

$$G_1 = 0 \ , \quad G_2 = 0 \ , \quad M = \tfrac{1}{4} a_1 a_2 \sin\varepsilon \quad ;$$

ist dann noch der kürzeste Abstand p der beiden sich kreuzenden Kanten a_1 und a_2 gegeben, so erhält man das Volumen des Tetraeders

$$V = \tfrac{1}{6} p a_1 a_2 \sin\varepsilon \quad .$$

Beim regelmäßigen Tetraeder kreuzen sich die Kanten rechtwinklig, also ist $\sin\varepsilon = 1$; p ist die Entfernung der Mittelpunkte der beiden sich kreuzenden Kanten, demnach

$$p = a\sqrt{\tfrac{1}{2}} \quad ,$$

wenn $a_1 = a_2 = a$ gesetzt wird. Also erhält man das Volumen des regelmäßigen Tetraeders mit der Kante a:

$$V = \tfrac{1}{12}a^3\sqrt{2}$$

in Übereinstimmung mit Nr. 4 Beispiel 3.

§ 23. Volumen und Oberfläche der Kugel und ihrer Teile.

1. Man beschreibt um den Kreisquadranten AOC (Fig. 320) das Quadrat $AOCD$, dessen Seiten AD und CD also den Quadrantenbogen berühren, zieht die Diagonale OD und zu AO eine beliebige Senkrechte, die den Quadrantenbogen in P, AO in Q, CD in R und OD in S schneidet. Läßt man diese Figur um AO rotieren, so beschreibt der Kreisquadrant eine Halbkugel; das Quadrat $AOCD$ den um die Halbkugel beschriebenen Rotationscylinder; das Dreieck OAD einen Rotationskegel, dessen Grundfläche die Halbkugel berührt und der seine Spitze im Mittelpunkt der Kugel hat; das Dreieck OCD einen Hohlkörper, der entsteht, wenn man aus dem Cylinder den Kegel herausgeschnitten denkt. QP beschreibt einen Parallelkreis der Halbkugel, QR einen durch den Cylinder parallel der Grundfläche gelegten Schnittkreis, QS einen Kreisschnitt durch den Kegel und endlich SR einen Kreisring, der als Schnitt des Hohlkörpers zu betrachten ist. Zieht man in der rotierenden Figur noch OP, so hat man

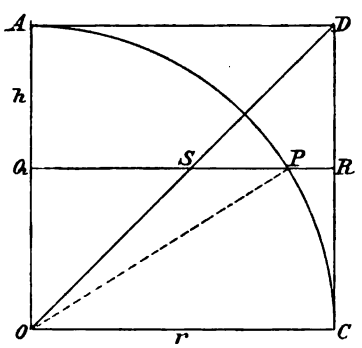


Fig. 320.

$$QP^2 = OP^2 - QO^2 \quad ;$$

nun ist aber $OP = OC = QR$ und $QO = QS$, weil OQS ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck ist. Man kann also für die Beziehung schreiben

$$QP^2 = QR^2 - QS^2$$

oder

$$\pi QP^2 = \pi QR^2 - \pi QS^2 \quad .$$

Es ist nun πQP^2 der Inhalt des Parallelkreises der Halbkugel, πQR^2 der des Schnittkreises des Cylinders, πQS^2 der des Schnittkreises des Kegels, also $\pi QR^2 - \pi QS^2$ der Kreisring, der als Schnitt durch den Hohlkörper anzusehen ist. Mithin ist der Schnittkreis, den eine beliebige, zu den Endflächen des Cylinders parallele Ebene in der Halbkugel hervorbringt, gleich dem Kreisring, in dem der Hohlkörper durch diese Ebene geschnitten wird. Die Halbkugel und der Hohlkörper sind also einander gleich, weil sie den Voraussetzungen des Cavalierischen Satzes genügen. Damit ist der Archimedische Satz bewiesen:

Eine Halbkugel ist gleich dem ihr umschriebenen Cylinder vermindert um den Kegel von derselben Grundfläche und Höhe.

Ist der Radius der Halbkugel r, so ist demnach ihr Volumen

$$\pi r^3 - \tfrac{1}{3}\pi r^3 = \tfrac{2}{3}\pi r^3 \quad ,$$

mithin das Volumen der Kugel:

$$1) \qquad V = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \quad .$$

Ist der Durchmesser der Kugel $2r = d$, so ist auch

$$2) \qquad V = \tfrac{1}{6}\pi d^3 \quad .$$

Das Volumen der Kugel kann man sich in unendlich viele kegelförmige Volumenelemente zerlegt denken, von denen jedes ein Flächenelement der Kugeloberfläche als Grundfläche hat und deren Spitzen im Mittelpunkt der Kugel liegen. Die Höhe jedes solchen konischen Volumenelements ist der Radius der Kugel. Ist f ein Flächenelement der Kugelfläche, so ist das Volumenelement $\frac{1}{3}fr$. Addiert man alle diese Volumenelemente die dieselbe Höhe r haben, so gibt die Summe aller Flächenelemente die Oberfläche O der Kugel; mithin muß sich das Volumen der Kugel ausdrücken lassen in der Form

$$V = \tfrac{1}{3}O \cdot r \quad ,$$

d. h. die Kugel ist gleich einem Kegel (oder einer Pyramide), dessen Grundfläche die in einer Ebene ausgebreitete (komplanierte) Kugeloberfläche und dessen Höhe der Kugelradius ist. Da man nach 1) V kennt, so ergibt sich die Oberfläche der Kugel

$$3) \qquad O = 4\pi r^2 \quad .$$

Sie ist also das Vierfache des Inhalts eines größten Kreises oder gleich dem Mantel des umschriebenen Cylinders.

Beispiele:

1. Eine Büchsenkugel habe den Durchmesser 6,4 *cm*. Wie groß ist ihr Gewicht P, wenn das spezifische Gewicht des Bleies 11,33 ist?

Man erhält

$$P = \tfrac{1}{6}\pi \cdot 0{,}64^3 \cdot 11{,}33 = 1{,}555 \; kg \quad .$$

2. Um die Wandstärke einer hohlen eisernen Kugel zu bestimmen, wurde sie in Wasser geworfen und man fand, daß sie gerade zur Hälfte einsank. Der äußere Durchmesser der Kugel war 2 *dcm*; das spezifische Gewicht des Eisens 7,4. Wie groß ergibt sich hieraus die Wandstärke der Kugel, wenn das Gewicht der eingeschlossenen Luft nicht berücksichtigt wird?

Ist die Wand der Halbkugel x *dcm* dick, so ist ihr Volumen

$$\tfrac{1}{3}\pi[r^3 - (r - x)^3] = \tfrac{1}{3}\pi(3r^2x - 3rx^2 + x^3) \quad ,$$

also für $r = 1$

$$V = \tfrac{1}{3}\pi(3x - 3x^2 + x^3) \quad ,$$

und mithin ihr Gewicht $7{,}4 \cdot V\,kg$. Dieses Gewicht ist gleich dem einer Halbkugel aus Wasser, deren Radius $r = 1$ ist, mithin gleich $\frac{2}{3}\pi\,kg$. Hieraus folgt die Gleichung

$$7{,}4 \cdot 2 \cdot (3x - 3x^2 + x^3) = 1 \quad ,$$

oder besser:

$$7{,}4 \cdot 2[1 - (1 - x)^3] = 1 \quad ,$$

woraus

$$1 - (1 - x)^3 = \frac{1}{14{,}8}; \quad (1 - x)^3 = 1 - \frac{1}{14{,}8} = \frac{138}{148} \quad ,$$

also

$$1 - x = \sqrt[3]{\frac{138}{148}} = 0{,}97695 \, , \quad x = 1 - 0{,}97695 = 0{,}02305 \; dcm \quad ,$$

oder ungefähr 2,3 Millimeter folgt.

3. Eine Kugel, deren Volumen V gegeben ist, soll in einen geraden Kegel verwandelt werden, dessen Grundfläche gleich einem größten Kreise der Kugel ist. Wie lang wird die Seitenlinie dieses Kegels?

Ist r der Radius der Kugel, s die Seitenlinie des Kegels, so ist

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{s^2 - r^2} \quad ,$$

also

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \; ; \quad 16r^2 = s^2 - r^2 \; ; \quad s^2 = 17r^2 \quad ,$$

$$s = r\sqrt{17} = \sqrt{17} \cdot \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \quad .$$

4. Wie verhält sich die Oberfläche O einer Kugel zum Mantel M des umschriebenen Kegelstumpfs, dessen Seitenlinie den Winkel α mit der Grundfläche bildet? Ist ϱ der Radius der Kugel, s die Seitenlinie des Stumpfes, so ist

$$O = 4\pi\varrho^2 \, , \quad M = \pi s^2 \quad .$$

Nun ist aber

$$\varrho = \tfrac{1}{2} s \sin\alpha \, , \quad O = \pi s^2 \sin^2\alpha \quad ,$$

demnach ist

$$O = M \sin^2\alpha \quad .$$

Für $\alpha = 90^0$ wird $O = M$; der Kegelstumpf geht in den umschriebenen Cylinder über.

5. In eine Kugel vom Radius r ist ein gerader Cylinder einzuschreiben, dessen Oberfläche zu der der Kugel ein gegebenes Verhältnis $1 : \lambda$ hat. Der Radius ϱ des Grundkreises und die Höhe h des Cylinders lassen sich ausdrücken durch die Breite φ des Parallelkreises der Kugel, der die Grundfläche des Cylinders ist; man hat

$$\varrho = r\cos\varphi \, , \quad h = 2r\sin\varphi \quad .$$

Es soll dann

$$2\pi r\cos\varphi \cdot 2r\sin\varphi + 2\pi r^2\cos^2\varphi = \frac{1}{\lambda} \cdot 4\pi r^2$$

sein. Man hat daher, wenn man 2φ einführt, die goniometrische Gleichung:

$$\cos 2\varphi + 2\sin 2\varphi = \frac{2-\lambda}{\lambda}$$

zu lösen. Für $\lambda = 2$, wenn also die Cylinderoberfläche die Hälfte der Kugeloberfläche sein soll, ergibt sich einfacher

$$\tan 2\varphi = -\tfrac{1}{2} \, , \quad \varphi = 76^0 43' 3'' \quad .$$

2. Durch die Rotation des Halbsegments AQP (Fig. 320 S. 602) entsteht ein Teil des Kugelvolumens, den man Kugelsegment nennt. $QP = \varrho$ ist der Radius seines Grundkreises, $AQ = h$ die Höhe. Das Volumen des Segments ist gleich dem durch die Ebene seines Grundkreises abgeschnittenen Teiles des Hohlkörpers, der durch Rotation des Dreiecks SRD entsteht. Dieser Teil des Hohlkörpers ist gleich dem Volumen eines Cylinders, dessen Grundkreis den Radius r hat und dessen Höhe h ist, vermindert um einen Kegelstumpf von gleicher Höhe, dessen Grundflächen die Radien r und $QS = QO = r - h$ haben. Mithin ist das Volumen des Segments

$$V = \pi r^2 h - \tfrac{1}{3}\pi h[r^2 + r(r-h) + (r-h)^2] \quad ,$$

welche Formel sich vereinfachen läßt zu

$$4) \qquad V = \tfrac{1}{3}\pi h^2 (3r - h) \quad .$$

Für $r = h$ geht das Segment in die Halbkugel über; in der Tat gibt die Formel

$$V = \tfrac{2}{3}\pi r^2 \quad .$$

Durch eine Ebene, die nicht durch den Mittelpunkt geht, wird das Kugelvolumen in zwei Segmente zerlegt, von denen das eine kleiner, das andre größer als die Halbkugel ist. Die Höhe des kleinern ist kleiner, die des größern größer als der Radius.

Die Formel 4) gilt nach ihrer Herleitung zunächst nur für $h < r$. Daß sie aber auch für $h > r$ gilt, zeigt sich durch folgende Betrachtung. Führt man statt h die Entfernung $OQ = e$ der Ebene des Grundkreises vom Mittelpunkt ein, setzt also $h = r - e$, so wird

$$V = \tfrac{1}{3}\pi(r - e)^2(2r + e) = \tfrac{1}{3}\pi(2r^3 - 3er^2 - e^3) \quad .$$

Für das größere Segment würde nun $h = r + e$ zu setzen, d. h. e mit $-e$ zu vertauschen sein; man würde dadurch erhalten

$$V' = \tfrac{1}{3}\pi(2r^3 + 3er^2 + e^3) \quad .$$

Da nun wirklich $V + V' = \frac{4}{3}\pi r^3$, d. h. das Volumen der Kugel gibt, so ist damit bewiesen, daß die Formel 4) auch für $h > r$ anzuwenden ist.

Führt man in die Formel 4) statt des Kugelradius r den Radius ϱ des Grundkreises des Segments ein, so hat man

$$\varrho^2 = h(2r - h), \quad r = \frac{\varrho^2 + h^2}{2h}$$

zu setzen; damit erhält man das Volumen des Segments

$$5) \qquad V = \tfrac{1}{6}\pi h(3\varrho^2 + h^2) \quad .$$

In Fig. 320 S. 602 rotiert der Kreissektor AOP um einen ihn begrenzenden Radius AO und beschreibt einen Kugelsektor, der als Summe eines Kugelsegments und eines Kegels erscheint, dessen Grundkreis der des Segments, dessen Spitze der Kugelmittelpunkt und dessen Höhe $QO = r - h$ ist. Die Summe der beiden Volumina ist also

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h^2(3r - h) + \tfrac{1}{3}\pi\varrho^2(r - h) \quad .$$

Setzt man hierin den Wert für ϱ^2, so ergibt sich die einfache Formel für das Volumen des Kugelsektors:

$$6) \qquad V = \tfrac{2}{3}\pi r^2 h \quad .$$

Auch diese Formel gilt, wie man sich leicht auf gleiche Weise wie bei der Segmentformel überzeugen kann, für $h > r$. Für $h = 2r$ erhält man das Volumen der Kugel $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Ist der Centriwinkel $AOP = \alpha$ des rotierenden Kreissektors gegeben, so hat man

$$h = 2r\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha$$

einzusetzen, wodurch man für das Volumen des Kugelsektors die weitere Formel

$$7) \qquad V = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha$$

erhält. Diese gibt den Kugelsektor als Bruchteil des Kugelvolumens.

Schneidet man eine Kugel durch zwei parallele Ebenen, so ist der zwischen ihnen liegende Teil des Kugelvolumens eine Kugelschicht. Die Parallelkreise der Kugel sind ihre Endflächen und der Abstand der beiden parallelen Ebenen ihre Höhe. Ihr Volumen kann berechnet werden als Differenz zweier Kugelsegmente, die die Endflächen der Schicht als Grundflächen haben. Sind also

$\varrho_1 > \varrho_2$ die Radien der Endflächen und h die Höhe der Schicht, und haben diese Kugelsegmente die Höhen h_1 und h_2, so ist das Volumen der Schicht nach Formel 4)

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h_1^2(3r - h_1) - \tfrac{1}{3}\pi h_2^2(3r - h_2) = \tfrac{1}{3}\pi[3r(h_1^2 - h_2^2) - (h_1^3 - h_2^3)] \quad .$$

Aus der Klammer kann man $h_1 - h_2 = h$ als Faktor ausheben, so daß man erhält

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h[3r(h_1 + h_2) - (h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2)] \quad .$$

Nun ist

$$\varrho_1^2 = h_1(2r - h_1), \quad \varrho_2^2 = h_2(2r - h_2) \quad ,$$

woraus man findet:

$$2rh_1 = \varrho_1^2 + h_1^2, \quad 2rh_2 = \varrho_2^2 + h_2^2 \quad ,$$

also:

$$3r(h_1 + h_2) = \tfrac{3}{2}(\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + h_1^2 + h_2^2) \quad .$$

Setzt man diesen Ausdruck in V ein, so verwandelt sich die Formel in:

$$V = \tfrac{1}{6}\pi h(3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h_1^2 - 2h_1 h_2 + h_2^2) \quad ;$$

da $h_1^2 - 2h_1 h_2 + h_2^2 = h^2$ ist, so ergibt sich das Volumen der Kugelschicht:

$$8) \qquad V = \tfrac{1}{6}\pi h(3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2) \quad .$$

Die Formel gilt allgemein für jede Lage der Endflächen. In ihr sind die Formeln für die Volumina der Kugel und des Segments als besondere Fälle enthalten. Für $h = 2r$, $\varrho_1 = 0$, $\varrho_2 = 0$ ergibt sich das Volumen der Kugel; für $\varrho_2 = 0$ erhält man die Formel 5) für das Segment.

Es ist bemerkenswert, daß die Formel für das Volumen der Kugelschicht sich aus Formel 8) in § 22 für das Prismatoid ergibt. Hat der Mittelschnitt der Kugelschicht den Radius ϱ_3, so ist

$$\varrho_3^2 = \tfrac{1}{2}(h_1 + h_2)[2r - \tfrac{1}{2}(h_1 + h_2)] = r(h_1 + h_2) - \tfrac{1}{4}(h_1 + h_2)^2 \quad .$$

Nun erhält man aus

$$\varrho_1^2 + \varrho_2^2 = 2r(h_1 + h_2) - (h_1^2 + h_2^2) \quad ,$$

$$r(h_1 + h_2) = \tfrac{1}{2}(\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - h_1^2 - h_2^2) \quad ;$$

also ist

$$\varrho_3^2 = \tfrac{1}{4}(2\varrho_1^2 + 2\varrho_2^2 + h_1^2 - 2h_1 h_2 + h_2^2) = \tfrac{1}{4}(2\varrho_1^2 + 2\varrho_2^2 + h^2) \quad .$$

In der Formel für das Prismatoid hätte man nun

$$G_1 = \pi\varrho_1^2, \quad G_2 = \pi\varrho_2^2, \quad M = \tfrac{1}{4}\pi(2\varrho_1^2 + 2\varrho_2^2 + h^2)$$

zu setzen und würde dadurch in der Tat die Formel 8) erhalten. Dieses merkwürdige Resultat findet seine Erklärung darin, daß der Volumenformel des Prismatoids allgemeinere Körperformen folgen, deren Betrachtung nicht in das Gebiet der elementaren Stereometrie fallen (vgl. HEINZE, Genetische Stereometrie, bearb. von LUCKE, Leipzig TEUBNER 1886).

3. Der Teil der Kugeloberfläche, der den Kugelsektor und das Kugelsegment begrenzt, der also erhalten wird, wenn man die Kugel durch eine Ebene schneidet, heißt Kugelkappe; der Teil der Kugeloberfläche, der die Kugelschicht begrenzt, der zwischen zwei parallelen, die Kugel schneidenden Ebenen liegt, Kugelzone.

Den Kugelsektor kann man in derselben Weise wie in Nr. 1 die Kugel als eine Summe aus unendlich vielen konischen Volumenelementen zusammengesetzt denken. Diese Betrachtung führt auf den entsprechenden Satz, daß der Kugelsektor gleich einem Kegel sein muß, dessen Grundfläche die in einer Ebene ausgebreitete Kugelkappe und dessen Höhe der Radius der Kugel ist.

Ist also F der Inhalt der Kugelkappe, so muß nach Formel 6)

$$\tfrac{2}{3}\pi r^2 h = \tfrac{1}{3} F r$$

sein. Demnach ist der Inhalt der Kugelkappe:

$$9) \qquad F = 2\pi r h \quad .$$

Die Höhe h des Segments ist auch die Höhe der Kugelkappe. Ihr Inhalt ist gleich dem Mantel eines geraden Cylinders von gleicher Höhe, dessen Grundfläche ein größter Kugelkreis ist. Der Inhalt der Kugelkappe ist der Höhe proportional. Kappen derselben Kugel sind also gleich, wenn sie gleiche Höhe haben. Verdoppelt man die Höhe einer Kugelkappe, so wird ihr Inhalt verdoppelt. Die größere Kappe besteht aber aus der kleinern und einer Kugelzone von gleicher Höhe. Mithin gilt die Formel 9) auch für den Inhalt der Kugelzone.

Für $h = 2r$ erhält man die Oberfläche der Kugel: $4\pi r^2$.

4. Beispiele zu Nr. 2 und 3.

1. Eine hölzerne Kugel vom Durchmesser d sinkt im Wasser so weit ein, daß der hervorragende Teil die Höhe h hat. Man soll das spezifische Gewicht s der Holzart berechnen. Das Gewicht der Kugel muß gleich dem des verdrängten Wassers sein; das Wasservolumen ist das eines Kugelsegments von der Höhe $d - h$. Man hat also die Gleichung

$$\tfrac{1}{6}\pi d^3 \cdot s = \tfrac{1}{3}\pi (d-h)^2 (\tfrac{3}{2} d - d + h) \quad ,$$

woraus sich

$$s = \frac{(d-h)^2 (d+2h)}{d^3} = \left(1 - \frac{h}{d}\right)^2 \left(1 + 2\frac{h}{d}\right)$$

ergibt. Ragt z. B. $\frac{1}{5}$ des Kugeldurchmessers hervor, so ist $s = 0{,}896$.

2. Es ist der Sektor einer Kugel zu bestimmen, bei dem Segment und Kegel, aus denen er besteht, einander gleich sind. Ist r der Radius und α der Centriwinkel des rotierenden Sektors, so ist $r \sin\alpha$ der Radius des Grundkreises von Segment und Kegel und $r\cos\alpha$ die Höhe des Kegels. Da nun der Kegel die Hälfte des Kugelsektors sein soll, so muß

$$\tfrac{1}{3}\pi r^2 \sin^2\alpha \cdot r\cos\alpha = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3}\pi r^3 \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha$$

sein. Führt man $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ und $2\sin^2\frac{1}{2}\alpha = 1 - \cos\alpha$ ein, so zerfällt die goniometrische Gleichung in die beiden:

$$1 - \cos\alpha = 0 \quad ,$$

die das selbstverständliche Resultat $\alpha = 0$ liefert und

$$\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0 \quad ,$$

die

$$\cos\alpha = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1), \qquad \alpha = 51^0\,49'\,36''$$

ergibt. Die andre Wurzel ist nicht brauchbar, weil ihr absoluter Wert > 1 ist.

Ist h die Höhe des Segments, so ist

$$\cos\alpha = \frac{r-h}{r}, \qquad \frac{h}{r} = \tfrac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) \quad ,$$

wonach die Konstruktion leicht ausführbar ist.

3. Läßt man zwei sich schneidende Kreise mit den Radien r_1, r_2 und der Centrale c um die Centrale rotieren, so beschreibt die beiden Kreisen gemeinsame Fläche einen linsenförmigen Körper, der als Summe zweier Kugelsegmente zu betrachten ist. Der gemeinsame Grundkreis ist die Fläche, die durch Rotation

der gemeinsamen Sehne der beiden Kreise beschrieben wird. Haben diese beiden Segmente die Höhen h_1 und h_2, so ist das Volumen der Linse

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h_1^2(3r_1 - h_1) + \tfrac{1}{3}\pi h_2^2(3r_2 - h_2) = \tfrac{1}{3}\pi[3r_1h_1^2 + 3r_2h_2^2 - (h_1^3 + h_2^3)] \ .$$

Nun ist

$$h_1 + h_2 = d = r_1 + r_2 - c \quad ,$$

wobei d als Dicke der Linse bezeichnet werden kann; mithin

$$h_1^3 + h_2^3 = (h_1 + h_2)^3 - 3h_1h_2(h_1 + h_2) = d^3 - 3dh_1h_2 \ .$$

Drückt man den Radius des Grundkreises der beiden Segmente doppelt aus, so erhält man die Gleichung:

$$h_1^2 - h_2^2 = 2r_1h_1 - 2r_2h_2 \quad ,$$

die man schreiben kann

$$d(h_1 - h_2) = 2r_1h_1 - 2r_2h_2 \quad ,$$

so daß sich

$$h_1 = \frac{d}{2c}(2r_2 - d) \ , \qquad h_2 = \frac{d}{2c}(2r_1 - d)$$

ergeben. Multipliziert man aber die Gleichung mit $h_1 - h_2$, so erhält man links:

$$h_1^3 - h_1^2h_2 - h_1h_2^2 + h_2^3 = d^3 - 4dh_1h_2 \quad ,$$

während aus der rechten Seite

$$2r_1h_1^2 - 2r_1h_1h_2 - 2r_2h_1h_2 + 2r_2h_2^2 = 2r_1h_1^2 + 2r_2h_2^2 - 2(r_1 + r_2)h_1h_2$$

wird. Aus dieser Umformung erhält man

$$3r_1h_1^2 + 3r_2h_2^2 = \tfrac{3}{2}d^3 - 3dh_1h_2 + 3ch_1h_2 \ .$$

Führt man diesen Ausdruck und den für $h_1^3 + h_2^3$ in die Volumenformel ein, so ergibt diese

$$V = \tfrac{1}{6}\pi(d^3 + 6ch_1h_2) \ .$$

Hiernach ist ein numerisches Beispiel am bequemsten zu berechnen, wenn man vorher h_1 und h_2 bestimmt hat. Bemerkenswert ist, daß der erste Summand $\frac{1}{6}\pi d^3$ den Inhalt der Kugel vom Durchmesser d gibt. Setzt man die Werte von h_1 und h_2 ein, so kann man der Formel, je nachdem man c oder d als gegeben annehmen will, die beiden Formen geben:

$$V = 1\tfrac{1}{2}\pi\frac{(r_1 + r_2 - c)^2}{c}[c^2 + 2c(r_1 + r_2) - 3(r_1 - r_2)^2]$$

$$= 1\tfrac{1}{2}\pi d^2\frac{d^2 - 4d(r_1 + r_2) + 12r_1r_2}{r_1 + r_2 - d} \ .$$

4. Wird aus einer Kugelschicht der Kegelstumpf herausgeschnitten, der mit ihr dieselben Endflächen hat, so ist das Volumen des übrig bleibenden ringförmigen Körpers

$$V = \tfrac{1}{6}\pi(3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2) - \tfrac{1}{3}\pi h(\varrho_1^2 + \varrho_1\varrho_2 + \varrho_2^2) = \tfrac{1}{6}\pi h[(\varrho_1 - \varrho_2)^2 + h^2] = \tfrac{1}{6}\pi h s^2,$$

wenn s die Seitenlinie des Kegelstumpfs ist. Wird $s = h$, so sind die Endflächen einander gleich, der Kegelstumpf wird zum Cylinder und das Volumen des Ringes ist

$$V = \tfrac{1}{6}\pi h^3 \quad ,$$

d. h. gleich der Kugel vom Durchmesser h. In allen Kugeln haben also diese Ringe, wenn sie gleiche Höhe haben, gleiches Volumen.

5. Aus einer Kugel vom Radius r soll eine Kugelschicht, welche die Höhe h und das Volumen V hat, herausgeschnitten werden. Hat die dem Mittelpunkt nächstliegende Endfläche von ihm den Abstand x, so ist in der Gleichung

$$3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2 = \frac{6V}{h} \quad ,$$

$$\varrho_1^2 = r^2 - x^2 \, , \qquad \varrho_2^2 = r^2 - (x+h)^2$$

zu setzen, wodurch man für x die quadratische Gleichung:

$$x^2 + hx - r^2 + \tfrac{1}{3}h^2 + \frac{V}{\pi h} = 0$$

erhält. Man hat die positive oder negative Wurzel zu nehmen, die den kleinsten absoluten Wert hat. Soll $h = \frac{1}{2}r$ und $V = \frac{1}{3}\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$ sein, so ist

$$x^2 + \tfrac{1}{2}rx = 0 \quad ,$$

d. h. $x = 0$ zu nehmen. Eine Begrenzungsfläche ist also ein größter Kreis.

6. In einem Halbkreis werden zwei Radien gezogen, die mit dem begrenzenden Durchmesser die Winkel $\alpha > \beta$ bilden. Läßt man den Halbkreis um den Durchmesser rotieren, so beschreibt der zwischen den beiden Radien liegende Bogen eine Kugelzone, deren Höhe

$$h = r\cos\beta - r\cos\alpha = 2r\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) \quad ,$$

deren Inhalt daher

$$F = 2\pi r h = 4\pi r^2 \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

ist. Für $\beta = 0$ erhält man eine Kappe vom Inhalt:

$$F = 4\pi r^2 \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha \quad .$$

7. Welcher Kreissektor muß um den einen ihn begrenzenden Radius rotieren, um einen Kugelsektor zu beschreiben, dessen Oberfläche gleich einem größten Kugelkreise ist?

Bezeichnet man mit r den Radius und mit α den Centriwinkel des Kreissektors, so muß

$$4\pi r^2 \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha + \pi r^2 \sin\alpha = \pi r^2$$

oder

$$5\sin^2\alpha + 2\sin\alpha - 3 = 0$$

sein. Diese Gleichung hat die Wurzel

$$\sin\alpha = \tfrac{3}{5} \, , \qquad \alpha = 36^0\,52'\,11'' \quad ;$$

die andre $\sin\alpha = -1$ ist nicht zu gebrauchen. Die Höhe des Kegels, der einen Bestandteil des Kugelsektors bildet, ist $\frac{1}{5}r$, womit der Kreissektor leicht zu konstruieren ist. Da $\sin^2\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{10}$ ist, so ist die begrenzende Kappe des Sektors $\frac{1}{10}$ der Kugelfläche und der von der Kappe begrenzte Sektor $\frac{1}{10}$ des Kugelvolumens.

8. In eine Kugel vom Radius r ist ein gerader Cylinder einzuschreiben, dessen Mantel gleich der von seiner Grundfläche abgeschnittenen Kappe ist. Hat die Grundfläche des Cylinders vom Mittelpunkt der Kugel den Abstand xr, so muß

$$4x^2(1-x^2) = (1-x)^2$$

sein. Außer der selbstverständlichen Lösung $1 - x = 0$ hat man die kubische Gleichung

$$4x^3 + 4x^2 + x - 1 = 0 \quad ,$$

die als einzige reelle Wurzel $x = 0{,}34781$ gibt.

9. Aufgaben, bei denen in einer gegebenen Kugel die Höhe eines Segments oder einer Schicht von gegebenen Volumen zu bestimmen ist, führen auf kubische Gleichungen. Z. B.: Wie hoch steht 1 *kg* Wasser in einer Kugel von 1 *dm* Radius? Ist der Abstand der Grundfläche des Segments vom Mittelpunkt der Kugel x *dm*, so ist die Höhe des Segments $(1 - x)$ *dm* und man erhält die kubische Gleichung:

$$x^3 - 3x + 1{,}04507 = 0 \quad ,$$

von deren drei reellen Wurzeln nur $x = 0{,}36457$ brauchbar ist. Die gesuchte Höhe ist also 0,63543 *dm*.

5. Schneidet man eine Kugel durch zwei größte Kreise, deren Ebenen den Neigungswinkel α miteinander bilden, so heißt der zwischen zwei ihrer Halbkreise liegende Teil des Kugelvolumen ein Kugelkeil und der entsprechende Teil der Kugelfläche ein sphärisches Zweieck. Der Kugelkeil und das sphärische Zweieck sind proportionale Teile des Volumens und der Oberfläche der Kugel, denn man kann sie erzeugen, indem man einen Halbkreis nur um den Winkel α rotieren läßt. Es ist daher das Volumen des Kugelkeils:

$$10) \qquad V = \tfrac{1}{3}\pi r^3 \cdot \frac{\alpha^0}{360^0} = \tfrac{1}{3}\pi r^3 \cdot \frac{\alpha^0}{90^0}$$

und die Fläche des sphärischen Zweiecks:

$$11) \qquad F = 4\pi r^2 \cdot \frac{\alpha^0}{360^0} = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha^0}{90^0} \quad .$$

Denkt man sich ein sphärisches Dreieck ABC (Fig. 321) durch jedes seiner Nebendreiecke zu einem sphärischen Zweieck ergänzt, so ist jeder Winkel des Dreiecks der Winkel eines der Zweiecke. Sind α, β, γ die Winkel des Dreiecks ABC, dessen Inhalt F zu bestimmen ist, so erhält man hiernach

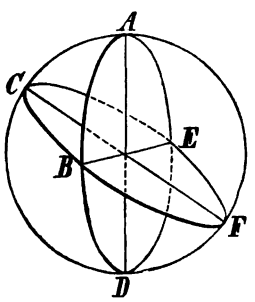


Fig. 321.

$$F + \triangle CBD = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha^0}{90^0} \quad ,$$

$$F + \triangle ACE = \pi r^2 \cdot \frac{\beta}{90^0} \quad ,$$

$$F + \triangle ABF = \pi r^2 \cdot \frac{\gamma}{90^0} \quad ,$$

folglich

$$3F + CBD + ACE + ABF = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha + \beta + \gamma}{90^0} \quad .$$

Nun ist das Dreieck BDF das Gegendreieck zu ACE, mithin diesem symmetrisch, dem Inhalte nach gleich; setzt man also BDF für ACE und berücksichtigt, daß die Summe der vier Dreiecke ABC, CBD, BDF, ABF gleich der Halbkugelfläche, also gleich $2\pi r^2$ ist, so erhält man

$$2F + 2\pi r^2 = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha + \beta + \gamma}{90^0} \quad ,$$

woraus

$$F = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha + \beta + \gamma - 180^0}{180^0}$$

folgt. Der Überschuß der Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma$ eines sphärischen Dreiecks über 180^0 ist der sphärische Exzeß (vgl. § 9: § 12 Nr. 6) des Dreiecks. Somit hat man den Inhalt eines sphärischen Dreiecks

$$12) \qquad F = \pi r^2 \frac{\varepsilon^0}{180^0} \quad .$$

Aus dieser Formel folgt, daß sphärische Dreiecke derselben Kugel, die gleichen sphärischen Exzeß haben, einander gleich sind und daß im allgemeinen der Inhalt eines sphärischen Dreiecks derselben Kugel dem sphärischen Exzeß proportional ist.

Als Beispiel diene die Berechnung des Dreiecks Brocken-Hohehagen-Inselsberg, dessen direkt gemessene Winkel den sphärischen Exzeß $\varepsilon = 14{,}853''$ ergaben. Nimmt man den Erdhalbmesser $r = 6370{,}28\ km$ an, so erhält man, da

$$\frac{\varepsilon^0}{180^0} = \frac{\varepsilon''}{648000''} \text{ ist, } \quad F = 2922{,}30\ km^2 \ .$$

Bei Dreiecken auf der Erdoberfläche hat, wie in dem vorstehenden Beispiel, der sphärische Exzeß in der Regel einen kleinen Wert, da Dreiecke, deren Winkel durch unmittelbare Messung bestimmt werden sollen, nur verhältnismäßig kleine Seiten haben können und daher von einem ebenen Dreieck wenig abweichen. Bei derartigen Dreiecken kann man nach einem Satze von LEGENDRE jeden Winkel um den dritten Teil des sphärischen Exzesses vermindern und dann das Dreieck als ein ebenes berechnen, dessen Winkel die so erhaltenen Differenzen sind.

Auch der Inhalt der Fläche eines sphärischen Polygons kann nach der Formel

$$F = \pi r^2 \cdot \frac{\varepsilon^0}{180^0}$$

berechnet werden, wenn man unter ε den Überschuß der Winkelsumme des sphärischen n-Ecks über $(2n - 4)R$, also über die Winkelsumme eines ebenen n-Ecks versteht. Man erhält diesen Satz, wenn man das n-Eck durch Diagonalbogen in Dreiecke zerlegt, die Flächen dieser einzeln berechnet und dann addiert.

Ein sphärisches Vieleck begrenzt mit den Ebenen der ihm zugeordneten Ecke eine Kugelpyramide. Ihr Volumen ist derselbe Teil vom Volumen, wie der Inhalt des begrenzenden sphärischen Vielecks von der Oberfläche der Kugel: es gilt mithin für das Volumen der Kugelpyramide die Formel:

$$13) \qquad V = \tfrac{1}{3}\pi r^3 \cdot \frac{\varepsilon^0}{180^0} \ .$$

Spamersche Buchdruckerei in Leipzig.